(proposition d')EXAMEN

Problème:

(a) On démontre d'abord un petit
Lemme: Soit E un espace de Banach, $D \subseteq E$ une partie dense et S_n une suite d'opérateurs sur E qui satisfait $\|S_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors si la suite $(S_n x)_{n\geq 0}$ converge pour tout $x \in D$, la suite $(S_n x)_{n\geq 0}$ converge pour tout $x \in E$.

(b) Soit désormais $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et T l'opérateur donné par

$$(Tf)(s) = \int_0^1 f(st)\, dt.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$, ensuite calculer $\|T\|$.

(c) Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} T^k$. Montrer que $S_n \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire sur les normes de S_n ?

(d) Pour un polynôme $p(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$, donner une expression pour $(Tp)(s)$.

(e) En déduire une représentation pour $(T^k p)(s)$ (on pourra argumenter par récurrence).

(f) Montrer que $(S_n p)$ est une suite de Cauchy pour tout polynôme p.

Indication: on pourra montrer que pour $p(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$, et $n > m$ on ait

$$\|S_n(p) - S_m(p)\| \leq \sum_{j=0}^{d} |a_j| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+j)^k} - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(1+j)^k} \right|.$$

Ensuite estimer terme par terme (on pourra distinguer les cas $j = 0$ et $j > 0$ et pour ce dernier étudier la suite réelle (j étant fixé) $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+j)^k}$) pour conclure.

(g) En déduire que la suite (S_n) converge fortement vers un opérateur S sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$.