Devoir surveillé du 7/11/2011, Durée: 3h.
Documents autorisés: aide-memoire A4 recto.

NB: *un "em" et un "evn" sont les abréviations pour un "espace métrique" et un "espace vectoriel normé", respectivement.*

Exercice 1

(a) Donner la définition d'un espace de Banach. Détailler la notion de complétude.

(b) Démontrer que tout evn (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie est complet.

(c) Donner un exemple (*a fortiori* de dimension infinie, cf. la question précedente):

- d'un evn *des suites numériques* non-complet,
- d'un evn *des fonctions* non-complet.

(d) Montrer qu'un evn X est complet ssi (= si et seulement si) toute série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ x^n \in X$ absolument convergente (c.à.d., $\sum_{n=1}^{\infty} ||x^n|| < \infty$) converge (dans X).

Exercice 2
Soit (X, d) un espace métrique.

(a) On dit qu'une famille $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles de X est *centrée*, si pour toute sous-famille finie $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\} \subset A$, on a

$$\cap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} \neq \emptyset.$$

Démontrer que $K \subset X$ est compact ssi on a

$$\cap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$$

pour toute famille *centrée* $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de sous-ensembles fermés de K.

(b) On dit que $B \subset X$ est séparable, s'il existe $C \subset B$ dénombrable et dense (dans B; c.à.d., $\bar{C} = B$). Montrer que tout compact K est séparable.

Exercice 3 Soit X un espace métrique complet. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) Toute intersection d'une suite dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense.

(b) Toute réunion dénombrable de fermés sans points intérieurs est sans point intérieur.

(c) Le complémentaire d'une partie maigre est partout dense.

(d) Toute partie maigre est sans point intérieur.

Exercice 4 Soient X, Y des espaces vectoriels normés et $A : X \to Y$ une application linéaire continue. On pose $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$. Montrer les égalités:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \inf\{C > 0 : \ \|Ax\| \le C\|x\|,\ \forall x \in X\}. \end{aligned}$$

TSVP

Exercice 5 Soit $T : X \to \mathbb{C}$ une application linéaire donnée toujours par la même expression

$$Tf = \int_0^1 xf(x)\,dx.$$

Montrer que l'application est continue pour *a)* $X = L^2[0,1]$; *b)* $X = C[0,1]$; *c)* $X = L^\infty[0,1]$. Calculer sa norme dans chaque cas.

Exercice 6 Soit $X = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et $Y = C([0,1],\mathbb{R})$ des evn avec la norme sup.

(a) Soit $A = \frac{d}{dx} : X \to Y$, i.e.

$$(Af)(x) = f'(x), \quad f \in C^1([0,1],\mathbb{R}).$$

Montrer que A est un opérateur fermé.

(b) Est-il borné? Y a-t-il une contradiction avec le théorème de graphe fermé? (Justifiez votre réponse).

FIN