Systèmes dynamiques
Equations différentielles ordinaires

I Rappels sur les bases des EDO

1. **Définition** Une équation différentielle ordinaire est une équation reliant une fonction $x(t)$, $t \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et ses dérivées, $x'(t)$, $x''(t)$, ...

Une équation d'ordre 1 ; $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}$.

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t) \in U, \quad \forall t \in I$$

Une équation d'ordre n ; $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$, $U \subset \mathbb{R}^{nd}$

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (\forall t \in I)$$

(*)

* solution
* equat autonome
* champ de vecteur
* reduction
* condition initiale

2. **Remarque** Une équation peut être donnée implicitement. On considère par exemple l'équation

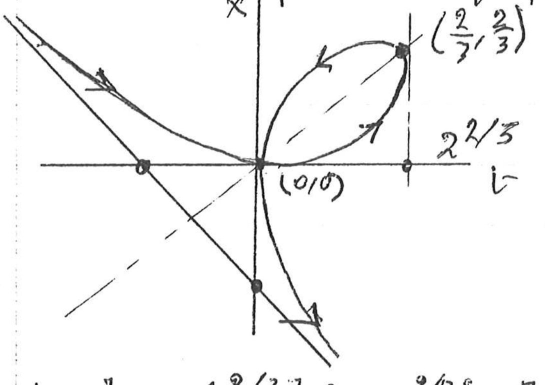
$$(x^2 - t)x' - x + t^2 = 0$$

On cherche une fonction $x(t)$, $t \in I$, définie sur un intervalle I et au moins 1 fois dérivable vérifiant l'identité précédente pour tout $t \in I$.

On observe ici (l'exemple est construit de manière ad hoc) que

$$\frac{d}{dt}\left[x^3 + t^3 - 3xt \right] = 0$$
$$\iff x^3 + t^3 - 3xt = c$$

On cherche pour simplifier des solutions avec $c = 0$



Le lieu des points vérifiants

$$x^3 + t^3 - 3xt = 0$$

est donné sur la figure ; suivant les branches n'ayant pas de pente verticale, on peut trouver des solutions définies sur $]-\infty, 2^{2/3}]$, $]0, 2^{2/3}[$, $]0, +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. **Définition** Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x^{(n)} = g(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t)\, x^{(k)} \\ g, f_0, \dots, f_{n-1} : I \to M_d(\mathbb{R}) \end{cases}$$

c'est-à-dire si, sous la forme $x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$ f est linéaire par rapport aux variables $x^{(0)} \dots x^{(n-1)}$.

4. **Remarque** 1) Si $g(t) \equiv 0$ alors l'équation est dite homogène : on écrit des fois (H) pour cette équation *

* (NH) pour non homogène & $g(t)$ est appelé aussi second membre pour (NH)

2) Une équation linéaire d'ordre n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est équivalente à une équation linéaire dans $\mathbb{R}^{nd}$; on introduit de nouvelles variables

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^{(1)} \\ \vdots \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} \qquad \begin{aligned} y'_1 &= x^{(1)} = y_2 \\ &\vdots \\ y'_{n-1} &= x^{(n-1)} = y_n \\ y'_n &= x^{(n)} = g + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\, y_k \end{aligned}$$

ou bien, de manière plus condensée

$$y' = G(t) + F(t)\, y.$$

avec

$$G(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \qquad F(t) = \begin{bmatrix} 0 & Id & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Id \\ f_0(t) & \dots & & f_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

