

**Analyse 1 - MISMI, UE M1MI2011, Annales
2011-2015**

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,
FRANCE
E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

RÉSUMÉ. On trouvera dans ce polycopié les annales du cours d'Analyse 1 (UE M1MI2011) depuis 2011 : les corrigés des deux devoirs surveillés 2011-2012 (en annexes respectivement A et B), 2012-2013 (en annexes respectivement C et D), 2013-2014 (en annexes respectivement E et F), 2014-2015 (en annexes G et H). Le texte du DST 2012-2013 figure en Annexe L, celui du DST 2013-2014 en Annexe M, celui enfin de 2014-2015 en annexe N. En toute fin de ce polycopié, après la bibliographie, vous trouverez aussi (au titre d'annale) le texte et le corrigé (merci à Philippe Charpentier) du DST 2011-2012. Figurent aussi en annexes I,J,K les trois textes de DM de l'année 2014-2015 avec leurs corrigés (merci à Clément Dubuisson). Les exercices des DM des années précédentes ont été incorporés dans la liste des exercices (fascicule II).

Table des matières

Annexe A.	Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 1, 1h30	1
Annexe B.	Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 2, 1h30	9
Annexe C.	Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 1, 1h30	15
Annexe D.	Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 2, 1h30	19
Annexe E.	Annales 2013-2014, texte et corrigé du DS 1, 1h30	25
Annexe F.	Annales 2013-2014, texte du DS 2, 1h30	31
Annexe G.	Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS1, 1h30	33
Annexe H.	Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS2, 1h30	37
Annexe I.	Annales 2014-2015, texte du DM1 et corrigé	41
Annexe J.	Annales 2014-2015, texte du DM2 et corrigé	47
Annexe K.	Annales 2014-2015, texte du DM3 et corrigé	55
Annexe L.	Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00	65
Annexe M.	Annales 2013-2014, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00	73
Annexe N.	Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00	85
Bibliographie		93

ANNEXE A

Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 1, 1h30

Exercice I.

Soit a un nombre réel. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n a^k$ de la suite géométrique de raison a .

On rappelle l'identité remarquable

$$1 - X^{n+1} = (1 - X)(1 + X + \dots + X^n).$$

En spécifiant $X = a$, on a

$$1 - a^{n+1} = (1 - a)(1 + a + \dots + a^n) = (1 - a) \times \sum_{k=0}^n a^k.$$

Si $a \neq 1$, on a donc, en divisant par $1 - a \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1.$$

- (1) En déduire le calcul de la somme $\sum_{k=n}^m a^k$ pour $m \geq n$.

Si $m \geq n$, on a, en mettant a^n en facteur dans la somme,

$$\sum_{k=n}^m a^k = a^n \sum_{k=0}^{m-n} a^k.$$

En utilisant le résultat établi à la question précédente, on a donc

$$\sum_{k=n}^m a^k = \begin{cases} a^n \times \left(\frac{1 - a^{m-n+1}}{1 - a} \right) = \frac{a^n - a^{m+1}}{1 - a} & \text{si } a \neq 1 \\ m - n + 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

- (2) (*Question de cours*) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *de Cauchy* si et seulement si elle obéit au *critère de Cauchy* :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m > n \geq N(\epsilon), |u_m - u_n| < \epsilon.$$

- (3) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3+e^{-k})^k}$ est une suite de Cauchy.

Pour $m > n$, on a, puisque $e^{-k} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_m - u_n &= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(3 + e^{-k})^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^m (1/3)^k \\ &= (1/3)^{n+1} \times \frac{1 - (1/3)^{m-n}}{1 - 1/3} \\ &= \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} \times (1 - (1/3)^{m-n}) \\ &\leq \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} = \frac{1}{2} \times (1/3)^n. \end{aligned}$$

Ceci résulte du résultat établi au **(2)**, que l'on utilise ici en prenant $a = 1/3$, en conservant m , et en remplaçant n par $n + 1$. Il a fallu utiliser aussi (pour établir la dernière inégalité) le fait que $0 \leq (1/3)^{n-m} \leq 1/3$ (puisque $m - n \in \mathbb{N}^*$), donc que $1 - (1/3)^{n-m} \leq 1$.

