Ex 1 : Montrer que $\forall x_0 \in X$:

$$\|x_0\| = \underbrace{\sup\{|x'(x_0)| : x' \in X' \text{ et } \|x'\| \leq 1\}}_{=: S}.$$

solution : $x' \in X' \iff x' : X \to \mathbb{R}$ linéaire & continue.

donc (déf. de la norme d'opérateur)

$$|x'(x_0)| \leq \|x'\| \cdot \|x_0\|$$

d'où $S \leq \|x_0\|$.

Inversement, choisissons $U = \text{vect}(x_0)$ et

$$\ell(x) = \lambda \|x_0\| \quad \text{si } x \in U \text{ et } x = \lambda \cdot x_0.$$

ℓ est linéaire et continue sur U, en particulier

$$\ell(x) \leq p(x) \overset{\text{def}}{=} \|x\| \quad \text{sur } U.$$

$\overset{HB}{\Rightarrow} \exists\, \tilde{\ell} : X \to \mathbb{R}$ linéaire t.q. $\tilde{\ell}(x) \leq \|x\|$

et $\tilde{\ell}|_U = \ell$, donc $\tilde{\ell}(x_0) = \|x_0\|$.

donc $S \geq \|x_0\|$.

Rem. Si on note $\langle x, x' \rangle \overset{\text{def}}{=} x'(x)$ on a une belle analogie avec le résultat Hilbertien

$$\|u\| = \sup\{|(u|v)| \text{ t.q. } \|v\| \leq 1\}$$

(Montrez ceci !)

Ex 2 : Montrer que $i_X : \begin{cases} X \to X'' \\ x \mapsto \delta_x \end{cases}$

(avec $\delta_x(x') = x'(x)$) est une isométrie.

solution : En effet,

$$\|x\| \overset{\text{Ex 1}}{=} \sup\{ |x'(x)| : \|x'\| \leq 1\}$$

$$= \sup\{ |\delta_x(x')| : \|x'\| \leq 1\}$$

$$= \|\delta_x\|_{X' \to \mathbb{R}}$$

(δ_x vu comme opérateur linéaire de $X' \to \mathbb{R}$)

donc i_X isométrie. $\blacksquare$

Ex 3 : Soit X evn réel, $U \leq X$ un s.e.v. fermé et $x_0 \notin U$.

Montrer qu'il existe $x' \in X'$ t.q.

$$\begin{cases} x'|_U \equiv 0 \\ x'(x_0) \neq 0 \end{cases}$$ (donc x' non-trivial)

Solution : On considère $\pi : X \to (X/U)$,

càd $\pi(x) = \pi(y) \iff x - y \in U$.

(X/U) est un e.v.n par rapport à la norme $\| \pi(x) \| = \inf \{ \|y\| \text{ t.q. } y \in X, \pi(y) = \pi(x) \}$

Clairement, $\pi(u) = 0 \ \forall u \in U$ (puisque $\underbrace{u-0}_{u} \in U$)
et $\pi(x_0) \neq 0$.

Choisissons donc un $l \in (X/U)'$ t.q.
$0 \neq l(\pi(x)) = (l \circ \pi)(x)$.

$x' = l \circ \pi$ satisfait donc $x'(x_0) \neq 0$
et $x'(u) = 0 \ \forall u \in U$.

$\boxed{}$

Ex 4. On appelle X <u>réflexif</u> si

$i_X : X \to X''$ est surjectif (ceci n'est pas tj. le cas, ex. $X = c_0$)

Montrer que X réflexif $\Rightarrow X'$ réflexif.

<u>solution</u>: Soit $x''' \in X'''$. On cherche $x' \in X'$ t.q.

$$i_{X'}(x') = x'''.$$

Definissons $x'(x) = x'''(\underbrace{i_X(x)}_{\in X''})$.

Clairement, x' est linéaire et continue.

Puisque X est réflexif, $\forall x'' \in X'' \ \exists x \in X : i_X(x) = x''$.

Donc
$$\begin{aligned} x'''(x'') &= x'''(i_X(x)) \\ &\overset{\text{def } x'}{=} x'(x) \\ &= (i_X(x))(x') \\ &= x''(x') \\ &= (i_{X'}(x'))(x'') \qquad \text{Ceci est vrai } \forall x'' \in X'' ! \end{aligned}$$

(puisque $i_{X'} : x' \longmapsto (x'' \mapsto x''(x'))$)

donc $x''' = i_{X'}(x')$, càd $i_{X'}$ est surjectif $\blacksquare$

<u>Rem</u>: On peut montrer que X' réfl. ~~[illegible]~~ $\Rightarrow X''$ réflex.

$\Rightarrow i_X(X)$ réfl. (c'est un s.e.v. fermé de X'')

donc X réflexif.

Ainsi on obtient X réflexif $\Leftrightarrow$ X' réflexif.