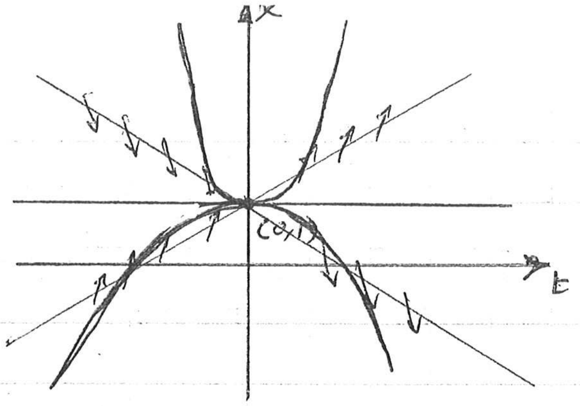
5. **Interprétation géométrique** Si $x(t)$ est une solution de l'équation $x' = f(t,x)$, où f est scalaire, $f(t,x)$ représente la pente de la courbe au point (t,x). On appelle isocline, le lieu des points de pente c fixée :

$$\{(t,x) \in I \times U : \quad f(t,x) = c\}$$

Par exemple : $\quad x' = \dfrac{2(x-1)}{t}, \quad t \neq 0$

L'isocline de pente c est donc

$$\{(t,x) : \quad x = \frac{c}{2} t + 1\}$$



Un champ de direction est un ensemble de petits segments de pente c centrés sur l'isocline c.

On peut résoudre explicitement. On est en présence d'une équation aux variables séparées:

$$x' t = 2(x-1)$$

$$\frac{x'}{x-1} = \frac{2}{t}$$

$$\ln|x-1| = 2\ln|t| + c$$

$$x = c t^2 + 1$$

On remarque sur cet exemple que sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ il existe des solutions définies partout ; la notion de solution définie sur $\mathbb{R}$ n'a pas de sens, bien que un raccord possible de différentiabilité $\mathcal{C}^1$ soit possible.

6. <u>Différentielles exactes</u> Il se peut que certaines équations s'écrivent sous la forme

$$x' = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$$

sur $I \times U$ tel que $Q \neq 0$. De manière symbolique on a

$$Q(t,x)\,dt - P(t,x)\,dx = 0$$

On cherche alors $f(t,x)$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -P$$

Ce n'est possible que si (en supposant f de classe $\mathcal{C}^2$)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial t}$$

Exemple :

$$0 = \left[t^3 + (t\sin(2t) + \sin^2 t)\,x^2\right] dt + 2t\sin^2(t)\,x\,dx$$

on a bien

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[t^3 + (t\sin 2t + \sin^2 t)\,x^2\right] = (t\sin 2t + \sin^2 t)\,2x$$

$$= \frac{-\partial}{\partial t}\left[2t\sin^2(t)\,x\right]$$

$$f(t,x) = \int_0^t Q(t',0)\,dt' - \int_0^x P(t,x')\,dx'$$
$$= \frac{1}{4}t^4 + t\sin^2(t)\,x^2$$
Les solutions de l'équation différentielle sont donc implicitement données par $f(t,x) = c$.

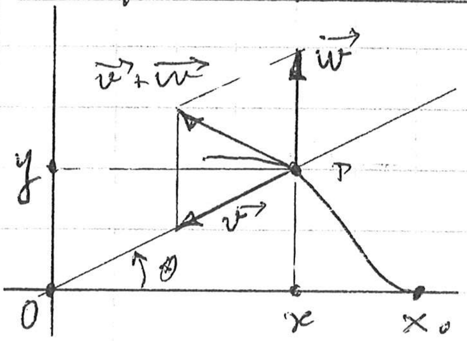
7. <u>Facteurs intégrants</u> On part d'une équation d'ordre 1 scalaire qu'on écrit sous la forme
$$Q(t,x)\,dt - P(t,x)\,dx = 0$$
En multipliant cette equation par une fonction $h(t,x)$ on cherche à trouver h tel que
$$hQ\,dt - hP\,dx = 0$$
soit une équation différentielle exacte, ou bien tel que
$$\frac{\partial}{\partial x}(hQ) = -\frac{\partial}{\partial t}(hP).$$
<u>cas où $h = h(t)$</u>
$$h(t)\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{dh}{dt}(t)P - h(t)\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -\frac{1}{P}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t}\right] ; = F(t,x)$$
Dans le cas particulier où $F(t,x) = F(t)$ ne dépend que de t
$$h(t) = \exp\left[-\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t}\right) dt\right]$$
<u>exemple</u>,
$$(e^t - \sin x)\,dt + \cos(x)\,dx = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h(e^t - \sin x)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[h(t)\cos x\right]$$
$$-h(t)\cos x = h'(t)\cos x.$$
$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -1$$
$$h(t) = \exp(-t)$$
$$\left\{\begin{array}{l}(1 - e^{-t}\sin x)\,dt + e^{-t}\cos(x)\,dx = 0 \\ \text{devient exacte}\end{array}\right.$$
$$f(t,x) = \int_0^t dt' + \int_0^x e^{-t}\cos(x')\,dx'$$
$$= t + e^{-t}\sin x$$
Les solutions sont données implicitement par
$$t + e^{-t}\sin x(t) = c$$

