## Exercice 1 (DS1)

On considère un modèle discret de population à une espèce donné par

$$N_{t+1} = \frac{r N_t}{\left[1+\left(\frac{N_t}{K}\right)^b\right]} \qquad r>0,\ K>0,\ b>0$$

On commence par rendre l'équation sans dimension en posant

$x_t = \frac{N_t}{K}$ d'où $x_{t+1} = \frac{r\,x_t}{(1+x_t^{\,b})}$.

Les points d'équilibre sont

$x_{t+1} = x_t \iff \underline{x_t = 0}$ et $\underline{x_t = (r-1)^{1/b} = x_*}$

Si $r<1$ il n'y a qu'un seul point d'équilibre. On étudie la stabilité en $x=0$ et $x_* = (r-1)^{1/b}$ (si $r>1$).

$$f(x) = \frac{rx}{1+x^b} \qquad f'(x) = \frac{r}{1+x^b} - \frac{rx\,b x^{b-1}}{(1+x^b)^2} = \frac{r(1+(1-b)x^b)}{(1+x^b)^2}$$

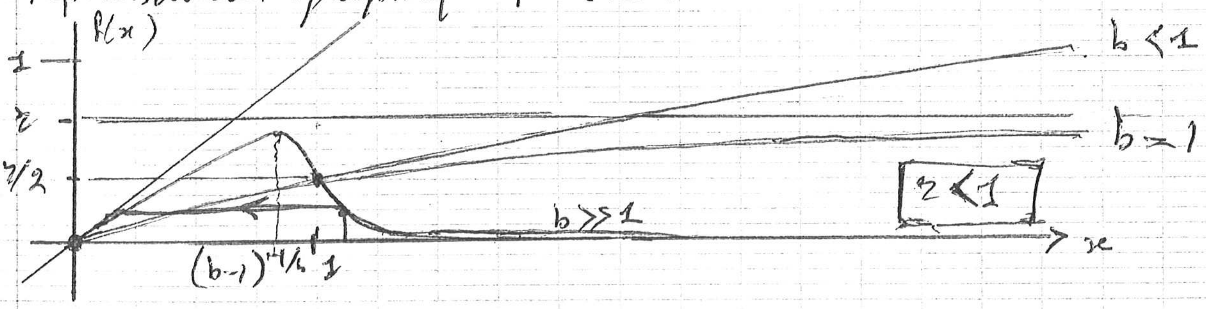
pour $x=0$ :

$f'(0) = r \to$ stable $\iff r<1$

$f'(x_*) = \frac{1+(1-b)(r-1)}{r}$ (cas où $r>1$)

$f'(x_*) < 1 \iff (1-b)(r-1) < r-1 \iff b>0$

Représentation graphique pour $r<1$ :




Pour $b<1$, $x \mapsto f(x)$ est $\nearrow +\infty$

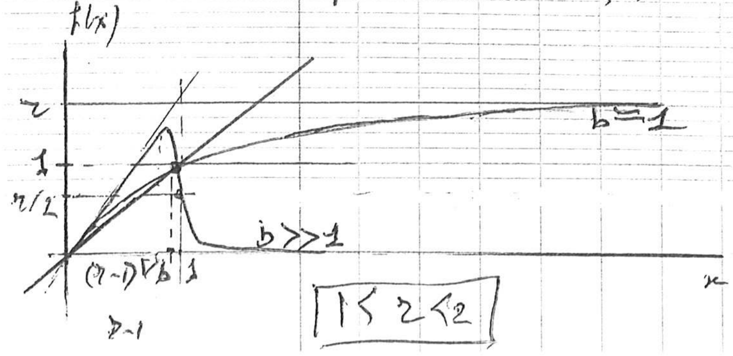
Pour $b=1$, $x \mapsto f(x)$ admet une asymptote horizontale

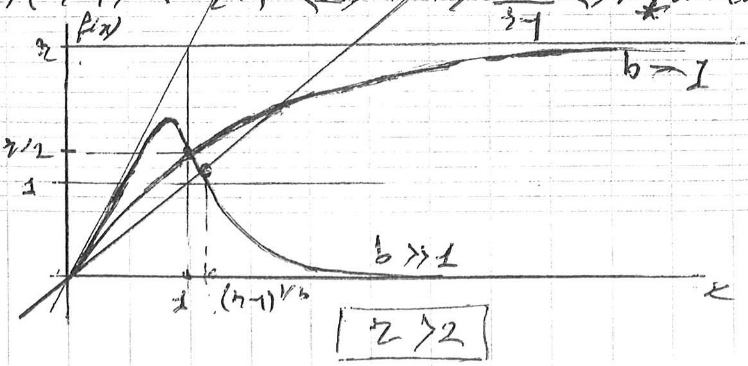
Pour $b>1$, $x \mapsto f(x)$ admet un maximum en $x_{max} = (b-1)^{-1/b} > 1 \iff b<$

et $f(x_{max}) = r\,b^{-1/b}$.

