

Corrigé du devoir surveillé de Mars 2006

Exercice 1. On applique la méthode du pivot. En prenant la variable x de la première ligne comme pivot, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & - & z = -2 & L_1 \rightarrow L_1 \\ & 2y & + 2z = 2 & L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ & y & + z = m + 4 & L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$$

puis en prenant la variable y de la deuxième ligne, après avoir simplifié par 2 la deuxième ligne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & - & z = -2 & L_1 \rightarrow L_1 \\ & y & + z = 1 & L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ & & 0 = m + 3 & L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \right.$$

Ou bien $m + 3 = 0$, $m = -3$, le système est équivalent à $x - z = -2$ et $y + z = 2$. En prenant z comme variable libre, on obtient comme ensemble de solutions $\mathcal{S} = \{(-2 + z, 1 - z, z) \mid z \text{ quelconque}\}$. \mathcal{S} est appelé droite affine.

Exercice 2.

1.

$$MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & m & 1 - m \end{bmatrix}.$$

2. $MN = \text{Id}$ si et seulement si $m = 0$ et l'inverse de M est alors $M^{-1} = N$.

3. On suppose que $m = 1$. Si M était inversible d'inverse N donné par

$$N = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

on obtiendrait en calculant du produit des deux matrices, une matrice de la forme

$$MN = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $*$ désigne quel scalaire. Une telle matrice ne peut jamais être égale à la matrice identité : M n'est donc pas inversible.

4. On suppose que $m = 2$. On obtient alors

$$A = MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Inverser A revient à résoudre 3 systèmes linéaires

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\iff &\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0 \\ 4x + 2y - z &= 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\iff &\begin{cases} x' &= 0 \\ y' &= 1 \\ 4x' + 2y' - z' &= 0 \end{cases} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\iff &\begin{cases} x'' &= 0 \\ y'' &= 0 \\ 4x'' + 2y'' - z'' &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \\ z' = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ z'' = -1 \end{cases}$$

En appelant

$$B = \begin{bmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

on constate que $AB = \text{Id}$ donc que B est l'inverse de A . Il se trouve que $B = A$ ici, mais c'est une simple coïncidence. En revenant aux matrices M et N , on vient de montrer que $(MN)B = M(NB) = \text{Id}$ et donc que NB est l'inverse de M . Le calcul donne

$$M^{-1} = NB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3.

1. L'histogramme des hauteurs doit tenir compte du fait que l'amplitude de chaque classe n'est pas constante.

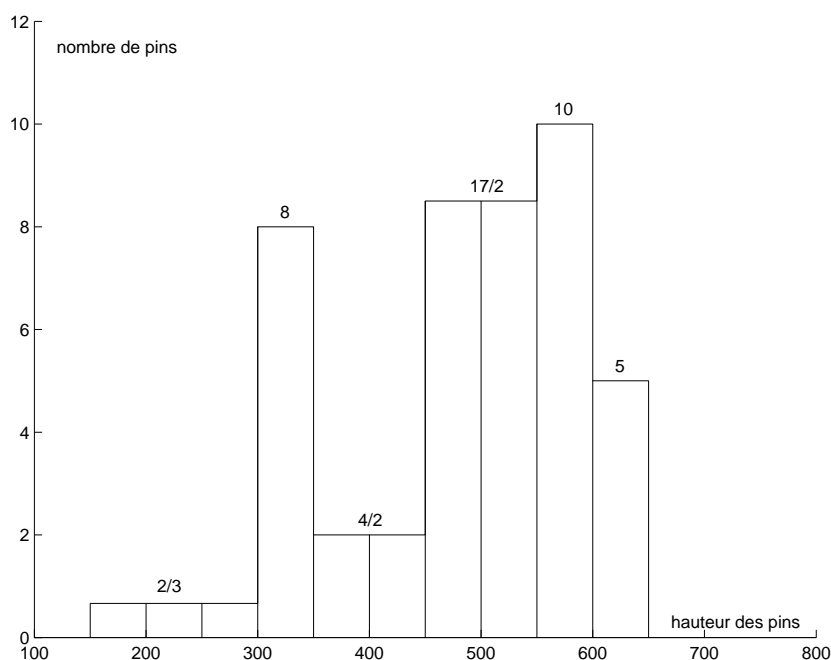


FIG. 1 – Histogramme des hauteurs

2. Le milieu d'une classe et la probabilité de trouver une hauteur de pin dans une classe donnée sont réunis dans le tableau suivant

hauteur	225	325	400	500	575	625
probabilité	2/46	8/46	4/46	17/46	10/46	5/46

D'où une hauteur moyenne

$$\bar{h} = \frac{2}{46}225 + \frac{8}{46}325 + \dots = 479 \text{ cm}$$

3. Il n'est pas nécessaire dans ce diagramme de tenir compte de la variation des amplitudes des classes. On obtient alors la figure ??.
4. La hauteur médiane est située dans la classe [450, 550] et est solution de l'équation

$$\frac{h_{50\%} - 450}{550 - 450} = \frac{(50\%)46 - 14}{31 - 14} \implies h_{50\%} = 503.$$

