Feuille d'exercices n° 5.

Exercice 1 Soient E, F des e.v.n. et $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

(a) Verifier que pour tout $f \in F'$, l'application $g : F \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(Ax),\ x \in E$, est linéaire et continue.

(b) Notons $g := A^* f$; l'opérateur $A^* : F' \to E'$ est dit adjoint de A. Montrer que $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$ et, de plus, $||A|| = ||A^*||$.

Exercice 2

(a) Décrire l'adhérence de $\bar{B}(0, 1)$ de l'espace l^2 pour la topologie faible.

(b) Soit E un e.v. n. Décrire l'adhérence de $\bar{B}(0, 1)$ pour la topologie faible.

Exercice 3 (un cas particulier du théorème de Banach-Alaoglu) Soit E un e.v.n. séparable. Démontrer que la boule unité de E' est faiblement $*$ compacte (= compacte par rapport à la convergence faible $*$).

Exercice 4 Soit E un e. v. n. On dit qu'une famille des vecteurs $(x^n)_{n=1,\dots,\infty}$ est totale (compléte) pour E, si $\overline{lin\,(x^n)} = E$.

(a) Montrer que la famille (x^n) est totale pour E ssi l'implication suivante a lieu

$$f \in E' \ :\ f(x^n) = 0\ \forall n \Longrightarrow f = 0.$$

(b) Soit E un e. v. n. séparable. Construire un système de vecteurs $(x^n) \subset E$ avec les propriétés suivantes: (x^n) est totale; pour tout N, le système $(x^n)_{n=1,\dots,N}$ est libre.

(c) Soit E un e. v. n. séparable une fois de plus. A l'aide de la famille (x^n) du pt. précédent, construire une forme linéaire non-bornée sur E. Est-elle définie sur un ensemble dense de E?

Exercice 5 Rappelons que $(C[a, b])' = \mathcal{M}[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer que l'espace $C[a, b]$ n'est pas réflexif.

(a) Raisonnons par absurde: supposons que l'application $\delta_x : C[a, b] \to (\mathcal{M}[a, b])'$ est surjective. Pour $t_0 \in]a, b[$ fixé et $\mu \in \mathcal{M}[a, b]$, considérons la forme $F(\mu) = \mu(\{t_0\})$. Montrer que $F \in (\mathcal{M}[a, b])'$.

(b) En utilisant le pt. 1, montrer que nécéssairement

$$F(\mu) = F_f(\mu) = \int_a^b f(t)d\mu(t), \quad f \in C[a, b].$$

(c) Appliquer la forme F à la mesure

$$\lambda(I) = \int_I f(t)dt,$$

où I est un sous-ensemble de $[a, b]$ mesurable. Conclure.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de montrer que, "génériquement", la série de Fourier d'une fonction $f \in C[-\pi,\pi]$ diverge dans un point donné.
Soit $f \in C_p[-\pi,\pi] = \{f \in C[-\pi,\pi] : \ f(-\pi) = f(\pi)\}$ et

$$(S_m f)(x) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

la m-ième somme partielle de sa série de Fourier.

(a) Montrer que

$$(S_m f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy,$$

où $D_m(x) = \dfrac{\sin(2m+1)x/2}{\sin x/2}$ est le noyau de Dirichlet.

(b) Montrer que $||D_m|| \to \infty$ quand $m \to \infty$.

(c) Définissons $\phi_m(f) = (S_m f)(0)$. Alors $\phi_m \in (C_p[-\pi,\pi])'$. Calculer la norme de la fonctionelle.

(d) En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus et le pt. 2, démontrer que l'ensemble de f telles que $(S_m f)(0)$ converge quand $m \to \infty$, est maigre.

(e) Le résultat du pt. précédent est-il vrai pour un $x \in [-\pi,\pi]$ arbitraire?

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{X}, ||A|| < 1$.

(a) Montrer que l'opérateur $I - A$ est inversible et l'inverse est borné. Notamment,

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad ||(I-A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}.$$

(b) Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{L}(X) : A^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est ouvert par rapport à la norme opératorielle.

Exercice 8 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et (λ_n) une suite de $\rho(T)$. Supposons que $\lambda_n \to \lambda$ et que $(\|(\lambda_n I - T)^{-1}\|)_n$ est bornée. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$.

