Département Licence

Année 2005–2006 — 14 Juin 2006
SVTE — SVT101
Mathématiques — 8h30–10h00

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée est considérée comme fausse. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

1. Rappeler la formule de la dérivée composée de $\dfrac{d}{dx}\sqrt{u(x)}$.
2. Trouver une primitive de $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$.
3. Trouver la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + 5y' + 6y = t^2 + 3$$

où $y(t)$ est une fonction inconnue de la variable t.

1. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.
2. Trouver la solution générale de l'équation en y.

Exercice 3. On dispose de quatre jetons A, B, C et D. Les deux faces des jetons A et B sont de même couleur rouge. Les deux faces du jeton C sont de même couleur verte. Les faces du jeton D sont de couleurs rouge et verte. On lance au hasard un des quatre jetons en l'air ; lorsqu'il retombe, sa face visible est de couleur rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit aussi de couleur rouge ?

Exercice 4. Un groupe de 10 souris est composé de 4 souris grises et de 6 souris blanches. On choisit au hasard dans ce groupe un échantillon (avec remise dans le groupe) de 4 souris et on appelle X le nombre de souris blanches dans cet échantillon.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5. (Bonus) Un négociant en vin de Bordeaux prévoit de faire exactement $N = 75$ voyages Bordeaux-Paris dans l'année ; mais pour des raisons indépendantes de sa volonté, il sait d'avance qu'un voyage pourra être annulé ou maintenu. La probabilité qu'un voyage soit maintenu est de $p = 15\%$. Le coût d'un voyage Bordeaux-Paris plein tarif est de $A = 120$ euros et le coût d'un abonnement annuel de réduction de 50% est de $B = 420$ euros. On appellera par la suite X, la variable aléatoire égale au nombre de voyages maintenus sur les N prévus initialement.

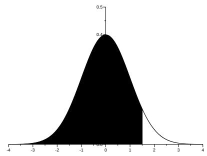
1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, son écart-type σ.
2. On notera CA le coût annuel des trajets Bordeaux-Paris sans abonnement de réduction et CB le coût annuel avec abonnement de réduction. Ecrire CA et CB en fonction des données du problème A, B, N et de la variable aléatoire X. Déterminer les coûts moyen de CA et CB.
3. Déterminer la probabilité que CB dépasse CA.

Barème : exo1=**50**, exo2=**50**, exo3=**50**, exo4=**50**, exo5=**50**

Table de la loi normale

Table de la fonction de répartition

$$p = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2\Big)\, dt$$



Par exemple : si $x = 1.5 + 0.04$ alors $p = 0.9382$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Cas des grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
p	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892
1-p	0.001350	0.000968	0.000687	0.000483	0.000337	0.000233	0.000159	0.000108

x	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
p	0.999928	0.999952	0.999968	0.999979	0.999987	0.999991	0.999995	0.999997
1-p	0.000072	0.000048	0.000032	0.000021	0.000013	0.000009	0.000005	0.000003

Table de la loi normale : suite

Graphe de la densité $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\dfrac{1}{2}t^2\big)$.

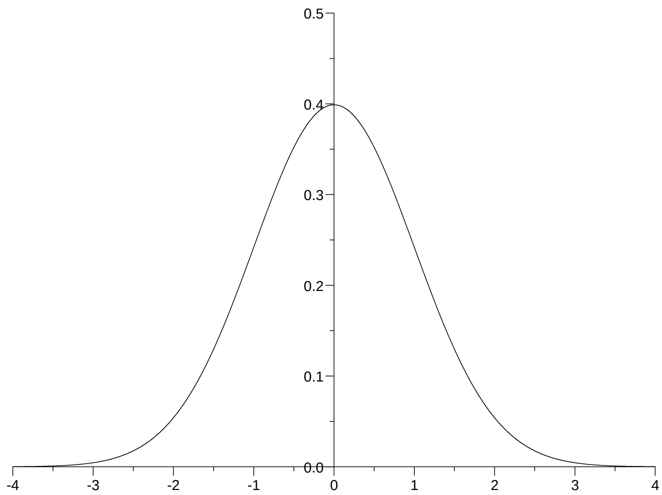


Table de dépassement de l'écart absolu : $\mathbb{P}(|X| > z_\alpha) = \alpha$

Par exemple : si $\alpha = 0.1 + 0.03$ alors $z_\alpha = 1.514$.

Cas des grandes valeurs de α :

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

Cas des petites valeurs de α :

α	0.010	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001	0.00005	0.00002	0.00001
x	2.576	2.807	3.090	3.291	3.481	3.719	3.891	4.056	4.265	4.417