Les autres quantiles se calculent de la même manière : $h_{25\%}$ appartient à la classe [350, 450] et $h_{75\%}$ appartient à [550, 600]. On obtient

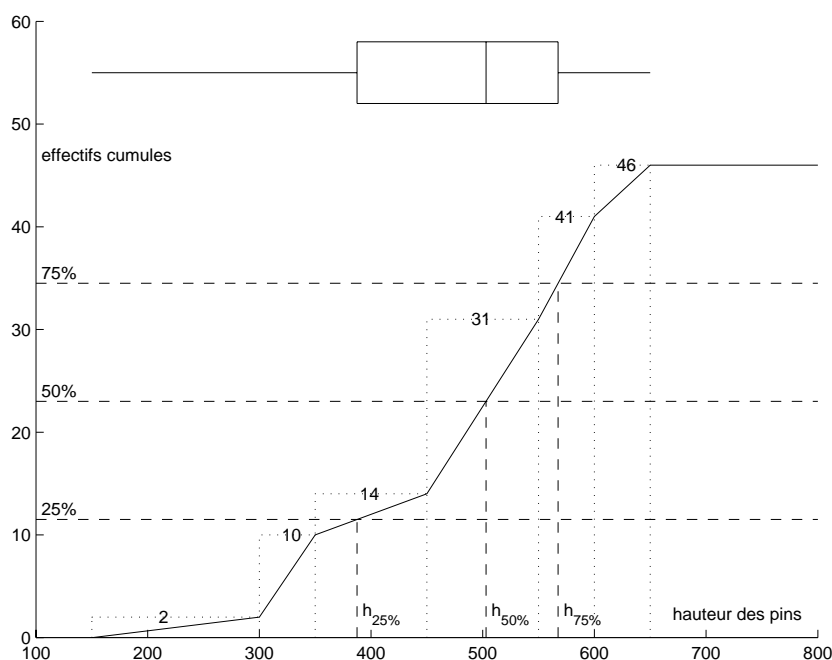


FIG. 2 – Courbes des hauteurs cumulées

$$\begin{aligned} \frac{h_{25\%} - 350}{450 - 350} &= \frac{(25\%)46 - 10}{14 - 10} &\implies h_{25\%} &= 387, \\ \frac{h_{75\%} - 550}{600 - 550} &= \frac{(75\%)46 - 31}{41 - 31} &\implies h_{75\%} &= 567. \end{aligned}$$

Le boxplot de cette distribution est donné par la figure ??.

Exercice 4. On admet que le nombre de fraises dans une cagette est une variable aléatoire X de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 125$ et $\sigma = 30$. On notera Z une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. La probabilité d'obtenir au moins 100 fraises est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 100) &= \mathbb{P}\left(\frac{X - 125}{30} \geq \frac{100 - 125}{30}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z \geq -\frac{25}{30}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{25}{30}\right) = 0.7967 \simeq 80\%. \end{aligned}$$

2. Soit N le nombre minimal que peut garantir l'agriculteur. Par définition de N , la probabilité d'avoir au moins N fraises est de 90%. De manière équivalente, la probabilité d'avoir moins de N fraises est de 10%.

$$\begin{aligned}
90\% &= \mathbb{P}(X \geq N) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 125}{30} \geq \frac{N - 125}{30}\right) \\
90\% &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{N - 125}{30}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{125 - N}{30}\right) \\
10\% &= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{125 - N}{30}\right) \\
20\% &= \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{125 - N}{30}\right)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité de ce calcul, on constate que N est nécessairement inférieur à 125. On peut alors inverser le signe de $(N - 125)/30$ en utilisant que Z et $-Z$ ont même loi.

La deuxième table de la loi normale donne $\mathbb{P}(|Z| \geq 1.282) = 20\%$. On trouve alors $N = 125 - 30 * 1.282 = 86.5 \geq 86$. L'agriculteur ne peut garantir que 86 fraises par cagette à une erreur près de 10%.