Corrigé de l'examen de janvier 2007

Exercice 1. Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

1. L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ donne une racine double $r = 2$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$$

   où A et B sont des constantes quelconques.

2. Le second membre $f(x) = xe^x$ s'écrit sous la forme $P(x)e^{kx}$ avec $k = 1$ et $P(x) = x$ un polynôme. Comme $k \neq 2$, on peut choisir une solution particulière $y(x)$ de la forme $y(x) = (a + bx)e^x$. En substituant dans l'équation, on obtient

$$y'' - 4y' + 4y = (a - 2b)e^x + bxe^x = xe^x.$$

   Nécessairement $a - 2b = 0$ et $b = 1$, d'où $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale de l'équation (E) est donc

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + (2 + x)e^x.$$

3. On suppose en plus que la solution générale trouvée en (2) vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On trouve d'abord $y'(x) = 2Ae^{2x} + B(1 + 2x)e^{2x} + (x + 3)e^x$. Il reste donc à trouver A et B de sorte que $A + 2 = 0$ et $2A + B + 3 = 1$. On obtient $A = -2$ et $B = 2$. D'où l'existence d'une unique solution

$$y(x) = -2e^{2x} + 2xe^{2x} + (x + 2)e^x.$$

Exercice 2.

1. On constate d'abord que la densité est bien une fonction positive ou nulle. Il reste à ajuster k pour qu'elle devienne normalisée : $\int f(x)\, dx = 1$. On trouve, en intégrant par partie

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \Big[- xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - 2e^{-1}.$$

   D'où $k = 1/(1 - 2e^{-1})$.

2. L'espérance d'une fonction d'une v.a. est $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 xf(x)\,dx$. On trouve alors (en intégrant une fois par partie et en ré-utilisant le calcul précédent)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \Big[-x^2 e^{-x} \Big]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x} dx \\
&= -e^{-1} + 2(1-2e^{-1}) = 2 - 5e^{-1}, \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{2-5e^{-1}}{1-2e^{-1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. De manière très simpliste, un puit de forage st caractérisé par deux atributs : sa rentabilité $(NON, PEU, TRES)$ et la nature géologique du sol (A, B, C). Un événement élémentaire est donc n'importe quelle combinaison (NON, A), (NON, B), (NON, C), (PEU, A), (PEU,B), …. Les probabilités de chaque événement peuvent être décrites par un arbre :

$$\begin{array}{lcl}
 & \nearrow & \mathbb{P}(A \mid NON) = 75\% \\
\mathbb{P}(NON) = 60\% & \longrightarrow & \mathbb{P}(B \mid NON) = 15\% \\
 & \searrow & \mathbb{P}(C \mid NON) = 10\%
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \nearrow & \mathbb{P}(A \mid PEU) = 25\% \\
\mathbb{P}(PEU) = 30\% & \longrightarrow & \mathbb{P}(B \mid PEU) = 50\% \\
 & \searrow & \mathbb{P}(C \mid PEU) = 25\%
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \nearrow & \mathbb{P}(A \mid TRES) = 10\% \\
\mathbb{P}(TRES) = 10\% & \longrightarrow & \mathbb{P}(B \mid TRES) = 25\% \\
 & \searrow & \mathbb{P}(C \mid TRES) = 65\%
\end{array}$$

1. La probabilité d'obtenir à la fois un forage non rentable et un sol A est donc égale à

$$\mathbb{P}(NON, A) = \mathbb{P}(NON)\mathbb{P}(A \mid NON) = 60\% \times 75\% = 45\%.$$

2. La probabilité d'obtenir un sol A est égale à

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(NON, A) + \mathbb{P}(PEU, A) + \mathbb{P}(TRES, A) \\
&= 45\% + 7.5\% + 1\% = 53.5\%.
\end{aligned}$$

3. La probabilité d'obtenir un forage non rentable lorsqu'on sait qu'on obtientra un sol A est égale à

$$\mathbb{P}(NON \mid A) = \frac{\mathbb{P}(NON, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{45\%}{53.5\%} \simeq 85\%.$$

Exercice 3.

1. Dans cette partie $n = 7$.
   (a) La variable X suit une loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = 8/10$. La loi de X est donc donnée par
   $$\mathbb{P}(X = k) = \binom{7}{k}\Big(\frac{8}{10}\Big)^k\Big(\frac{2}{10}\Big)^{7-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, 7.$$
   (b) L'espérance et l'écart-type sont donnée par
   $$\mathbb{E}(X) = np = 5.6, \quad \sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = 1.058$$
   (c) La probabilité que la fournisseur réponde au moins un fois est
   $$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(x = 0) = 1 - \Big(\frac{2}{10}\Big)^7 \simeq 1.$$
2. Dans cette partie $n = 100$.
   (a) La loi de X est encore binomiale mais de paramètre $n = 100$ et $p = 8/10$. Elle peut être approchée par la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$.
   (b) Les paramètres de la loi normale sont données par
   $$\mu = np = 80, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 4.$$
   (c) La probabilité que le fournisseur réponde entre 75 et 85 fois est
   $$\mathbb{P}(75 < X < 85) = \mathbb{P}\Big(-\frac{5}{4} < \frac{X - 80}{4} < \frac{5}{4}\Big) \simeq \mathbb{P}\Big(-\frac{5}{4} < N < \frac{5}{4}\Big)$$
   $$\mathbb{P}(75 < X < 85) = 1 - \mathbb{P}(|N| > 5/4)$$
   où N désigne une loi normale centrée réduite. Comme $\mathbb{P}(|N| > c) = 2\mathbb{P}(N > c) = 2(1 - \mathbb{P}(N < c))$, avec $c = 5/4$, on trouve
   $$\mathbb{P}(75 < X < 85) \simeq 79\%.$$
   (d) On raisonne diféremment maintenant. On se fixe à l'avance un taux de réussite 98% et on se propose de trouver le nombre de fois au minimum que le fournisseur réponde avec ce taux de réussite. Pour simplifier, on propose un calcul plus symétrique et on cherche r tel que $\mathbb{P}(r < X < 160 - r) = 98\%$ ou bien de manière équivalente r tel que
   $$\mathbb{P}\Big(\frac{r - 80}{4} < \frac{X - 80}{4} < \frac{80 - r}{4}\Big) = 98\%.$$
   En approchant X par la loi normale, r est solution de l'équation
   $$\mathbb{P}\Big(|N| > \frac{80 - r}{4}\Big) = 2\%, \quad r = 80 - 4 * 2.326 = 70.$$
   On obtient ainsi $\mathbb{P}(70 < X < 90) > 98\%$.