Corrigé du devoir surveillé de novembre 2003

Exercice 1.

(a) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

(b) Si u et v sont des fonctions continues dérivables sur l'intervalle I, alors

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x\sin(7x)\,dx &= -\frac{1}{7}x\cos(7x) + \frac{1}{7}\int \cos(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{7}x\cos(x) + \frac{1}{49}\sin(7x) + c\end{aligned}$$

où c est une constante arbitraire.

Exercice 2.

(a) L'équation homogène associée à (E) s'écrit :

$$(E_0) \qquad y' + 2y = 0.$$

L'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble des fonctions de la forme $y(x) = \lambda e^{-2x}$ où λ est une constante quelconque.

(b) Nous cherchons une solution particuli'ere de (E) sous la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels arbitraires. En exprimant que cette relation est solution de (E), on aboutit à la relation

$$2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c) = 2x^2$$

qui est équivalente à

$$\begin{cases} 2a & & & = 2 \\ 2a & +2b & & = 0 \\ & b & +2c & = 0 \end{cases}$$

d'où $a = 1$, $= -1$ et $c = \frac{1}{2}$. Une solution particulière de (E) est donc :

$$y(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

(c) La solution générale de (E), somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0), s'écrit :

$$y(x) = x^2 - x + \frac{1}{2} + \lambda e^{-2x}.$$

Il vient $y(0) = \frac{1}{2} + \lambda = 1$, et donc $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ecercice 3.

(a) L'équation homogène associée à (E) s'écrit :

$$(E_0) \qquad y'' + y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique est donc égale à $r^2 + r - 2 = 0$. Elle a pour solution $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donné par

$$y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^x.$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires.

(b) Nous allons chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = axe^x$ où a est un réel à détermienr. En remplaçant cette fonction y dans l'équation (E), on aboutit à $3ae^x = 18e^x$, soit $a = 6$. On obtient comme solution particulière

$$y(x) = 6xe^x.$$

(c) La solution générale de (E) est somme de la solution particulière de (E) précédente et de la solution générale de (E_0) de la question (a) :

$$y(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^x + 6xe^x$$

λ et μ des réels quelconques.

Exercice 4.

(a) Ω est l'ensemble des arrangements avec répétition de 3 réels pris dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Son cardinal est égal à $6^3 = 216$.

(b) Il y a 6 brelans possibles d'où $\mathbb{P}(\text{brelan}) = 1/36$.

(c) Une paire est une issue de la forme AAX, AXA, XAA, en désignant par A, X deux éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ces trois famille de paires ont même cardinal. Il y a $6 \times 5 = 30$ choix pour le couple (A, X), il y a donc $3 \times 30 = 90$ paires dans Ω. D'où $\mathbb{P}(\text{paire}) = 90/216 = 5/12$.

(d) L'événement "trois faces distinctes" est le complémentaire de "un brelan ou une paire". D'où

$$\mathbb{P}(\text{trois faces distinctes}) = 1 - \mathbb{P}(\text{un brelan}) - \mathbb{P}(\text{une paire}) = \frac{5}{9}.$$