On peut traiter de la même manière

$$h = h(x) \quad , \quad h = h(tx) \quad , \quad h = h\left(\frac{t}{x}\right) \quad , \quad h = h\left(\frac{x}{t}\right)$$

8. <u>Exemple du problème de poursuite</u>



- Un bateau est propulsé à vitesse constante de cap constamment dirigé vers une cible fixe O
- le mouvement est plan, la cible est l'origine O.
- Un courant marin de vitesse constante w dévie le navire vers le nord.
- Initialement, le navire est à l'Est de la cible à atteindre

Les équations du système : θ = angle $\vec{OP}$, avec l'axe Ox

La vitesse réelle du navire est donnée par $\vec{v} + \vec{w}$ d'où

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v\cos\theta = \dfrac{-vx}{\sqrt{x^2+y^2}} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -v\sin\theta + w = \dfrac{-vy}{\sqrt{x^2+y^2}} + w \end{cases}$$

On cherche à déterminer l'équation de la trajectoire et donc à éliminer t. Si localement $y = y(x)$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{x}\left[y - \frac{w}{v}\sqrt{x^2+y^2}\right]$$

En posant $k = \dfrac{w}{v}$ on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = -\frac{k}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

En posant $u = \dfrac{y}{x}$, prenant les conditions initiales $(x_0, 0)$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -k\,\frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) = -k\ln\left|\frac{x}{x_0}\right|$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-k}$$

(tant que $x>0$)

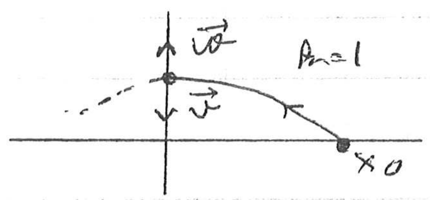
$$1+u^2 = \left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-k} - u\right)^2$$

$$2u\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-k} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2k} - 1$$

$$y = \frac{x_0}{2}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-k+1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{+k+1}\right]$$

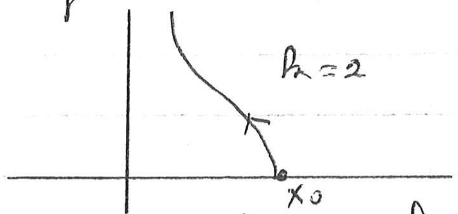
Analyse des résultats

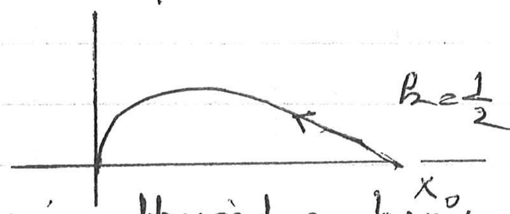
cas $w = v$: $k=1$ $\qquad y = \frac{x_0}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]$



Le navire n'atteind pas sa destination : lorsque $x=0$ les vitesses se compensent et le navire reste fixe

cas $w>v$: $k>1$, $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-k+1} \nearrow +\infty$, le navire se dirige vers le nord sans jamais pouvoir revenir vers 0.





cas $w<v$: $k<1$: le navire atteind en temps fini sa cible (la vitesse est tangente à l'axe Nord Sud en 0).