Représentation graphique pour $r>1$.

$f'(x_*) < -1 \iff (1-b)(r-1) < -r-1 \iff b-1 > \frac{r+1}{r-1} \iff x_*$ instable



Exercice 2 (DS1) On considère le schéma fonctionnel suivant :

$$\begin{cases} nX + s \xrightarrow{a} (n+p)X + s \\ s \xrightarrow{b} 0 \\ X + s \xrightarrow{c} X + 2s \end{cases} \qquad a, b, c \geq 0,\ n > 2$$

où $X$ désigne une quantité de biomasse, $s$ un facteur de croissance de type catalyseur, ou enzyme.

Interprétation : $s \to 0$ désigne une dégradation spontanée du facteur de croissance. $x + s \xrightarrow{c} x + 2s$ désigne une production du facteur $s$.

Les équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a p x^n s \\ \frac{ds}{dt} = -bs + cxs \end{cases}$$

on fait le cas particulier $n=2$ et $c=0$. Le schéma est alors

$$2X + s \xrightarrow{a} (2+p)X + s \qquad s \xrightarrow{b} 0$$

$$-\frac{1}{X^2}\frac{dX}{dt} = \frac{ap}{b}(-bs) = \frac{ap}{b}\frac{ds}{dt}$$

$$+\frac{1}{X} = \frac{ap}{b}s + \frac{1}{K} \qquad s = \frac{b}{ap}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{K}\right)$$

d'où $\frac{dx}{dt} = bx^2\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{K}\right) = bx\left(1 - \frac{X}{K}\right)$.

On suppose maintenant $n > 2$ et $c > 0$.

$$\frac{1}{X^n}\frac{dx}{dt} = \frac{ap}{cX - b}\frac{ds}{dt}$$

$$\left(\frac{c}{X^{n-1}} - \frac{b}{X^n}\right)\frac{dx}{dt} = ap\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{-c}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)X^{n-1}} = aps + \frac{b}{K^{n-1}(n-1)}$$

$$\frac{dx}{dt} = x^n\left[\frac{b}{(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{K^{n-1}(n-1)} - \frac{c}{(n-2)X^{n-2}}\right]$$

$$= \frac{bX}{n-1}\left[1 - \left(\frac{X}{K}\right)^{n-1} - \frac{c(n-1)}{b(n-2)}X\right]$$

qu'on écrit sous la forme (k une constante quelconque)

$$\frac{dX}{dt} = rX\left[1 - \left(\frac{X}{K}\right)^{n-1} - \frac{X}{H}\right] \qquad r = \frac{b}{n-1} \quad H = \frac{b(n-2)}{c(n-1)}$$

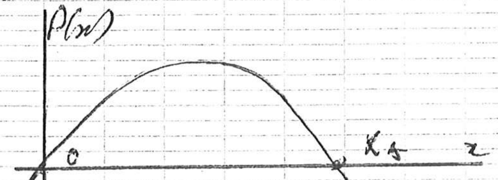
Equation normalisée $n=3$, $x = \frac{X}{K}$, $\alpha = \frac{K}{2H}$, $t \to rt$

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x^2 - 2\alpha x)$$

Recherche des points d'équilibre

$$f(x) = x(1 - x^2 - 2\alpha x)$$

$f(x) = 0 \iff x_* = 0$ ou $x_* = -\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}$ (uniquement $x_* > 0$)




stabilité : $f(x) = x - x^3 - 2\alpha x^2$ $\quad (x_*^2 + 2\alpha x_* = 1)$

$f'(x) = 1 - 3x^2 - 4\alpha x$

$f'(0) = 1 \Rightarrow$ instable

$f'(x_*) = 1 - 3(1 - 2\alpha x_*) - 4\alpha x_* = -2 + 2\alpha x_*$

$\alpha x_* = \alpha(\sqrt{\alpha^2+1} - \alpha) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1} + \alpha} < 1$

d'où $f'(x_*) < 0 \Rightarrow x_*$ est instable

Exercice 3 (DS1) On considère un modèle décrivant un phénomène d'extinction pour des population de taille inférieure à un seuil critique. Il est décrit par l'équation diff

$$\frac{dN}{dt} = rN\left[1 - \frac{a}{1+bN} - \frac{N}{K}\right], \quad a, b, K > 0, \; bK > 1$$

