On va montrer le résultat suivant: L'ensemble des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $C([0,1])$, muni de la norme uniforme.

On pose
$$O_n = \left\{ f \in C([0,1]) :\ \forall t :\ \sup_{0<|h|<1/n} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n \right\}.$$

1. Soit $f \in O_n$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ il existe un $\delta_t > 0$ et un h_t, $0 < |h_t| < 1/n$ tels que
$$\left| \frac{f(t+h_t)-f(t)}{h_t} \right| > n + \delta_t$$
2. Conclure que pour tout $t \in [0,1]$, il existe un voisinage U_t de t tel que l'estimation
$$\left| \frac{f(s+h)-f(t)}{h} \right| > n + \delta_t$$
reste vraie pour tout $s \in U_t$.
3. Montrer qu'il existent $t_1 \dots t_n$ tels que
$$[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{t_i}$$
4. On pose $\delta = \min(\delta_{t_1} \dots \delta_{t_n})$ et $h = \min(|h_{t_1}| \dots |h_{t_n}|)$. Montrer que si $g \in C([0,1])$ satisfait l'inégalité $\|f-g\|_\infty < h\delta/2$, alors $g \in O_n$. Y a-t-il une propriété topologique de l'ensemble O_n qui en découle?
5. On montrera par la suite que pour tout O ouvert non-vide, on a $O \cap O_n \neq \emptyset$. Que peut-on dire des ensembles O_n ?
6. Soit $f \in C([0,1])$ et $r > 0$ tel que $B(f,r) \subset O$. Peut-on trouver un polynôme p tel que $\|f-p\|_\infty < r/2$? Justifiez la réponse.
7. Construire une fonction de 'scie' h_m telle que $\|h_m\|_\infty < r/2$ et telle que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\epsilon > 0$ il y a $s \in [0,1]$ avec $|t-s| < \epsilon$ et $|h_m(t)-h_m(s)| > m|t-s|$.
8. Montrer $f_m = p + h_m \in B(f,r)$
9. Montrer que pour $m > n + \|p'\|_\infty$ on a $f_m \in O_n$.
10. Déduire le résultat souhaité en utilisant un théorème du cours.

Devoir à rendre Mercredi, le 2/12/09.