9. Equations linéaires scalaire d'ordre n

Théorème d'existence et d'unicité (Les preuves seront données ultérieurement) On considère l'équation

$$x^{(n)} = g(t) + \Sigma_{k=0}^{n-1} f_k(t)\, x^{(k)}$$

où $g, f_0, \dots, f_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle I. On appelle condition initiale $(t_0, x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)})$ où $t_0 \in I$ et $X_0 = (x_0 \dots x_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ sont donnés à l'avance. Alors

1) Pour toute condition initiale (t_0, X_0) ; il existe

une unique solution $x(t)$ de classe C^n définie sur I tout entier vérifiant $x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$

2) L'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) est un espace vectoriel de dimension n

3) Si $x_p(t)$ est une solution particulière de l'équation non homogène, alors toute autre solution est de la forme

$$\begin{cases} x(t) = x_p(t) + x_h(t) \\ x_h(t) = \text{solution quelconque de } (H) \end{cases}$$

Remarque 2) et 3) sont des conséquences simples de 1)

- Dans le cas (H), l'application, qui à une solution de H, $x(t)$ associe $(x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))$ de $\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme
- La différence de 2 solutions de (NH) est une solution de (H).
- La résolution explicite lorsque $g(t), f_0(t), \dots f_{n-1}(t)$ sont non constants est impossible en général. La suite de cette section traite du cas "des coefficients constants"

Equation linéaire d'ordre n à coefficients constants (H)

(*) $x(t) \in C^n(\mathbb{R})$ a priori $a_0 \dots a_{n-1} \in \mathbb{C}$

$$(*) \quad x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x \quad (I=\mathbb{R})$$

L'équation caractéristique : substituer $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^n - (a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$$

On note $\lambda_1 \dots \lambda_r$ les racines distinctes de multiplicité $m_1 \dots m_r$. Elles peuvent être complexes.

Si la multiplicité m de λ n'est pas simple

$$x_k(t) = t^k e^{\lambda t} \qquad k = 0, 1, \dots, m-1$$

sont encore des solutions : on en obtient m. En faisant varier λ, on obtient n solutions indépendantes

$$\begin{cases} e^{\lambda_i t} \quad t e^{\lambda_i t} \dots t^{m_i - 1} e^{\lambda_i t} \\ i = 1 \dots r \end{cases}$$

Si les coefficients sont complexes, la solution reste complexe. S'ils sont réels, et la condition initiale est réelle, la solution reste réelle en tout temps : comme λ et $\bar{\lambda}$ sont aussi racines (distinctes) on peut écrire la solution générale de (H) sous la forme

$$x_g(t) = \sum_{k=1}^{r} [P_k(t)\cos(\beta_k t) + Q_k(t)\sin(\beta_k t)]\, e^{\alpha_k t}$$

$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ de multiplicité m_k

$P_k(t), Q_k(t)$ polynômes de $d^\circ \leq m_k - 1$

(Si $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\beta_k = 0$, $Q_k = 0$ par convention et il reste uniquement $P_k(t)\, e^{\lambda_k t}$)

<u>Cas de l'équation non homogène</u>

Tout second membre de la même forme

$R(t)\, e^{\mu t}$ $(\mu \in \mathbb{R})$

$R(t)\cos(\delta t)\, e^{\gamma t}$ $(\mu = \gamma + i\delta)$

$R(t)\sin(\delta t)\, e^{\gamma t}$

admet une solution explicite par une méthode de coefficients indéterminés

- Si $\mu \notin \{\lambda_1 \dots \lambda_r\}$

  $x(t) = P(t)\, e^{\mu t}$ avec $d^\circ(P) = d^\circ(R)$
- Si $\mu \in \{\lambda_1 \dots \lambda_r\}$, $\mu = \lambda_i$ par exemple,

  $x(t) = t^{m_i}[P(t)\cos(\delta t) + Q(t)\sin(\delta t)]\, e^{\gamma t}$

  avec $d^\circ P = d^\circ Q = d^\circ R$

  On identifie les termes en $t^k\cos(\delta t)$, $t^k\sin(\delta t)$