III Equations linéaires

28. Notations : Soit I un intervalle et $A : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ $B : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues. On appelle equation différentielle linéaire

$$(NH) \qquad X' = A(t)X + B(t) \qquad \text{(non homogène)}$$

$$(H) \qquad X' = A(t)X \qquad \text{(homogène)}$$

(ici X et B sont vus comme des vecteurs colonnes).

Suite au corollaire 24, on a le résultat fondamental

29. Théorème En conservant les notations de 28.

1) Les solutions de (NH) ou (H) sont définies sur I tout entier

2) Les solutions de (H) forment un espace vectoriel de dimension n : si $t_0 \in I$ est fixé, l'application qui à $X_0 \in \mathbb{R}^n$ associe l'unique solution passant par (t_0, X_0) est une bijection linéaire

30. Définition On appelle solution fondamentale $\Phi(t, \tau)$ la bijection linéaire décrite en 2) du théorème 29, qui à $X \in \mathbb{R}^n$ associe la solution $t \mapsto \Phi(t, \tau)X$ de (H) passant par (τ, X). Si X est un vu comme vecteur colonne, alors $\Phi(t, \tau)$ est une matrice $M(n, \mathbb{R})$.

1) Par définition on a, pour $\tau \in I$ fixé

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \tau)X = A(t)\Phi(t, \tau)X \qquad \forall X$$

ou bien matriciellement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) \\ \Phi(\tau, \tau) = \mathrm{Id} \end{cases}$$

C'est à nouveau une équation différentielle dans $\mathbb{R}^{n^2}$.
Certains appellent la solution fondamentale, la résolvante.

2) Pour tout t, t', t''

$$\Phi(t,t'') = \Phi(t,t')\Phi(t',t'')$$

en particulier, on pourrait fixer t_0 et definir

$$R(t) = \Phi(t,t_0)$$

et on aurait $\Phi(t,\tau) = R(t)\,R(\tau)^{-1}$. ce qui permet de calculer $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$:

$$R(\tau)\,R(\tau)^{-1} = Id$$

$$\frac{dR}{d\tau}R^{-1} + R\frac{dR^{-1}}{d\tau} = 0$$

d'où

$$\frac{dR^{-1}}{d\tau} = -R^{-1}\frac{dR}{d\tau}R^{-1}$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{dR}{d\tau}R^{-1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

31. Méthode de la variation de la constante On considère ici l'équation (NH)

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

On cherche une solution "explicite" en admettant connaître la forme de $\Phi(t,\tau)$. On cherche une solution $X(t)$ sous la forme

$$X(t) = \Phi(t,t_0)\,C(t)$$

(ici C est vu comme constante d'intégration de l'équation H). En dérivant par rapport à t, on a

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,t_0)\,C + \Phi(t,t_0)\,C' \\ &= A(t)\,\Phi(t,t_0)\,C + \Phi(t,t_0)\,C' \\ &= A(t)\,X + \Phi(t,t_0)\,C' \end{aligned}$$

D'où en tenant compte de $X' = A(t)X + B(t)$

$$\begin{aligned} C' &= \Phi(t,t_0)^{-1}B(t) \\ &= \Phi(t_0,t)\,B(t) \end{aligned}$$

$$C(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,d\tau$$

Puis en insérant C dans $X = \Phi C$, on a

$$X(t) = \Phi(t,t_0)\,X_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,d\tau$$

32. **Théorème de Liouville** On sait que $\Phi(t,\tau)$ est toujours inversible, ou de manière équivalente $\det \Phi(t,\tau) \neq 0$, $\forall (t,\tau) \in I$. On a en fait une formule explicite :

$$\det \Phi(t,\tau) = \exp\left[\int_{\tau}^{t} \mathrm{trace}(A(s))\,ds\right]$$

33. **Cas des équations linéaires à coefficients constants**

Ici $A(t) = A$ est indépendant du temps. La solution fondamentale est donnée par

$$\Phi(t,\tau) = \exp((t-\tau)A)$$

(où $\exp M = \sum_{k \geq 0} \frac{M^k}{k!}$ pour toute matrice)

