Département Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques 9 mars 2012
Durée : 1h30 Ph. Thieullen

Les documents de cours et de TP sont autorisés.

Exercice 1. On considère un modèle discret de population à 1 espèce donné par

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{1+(N_t/K)^b}, \quad r, K, b > 0.$$

1. En introduisant la variable sans dimension $x_t = N_t/K$, récrire le modèle sous la forme $x_{t+1} = f(x_t)$ où $f(x)$ est une fonction à déterminer.
2. Déterminer les points d'équilibre et discuter suivant la valeur de r le nombre de ces points.
3. Montrer que la dérivée de $f(x)$ est donnée par
$$f'(x) = \frac{r(1+(1-b)x^b)}{(1+x^b)^2}.$$
4. Déterminer la stabilité des points d'équilibre.
5. On suppose $b < 1$, montrer que $f(x)$ est croissante. On suppose $b > 1$, montrer que $f(x)$ est croissante pour $x < (b-1)^{-1/b}$ et décroissante pour $x > (b-1)^{-1/b}$.
6. On suppose $r < 1$. Tracer sur un même graphe $y = x$, $y = r$ et $y = f(x)$ pour $b = 1$ et pour $b \gg 1$. Si N_0 est le nombre d'individus initialement, que vaut N_t après un grand laps de temps ?
7. On suppose $1 < r < 2$. Montrer que le deuxième point d'équilibre x_* vérifie $x_* < 1$. Tracer sur un même graphe $y = x$, $y = r$ et $y = f(x)$ pour $b = 1$ et pour $b \gg 1$. On suppose de plus $r = \frac{3}{2}$ et $b = 4$, que vaut N_t après un grand laps de temps ?
8. On suppose $r > 2$. Montrer que le deuxième point d'équilibre x_* vérifie $x_* > 1$. Tracer sur un même graphe $y = x$, $y = r$ et $y = f(x)$ pour $b = 1$ et pour $b \gg 1$. On suppose de plus $r = 3$ et $b = 4$, décrire le comportement dans le temps du nombre d'individus N_t.

Exercice 2. On considère le schéma fonctionnel suivant

$$\begin{cases} nX + s & \xrightarrow{a} & (n+p)X + s \\ s & \xrightarrow{b} & 0 \\ X + s & \xrightarrow{c} & X + 2s \end{cases} \qquad a, b, c, p > 0, \quad ngeq2,$$

où X désigne une quantité de biomasse et s un facteur de croissance du type cataliseur ou enzime.

1. Expliquer en quelques mots le sens des trois équations.

2. Ecrire les équations différentielles sur X et s.
3. On suppose $n = 2$ et $c = 0$ (la dernière équation n'existe pas). Montrer qu'on peut écrire
$$-\frac{1}{X^2}\frac{dX}{dt} = \frac{ap}{b}\frac{ds}{dt},$$
intégrer cette dernière égalité et retrouver l'équation logistique
$$\frac{dX}{dt} = rX\Big(1 - \frac{X}{K}\Big)$$
pour une certaine constante d'intégration K et un taux $r = b$.
4. On suppose maintenant que $n > 2$ et $c > 0$. Montrer qu'on peut écrire
$$\frac{cX - b}{X^n}\,\frac{dX}{dt} = ap\frac{ds}{dt}$$
intégrer cette égalité et trouver une équation similaire à l'équation logistique
$$\frac{dX}{dt} = rX\Big[1 - \Big(\frac{X}{K}\Big)^{n-1} - \frac{X}{H}\Big]$$
où K est une constante d'intégration, $r = \frac{b}{n-1}$ et $H = \frac{b(n-2)}{c(n-1)}$.
5. On suppose ici que $n = 3$. On normalise l'équation précédente en posant $x = X/K$, $2\alpha = K/H$ et en changeant le temps $t \to rt$ (on gardera la même lettre t) pour avoir
$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 2\alpha x - x^2).$$
Déterminer les points d'équilibre et leur stabilité.

Exercice 3. On s'intéresse à un modèle décrivant un phénomène d'extinction d'une population en dessous d'un seuil critique. Le modèle est décrit par l'équation différentielle
$$\frac{dN}{dt} = rN\Big[1 - \frac{a}{1 + bN} - \frac{N}{K}\Big], \qquad a, b, K > 0, \quad bK > 1.$$

1. Rendre l'équation sans dimension en introduisant $x = bN$, $t = r\tau$ et $M = bK$. On gardera t au lieu de τ par la suite pour simplifier l'écriture. On écrira l'équation sous la forme $\frac{dx}{dt} = f(x)$ et on explicitera $f(x)$.
2. Rechercher les points d'équilibre. On notera $x_*^0 = 0$ et on introduira le discriminant $\Delta = (M-1)^2 + 4M(1-a)$. On montrera que, pour $0 < a < 1$, il existe un seul point d'équilibre $x_*^2 \in]0, M[$ qu'on explicitera, et pour $1 < a < a_*$ avec $a_* = (M+1)^2/4M$, qu'il existe deux points d'équilibre x_*^1 et x_*^2 dans $]0, M[$. (Indication : le signe des racines λ_1 et λ_2 d'une équation $x^2 + \alpha x + \beta$ se lit sur le signe de $\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\beta = \lambda_1\lambda_2$).
3. Tracer sur un même graphique l'allure des 5 courbes $y = f(x)$ dans chacun des cas : $0 < a < 1$, $a = 1$, $1 < a < a_*$, $a = a_*$ et $a > a_*$. On placera les points $x = M$ et $x = (M-1)/2$ sur l'axe des abscisses.
4. Discuter la stabilité des points d'équilibre dans chaque cas. On présentera la réponse sous forme d'un tableau suivant les 5 cas de la question 3.
5. Décrire le comportement de $x(t)$ en temps long suivant les valeurs de la donnée initale $x(0)$ dans chacun des cas : $0 < a < 1$, $1 < a < a_*$ et $a > a_*$.