Pour rendre $|u_m - u_n| = u_m - u_n < \epsilon$ lorsque $m > n$, il suffit donc de faire en sorte que $(1/3)^n < 2\epsilon$. Si l'on prend

$$m > n \geq N(\epsilon)$$

avec $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$N(\epsilon) > \frac{\ln(1/(2\epsilon))}{\ln 3},$$

on aura bien, pour $m > n \geq N(\epsilon)$,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2} 3^{-n} < \frac{1}{2} \times (2\epsilon) = \epsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy.

Exercice II

(1) (*Question de cours*)

Donner la définition de $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ($\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$) d'une suite $(u_n)_n$ de nombres réels.

Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels majorée, on appelle $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la limite de la suite décroissante minorée :

$$\left(\sup_{k \geq n} u_k \right)_n.$$

C'est aussi la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi minorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée, on convient que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels minorée, on appelle $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ la limite de la suite croissante majorée :

$$\left(\inf_{k \geq n} u_k \right)_n.$$

C'est aussi la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi majorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas minorée, on convient que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- (2) Soit $u_n = \sin \frac{n\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right)$, $n \geq 1$. Déterminer $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Comme $|\sin(1/n)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right) = 0,$$

et, par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Comme $|\sin(n\pi/4)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est le produit d'une suite bornée par une suite convergente (vers 1); la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite bornée en valeur absolue, admettant donc une limite supérieure et une limite inférieure, toutes deux dans \mathbb{R} (cf. la question de cours **(1)** ci-dessus). Si $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et convergeant vers un nombre réel l , on a nécessairement $l \in [-1, 1]$ (car cette suite extraite se présente comme le produit d'une suite bornée en valeur absolue par 1, en l'occurrence la suite $(\sin(\varphi(n)\pi/4))_{n \geq 1}$, par une suite convergeant vers 1). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc inclus dans $[-1, 1]$.

Pour $n = 8k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{(8k+2)\pi}{4} = \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

La suite extraite $(u_{8k+2})_{k \geq 0}$ a donc précisément pour limite 1 (qui est justement la plus grande valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer pour la suite $(u_n)_{n \geq 1}$). Le nombre 1 est donc bien la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, et l'on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Pour $n = 8k + 6$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin \frac{(8k+6)\pi}{4} = \sin \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1.$$

La suite extraite $(u_{8k+6})_{k \geq 0}$ a donc précisément pour limite -1 (qui est justement la plus petite valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer

pour la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Le nombre -1 est donc bien la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et l'on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Exercice III

On rappelle que, pour tout $x \geq 0$ on a $1 + x \leq e^x$.

(1) Soient z_1, z_2, \dots des nombres complexes. En écrivant

$$\prod_{k=1}^{p+1} (1 + z_k) - 1 = \left(\prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right) (1 + z_{p+1}) + z_{p+1},$$

montrer, par récurrence sur p , que

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1,$$

et en déduire que

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq e^{\sum_{k=1}^p |z_k|} - 1.$$

Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, (\mathcal{A}_p) l'assertion :

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1 \quad \forall z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}.$$

L'assertion \mathcal{A}_1 est vraie car

$$|(1 + z_1) - 1| = |z_1| = 1 + |z_1| - |z_1| \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}.$$

On suppose que pour p donné dans \mathbb{N}^* , l'assertion \mathcal{A}_p est vraie et l'on montre qu'alors \mathcal{A}_{p+1} l'est aussi. Cette assertion \mathcal{A}_p sera alors héréditaire. Elle sera ainsi prouvée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est là le principe du raisonnement par récurrence).

Montrons donc \mathcal{A}_{p+1} en supposant \mathcal{A}_p vraie. Soient z_1, \dots, z_{p+1} , une liste de $p+1$ nombres complexes. On a, en utilisant l'indication, puis deux fois l'inégalité triangulaire, enfin, au second membre de la seconde ligne, le fait

que \mathcal{A}_p soit supposée vraie pour passer à la ligne suivante :

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{p+1} (1 + z_k) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right) (1 + z_{p+1}) + z_{p+1} \right| \\ &\leq \left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \times |1 + z_{p+1}| + |z_{p+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) - 1 \right) (1 + |z_{p+1}|) + |z_{p+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{p+1} (1 + |z_k|) - 1 - |z_{p+1}| + |z_{p+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{p+1} (1 + |z_k|) - 1. \end{aligned}$$

L'assertion \mathcal{A}_{p+1} est bien démontrée modulo le fait que \mathcal{A}_p est vraie, ce qui valide la preuve de \mathcal{A}_p pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence).