La solution de

$$\dot{X} = AX + B(t), \quad X(t_0) = X_0$$

est donc

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\, B(\tau)\,d\tau \quad *$$

* si de plus $B(t) = B$ est constant

** $X = e^{(t-t_0)A} X_0 + (e^{(t-t_0)A} - I_d)\,B A^{-1}$

Pratiquement, on réduit A sous une forme plus simple, $A = P^{-1}BP$ où P est inversible. On est alors ramené à résoudre les équations

$$Y = PX$$

$$Y' = PX' = PAX = BPX = BY.$$

34. **Preuve du théorème de Liouville**

Pour simplifier les notations on note $R(t) := \Phi(t,\tau)$ à τ fixé. Soit $(e_1^0 \dots e_n^0)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et

$$e_i(t) = R(t)\,e_i$$

les solutions de : $e_i' = A(t)\,e_i$, $e_i(\tau) = e_i^0$. Comme $R(t)$ est inversible, $(e_1(t) \dots e_n(t))$ est aussi une base de $\mathbb{R}^n$. On note

$$\varphi(t) = \det(\Phi(t,\tau)) = \det(e_1(t) \dots e_n(t)) \neq 0$$

On utilise maintenant que $\det(e_1 - e_n)$ est linéaire par rapport à chacun des ses vecteurs e_i : d'où

$$(*) \quad \varphi'(t) = \sum_j \det(e_1, \dots, e_j', \dots, e_n)$$
$$= \sum_j \det(e_1, \dots, A(t) e_j, \dots, e_n)$$

Comme $(e_1(t) - e_n(t))$ est une base, on décompose $A(t)$ dans celle-ci et on a :

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire, par convention,

$$A(t) e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t) e_i(t)$$

On utilise aussi que le déterminant s'annule dès que 2 vecteurs $e_i = e_j$ pour $i \neq j$. Par exemple

$$\det(A(t) e_1, e_2, \dots, e_n)$$
$$= \det(a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n, e_2, \dots, e_n)$$
$$= a_{11} \det(e_1 - e_n)$$

En reprenant $(*)$ on a

$$\varphi' = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) \varphi = \operatorname{trace}(A(t)) \varphi$$
$$\varphi(\tau) = \det(\Phi(\tau, \tau)) = \det(Id) = 1$$

D'où

$$\varphi(t) = \exp \int_\tau^t \operatorname{trace}(A(s))\, ds \qquad \blacksquare$$

Dans le cas où $A(t)$ dépend du temps, il n'y a pas de formule aussi simple que $\exp(t-\tau)A$, ni la généralisation $\exp\left(\int_\tau^t A(s)\, ds\right)$ qui n'est valable que si $A(s_1)$ et $A(s_2)$ commutent pour tout s_1, s_2. La proposition suivante donne cependant une formule similaire.

35. Proposition La solution fondamentale de $\dot{X} = A(t)X$ est

$$\Phi(t,\tau) = \sum_{n\geq 0} \int_{(\tau < s_n < \dots < s_2 < s_1 < t)} A(s_1)A(s_2)\dots A(s_n) \prod_{i=1}^{n} ds_i$$

Le terme général de la série est majoré par

$$\frac{(t-\tau)^n \, \|A\|^n}{n!}$$

(Le premier terme, pour $n=0$, est par convention égal à Id)

preuve on écrit la formule intégrée qu'on itère :

$$\begin{aligned}
X &= X_0 + \int_\tau^t A(s_1) X(s_1)\, ds_1 \\
&= X_0 + \int_\tau^t A(s_1)\left[X_0 + \int_\tau^{s_1} A(s_2) X(s_2)\, ds_2\right] \\
&= X_0 + \int_\tau^t A(s_1) X_0\, ds_1 \\
&\quad + \iint_{(\tau < s_2 < s_1 < t)} A(s_1) A(s_2) X(s_2)\, ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

Puis on remplace à nouveau $X(s_2)$ par sa formule intégrée. Le terme général est majoré par

$$\left\| \int_{(\tau < s_n < \dots < s_1 < t)} A(s_1) \dots A(s_n)\, ds_1 \dots ds_n \right\|$$

$$\leq \|A\|^n \int_{(\tau < s_n \dots < s_1 < t)} ds_1 \dots ds_n$$

$$= \|A\|^n \frac{(t-\tau)^n}{n!}.$$

On remarque ainsi que si $A_\mu(t)$ dépend de manière C^k de μ alors $X_\mu(t)$ dépend aussi de manière C^k.