Equation normalisée $x = bN$ $\quad t = rt$ $\quad M = bK$

$$\frac{dx}{d\tau} = x\left(1 - \frac{a}{1+x} - \frac{x}{M}\right) \qquad \text{Hypothèse } M > 1$$

(on garde $t$ au lieu de $\tau$ pour la suite).

Point d'équilibre $f(x) = x\left(1 - \frac{a}{1+x} - \frac{x}{M}\right)$

$f'(x) = 1 - \dfrac{a}{(1+x)^2} - \dfrac{2x}{M}$

$x = 0 \quad f'(0) = 1 - a$

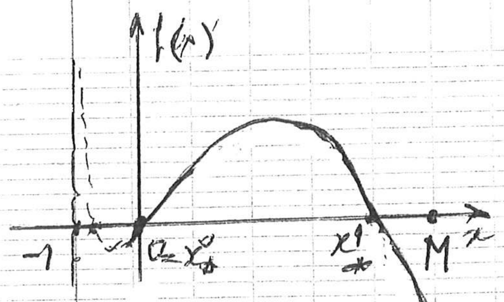
$1 - \dfrac{a}{1+x} - \dfrac{x}{M} = 0 \iff (1+x)\left(1 - \dfrac{x}{M}\right) = a$

$\dfrac{1}{M}x^2 + \left(\dfrac{1}{M} - 1\right)x + a - 1 = 0$

discriminant $\Delta = \left(\dfrac{1}{M} - 1\right)^2 - \dfrac{4}{M}(a-1)$

$0 < a < 1 \quad \Delta > 0 \quad$ 2 racines de signe contraire : 2 points d'équilibre $x_* = 0$ et

$$x_* = \frac{(M-1) + \sqrt{(1-M)^2 + 4M(1-a)}}{2}$$




L'allure de $f(x)$ est comme ci-contre :

$f(M) = -\frac{aM}{1+M} < 0$

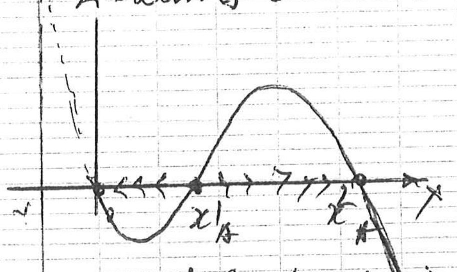
et donc $x_* < M \Rightarrow x_*$ instable

(exactement comme le modèle logistique)

On suppose $a > 1$ et $\Delta > 0$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (M-1)^2 + 4M > 4Ma \Leftrightarrow a < \frac{(M+1)^2}{4M}$$

2 racines de même signe, positives si $M > 1$, negatives si $M <$



$x_1^*$ est instable, $x_*^2$ stable

si $x(t=0) < x_*^1$ la population s'éteint

si $x(t=0) > x_*^1$ la population tend à s'équilibrer vers une taille finie $x_*^2$

On suppose $a > (M+1)^2/4M$ pas de racines réelle, $f(M) < 0$

donc $f(x) < 0$ $\forall x$, $x_0^*$ est l'unique point d'équilibre stable.

Graphes de bifurcation

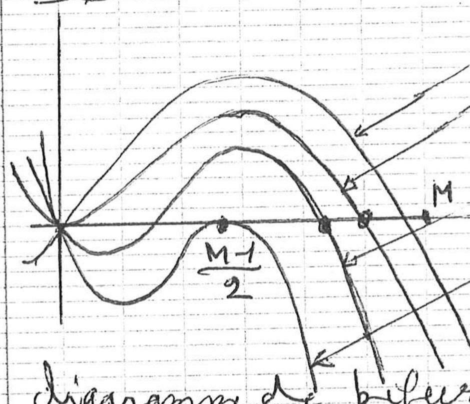



diagramme de bifurcation plan $(a, x_*)$ $x_*$ designe un des trois points d'équilibre (ou deux ou 1). En fait on trace plutôt $a$ = fonction de $x_*$

$$a = 1 - \frac{1}{M}x^2 + \left(1 - \frac{1}{M}\right)x$$