Exercice 9 Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{C}$ et T l'opérateur défini sur $\ell^p (1 \le p \le \infty)$ par

$$(Tu)(n) = \lambda_n u(n) \ \ \forall n, \ u \in \ell^p.$$

(a) Montrer que T est continu si et seulement si (λ_n) est bornée.

(b) Dans le cas où T est continu, déterminer ses valeurs propres et son spectre.

Exercice 10 Soit $S \in \mathcal{L}(\ell^p), \ 1 \le p \le \infty$ défini par:

$$(Su)_n = u_{n+1} \ \ \forall n \ge 0.$$

(a) Montrer que si $p < \infty$, alors l'ensemble des valeurs propres de S (noté $\mathrm{VP}(S)$) est $\{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| < 1\}$ et si $p = \infty$, $\mathrm{VP}(S) = \{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \le 1\}$.

(b) En déduire le spectre de S.

Exercice 11 Soit $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ donné par:

$$Tf(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)dy \quad \forall f \in C[0,1]$$

où k est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in C[0,1]$

$$|T^n f(x)| \leq \|f\|_\infty \|k\|_\infty^n \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Déterminer $r(T)$, puis $\sigma(T)$.

Exercice 12 Soit E un espace de Banach muni d'une relation d'ordre $\leq$ telle que:

$$\begin{aligned} 0 \leq f \leq g &\Rightarrow \|f\| \leq \|g\| \\ \forall \lambda > 0 : \quad f \geq 0 &\Rightarrow \lambda f \geq 0 \\ f \leq g &\Leftrightarrow g - f \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur positif, c'est à dire tel que $Tf \geq 0$ pour tout $f \geq 0,\ f \in E$.

(a) Montrer que s'il existe $\lambda > 0$ et une fonction $f \geq 0,\ f \neq 0$ tels que $Tf \geq \lambda f$ alors $r(T) \geq \lambda$.

(b) Soit $\phi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue, $k \in (C[0,1]^2, \mathbb{R}^+)$ et $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ tels que:

$$Tf(x) = \int_0^{\phi(x)} k(x,y)f(y)dy.$$

(i) Montrer que si $\phi(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$ alors $r(T) = 0$.

(ii) On suppose qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $k(x_0,x_0) > 0$ et $\phi(x_0) > x_0$. Montrer que $r(T) > 0$.

Exercice 13 Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. L'image numérique de T est l'ensemble

$$W(T) = \{(Tx,x), \quad \|x\| = 1\}.$$

Un scalaire λ est appelé valeur propre approchée (on notera $\lambda \in \textsc{vpa}(T)$) s'il existe $x_n \in H, \|x_n\| = 1$ pour tout n et la suite $(\lambda x_n - Tx_n)$ tend vers 0.

(a) Montrer que $\textsc{vpa}(T)$ est compact et que $\overline{\textsc{vp}(T)} \subseteq \textsc{vpa}(T) \subseteq \sigma(T)$.

(b) Montrer que $\sigma(T) = \textsc{vpa}(T) \cup \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \textsc{vp}(T^*)\right\}$.

(c) Montrer que $\textsc{vpa}(T)$ est contenu dans l'adhérence $\overline{W(T)}$ de $W(T)$. En déduire que $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.

(d) En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $r(T) \leq \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)| \leq \|T\|$.

Exercice 14 Pour $\alpha \in (0,1)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on définit

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s \in [a,b], t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

et on pose $C^\alpha([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : [f]_\alpha < \infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$.

(a) Montrer que $(C^\alpha([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que la boule unité fermée de C^α est un compact de $C([a,b])$.

(c) Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer que pour tout $f \in C^\beta$ et tout $\eta > 0$,

$$|f|_\alpha \leq \max\left(2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}, \eta^{\beta-\alpha}[f]_\beta\right).$$

En déduire que si (f_n) est une suite bornée de C^β qui converge uniformément (i.e. en norme $\|\cdot\|_\infty$) vers $f \in C^\beta$ alors (f_n) converge vers f dans C^α.

(d) Montrer que pour $0 \leq \alpha < \beta < 1$, le plongement $C^\beta([a,b]) \hookrightarrow C^\alpha([a,b])$ est compact.

Exercice 15 Soit E un sous-espace fermé de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est contenu dans $C^1([0,1])$.

(a) Montrer que E est complet pour la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(b) En déduire que les normes $\|.\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E.

(c) Montrer que la boule unité de E est relativement compacte pour le norme $\|\cdot\|_\infty$.

(d) En déduire que E est de dimension finie.