36. Remarque (Théorème de Liouville pour des équations d'ordre n). On considère le système

$$(H) \begin{cases} x^{(n)} - [a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x] = 0 \\ x(\tau) = x_0 \quad x'(\tau) = x_0' \quad \dots \quad x^{(n-1)}(\tau) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

équivalent à une EDO dans $\mathbb{R}^n$

$$\dot{X} = A(t)X \qquad \text{avec } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

et comme condition initiale

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \vdots \\ x_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(X_1 — X_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ $\quad X_j = \begin{bmatrix} x_j \\ x'_j \\ \vdots \\ x_j^{(n-1)} \end{bmatrix}$
$(X_1(t) — X_n(t))$ les solutions de $\dot{X} = A(t) X$, on appelle Wronskien

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & & x'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Alors comme trace $(A(t)) = a_{n-1}(t)$, on a

$$W(t) = \exp\left(\int_\tau^t a_{n-1}(s)\, ds\right).$$

37. <u>Diagramme de phases* en dimension 2.</u> On considère le système linéaire autonome

* on dit aussi portrait de phases

$$\dot{X} = AX, \quad X \in \mathbb{R}^2 \quad A \in M(2, \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

On cherche à résoudre en conjuguant A à une matrice plus simple, par exemple diagonale. On écrit le polynôme caractéristique

$$\begin{cases} \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0. \\ \lambda = \dfrac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{\mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2} \end{cases}$$

<u>cas $\mathrm{tr}(A)^2 > 4\det(A)$</u> : 2 valeurs propres réelles différentes, $\lambda_1 < \lambda_2$ de vecteurs propres X_1, X_2 en colonne. On note P la matrice des deux vecteurs. On note aussi E_1, E_2 les deux vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$PE_i = X_i$$

$$APE_i = \lambda_i X_i = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} E_i = PBE_i$$

D'où $\quad AP = PB \qquad P^{-1}AP = B$

En changeant de variable ; $Y = P^{-1}X$ on a.

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = BP^{-1}X = BY$$

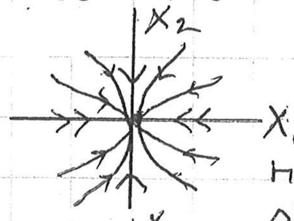
En gardant les même lettre

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y. \end{cases}$$

En terme de trajectoire $(t_0 = 0)$, on cherche à éliminer le temps :

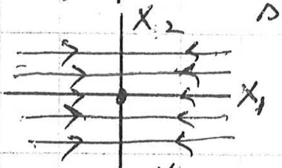
— $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$y = c\, x^{\lambda_2/\lambda_1} \qquad \left(0 < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1\right)$



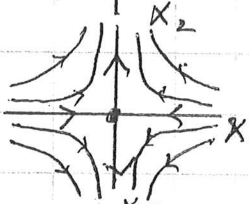
— $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$

$y = c \qquad x = x_0\, e^{\lambda_1 t}$



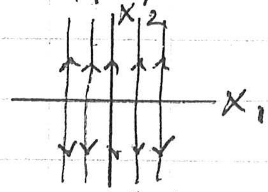
— $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$y = c\; x^{\lambda_2/\lambda_1}$



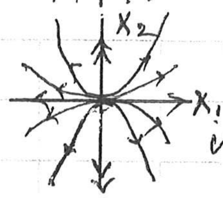
— $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$

$x = c \quad , y = y_0\, e^{\lambda_2 t}$



— $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$y = c\, x^{\lambda_2/\lambda_1} \qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$



cas $tr(A)^2 < 4\det(A)$; 2 valeurs propres distinctes complexes conjuguées : $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, $\beta > 0$.

On note X et $\bar{X}$ les deux vecteurs propres conjugués

$$AX = \lambda X$$
$$A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

On note $X_R = \frac{X + \bar{X}}{2} \qquad X_I = \frac{X - \bar{X}}{2i}$, alors

$$\begin{cases} AX_R = \dfrac{\lambda X + \bar{\lambda}\bar{X}}{2} = \alpha X_R - \beta X_I \\ AX_I = \dfrac{\lambda X - \bar{\lambda}\bar{X}}{2i} = \alpha X_I + \beta X_R . \end{cases}$$

On note P la matrice des vecteurs colonnes $[X_R, X_I]$:
(on note E_i les vecteurs colonnes canoniques)

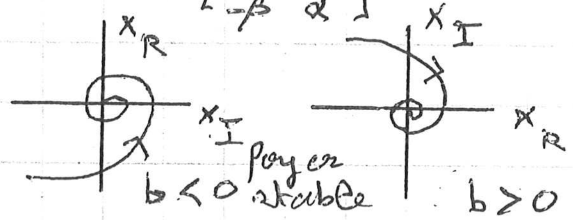
$$APE_1 = AX_R = P\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} E_1$$

$$APE_2 = AX_I = P\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} E_2$$

D'où la conjugaison.

$$AP = PB \qquad \text{avec } B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

— $\alpha < 0$



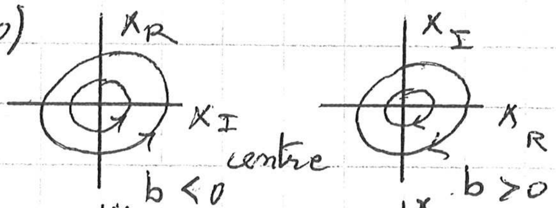
$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

par changement de variable $u = e^{-\alpha t} x$, $v = e^{-\alpha t} y$

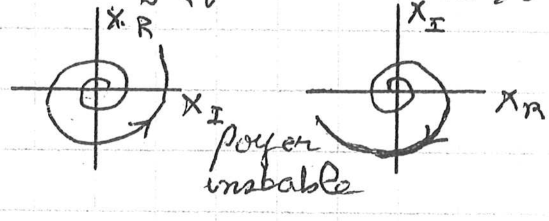
$$\begin{cases} u' = \beta v \\ v' = -\beta u \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \rho \cos(-\beta t + \varphi) \\ v = \rho \sin(-\beta t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\, e^{\alpha t} \cos(-\beta t + \varphi) \\ y = \rho\, e^{\alpha t} \quad \beta t + \varphi) \end{cases}$$

— $\alpha = 0$



— $\alpha > 0$



$$\begin{cases} x = \rho\, e^{\alpha t} \cos(-\beta t + \varphi) \\ y = \rho\, e^{\alpha t} \sin(-\beta t + \varphi) \end{cases}$$

Les 3 dessins précédents tiennent compte de l'orientation de la base (X_R, X_I) qui est directe lorsque $b > 0$ et indirecte lorsque $b < 0$ (on a fait l'hypothèse $\beta > 0$).
En effet

$$[X_R, X_I] = [X, \bar{X}] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{bmatrix}$$

$$\det(X_R, X_I) = -\frac{1}{2i} \det(X, \bar{X})$$

notons $X = \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}$ (aucune de ses composantes ne peut être nulle)
alors $\det(X, \bar{X}) = (\bar{z} - z)$ d'où $\det(X_R, X_I) = \mathrm{Im}(z)$.
Comme $\begin{cases} a + bz = \lambda \\ c + dz = \lambda z \end{cases}$ on a $\mathrm{Im}(z) = \frac{}{b}$ (et $b \neq 0$)
On vient de montrer que $\det(X_R, X_I) = \frac{\beta}{b}$.

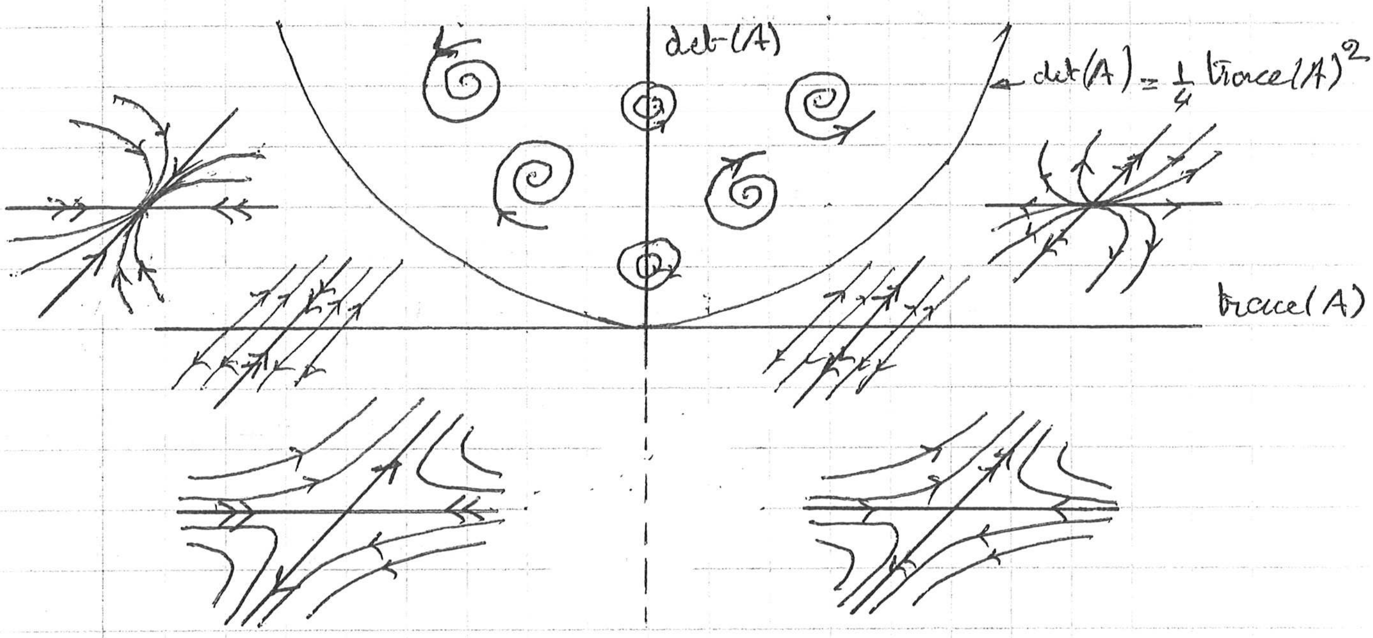


diagramme de phase : cas non dégénéré

cas $\mathrm{tr}(A)^2 = 4\det(A)$ cas dégénéré : une seule valeur propre λ de multiplicité 2. Soit X_2 choisi tel que $X_1 := (A - \lambda \mathrm{Id}) X_2 \neq 0$. Alors $(A - \lambda \mathrm{Id}) X_1 = 0$ car d'après Cayley-Hamilton $(A - \lambda \mathrm{Id})^2 = 0$. On note P la matrice formée des 2 vecteurs colonnes $[X_1, X_2]$. On a

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ AX_2 = X_1 + \lambda X_2 \end{cases}$$

(en particulier X_1 n'est pas proportionnel à X_2). P est inversible.
On fait le changement de coordonnée $Y = P^{-1}X$:

$$\begin{cases} APE_1 = AX_1 = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} E_1 \\ APE_2 = AX_2 = P \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} E_2 \end{cases}$$

D'où la matrice de A dans la nouvelle base (X_1, X_2)

$$P^{-1}AP = B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Le nouveau système d'équation (en gardant (x,y) comme variables) :

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y. \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

d'où $y = y_0 \exp(\lambda t)$ et

$$x' = \lambda x + y_0 \exp(\lambda t) \qquad \text{(avec second membre)}$$

$$x = x_0 \exp(\lambda t) + y_0\, t \exp(\lambda t)$$

Remarque : on aurait p utiliser la formule exp.

$$\exp(tB) = \sum_{n\geq 0} \left(\lambda t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n / n!$$

$$= Id + \sum_{n\geq 1} \left[(\lambda t)^n Id + n(\lambda t)^{n-1} t N\right] / n!$$

$$= Id + \sum_{n\geq 1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} Id + \sum_{n\geq 1} \frac{n(\lambda t)^{n-1}}{n!} t N$$

$$= (Id + tN) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche à éliminer t.

$$\frac{y}{y_0} = \exp(\lambda t)$$

$$\frac{x}{x_0} = \exp(\lambda t) \left[1 + \frac{t\, y_0}{x_0}\right]$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}\left[1 + \frac{y_0}{\lambda x_0}\left(\frac{y}{y_0}\right) \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]$$

En changeant de notation, $u = \frac{x}{x_0}$ $\quad v = \frac{y}{y_0}$ $\quad c = \frac{y_0}{\lambda x_0}$

$$u = v\,[1 + c\, v \ln v]$$