On a, en utilisant le résultat rappelé en préambule de l'exercice :

$$\prod_{k=1}^p (1 + |z_k|) \leq \prod_{k=1}^p e^{|z_k|} = e^{|z_1|} \times \dots \times e^{|z_p|} = e^{|z_1| + \dots + |z_p|} = e^{\sum_{k=1}^p |z_k|}$$

puisque $e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ (même en fait lorsque a et b sont complexes). En retranchant 1 aux deux membres, on a donc :

$$\left| \prod_{k=1}^p (1 + z_k) - 1 \right| \leq e^{\sum_{k=1}^p |z_k|} - 1.$$

(2) (Question de cours) *Énoncer le critère de Cauchy pour une suite de nombres complexes $(u_k)_{k \geq 0}$.*

Une suite de nombres complexes $(u_k)_{k \geq 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall m > n \geq N(\epsilon), |u_m - u_n| < \epsilon.$$

(3) Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes vrifiant

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right) \leq M < +\infty.$$

(a) Montrer que la suite $n \mapsto \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right)$ est décroissante et converge vers 0.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+p} |u_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} |u_k| \leq M.$$

En prenant la borne supérieure sur $p \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n+1}^{n+1+p} |u_k| \right) \leq \sup_{p \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \leq \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \leq M.$$

La suite

$$n \mapsto \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k| \right)$$

est donc bien décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite λ positive ou nulle. Si l'on avait $\lambda > 0$, la suite croissante majorée

$$\left(\sum_{k=0}^n |u_k| \right)_{n \geq 0} = (U_n)_{n \geq 0}$$

ne vérifierait pas le critère de Cauchy car on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \right| = \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \geq \lambda > 0 ;$$

(A.1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existerait en effet $m(n) = n + p(n) > n$ (dans \mathbb{N}) tel que

$$|U_{m(n)} - U_n| \geq \lambda/2$$

(ce qui exprime bien que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ n'est pas de Cauchy) : si en effet ce n'était pas le cas, il y aurait au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \right| \leq \lambda/2,$$

ce qui serait en contradiction avec (A.1). Mais la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ converge (car croissante et majorée). Elle vérifie donc le critère de Cauchy. Avoir supposé $\lambda > 0$ conduit ainsi à une contradiction. Donc $\lambda = 0$.

(b) *En utilisant le résultat obtenu la question 1., montrer que*

$$\left| \prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) - \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \right| \leq e^M \left(e^{\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k|} - 1 \right).$$

Pour $p = 0$, l'inégalité est vraie car le membre de gauche est nul. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on observe que

$$\prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \times \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k).$$

On a donc, en utilisant la mise en facteur, puis l'inégalité établie au à fin de la question (1) pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, enfin,

une fois encore, l'inégalité rappelée en préambule de l'exercice pour passer cette fois de la ligne 2 à la ligne 3 :

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{k=0}^{n+p} (1 + u_k) - \prod_{k=0}^n (1 + u_k) \right| &= \prod_{k=0}^n |1 + u_k| \times \left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k) - 1 \right| \\
&\leq \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|) \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\
&\leq e^{\sum_{k=0}^n |u_k|} \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\
&\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|} - 1) \\
&\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|} - 1).
\end{aligned}$$

(c) En dduire que la suite $(\prod_{k=0}^n (1 + u_k))_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy et conclure que cette suite converge vers une limite l telle que $|l| \leq e^M$.

On pose $\Pi_n := \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$. On a établi à la question précédente que

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |\Pi_{n+p} - \Pi_n| &\leq e^M \times (e^{\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|} - 1) \\
&\leq e^M \times (e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1)
\end{aligned}$$

(A.2)

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \right) \right) = 0$$

(cf. la question **(3a)**) et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{w_n} - 1) = 0$$

pour une suite $(w_n)_{n \geq 0}$ quelconque de nombres réels (la fonction exponentielle est continue en 0 et vaut 1 en ce point), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1) = 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $N(\epsilon)$ tel que, pour tout

$$(n \geq N(\epsilon)) \implies \left(0 \leq e^{\sup_{p \in \mathbb{N}} (\sum_{k=n}^{n+p} |u_k|)} - 1 < \epsilon e^{-M} \right).$$

En reportant dans (A.2), on en déduit

$$\forall n \geq N(\epsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, |\Pi_{n+p} - \Pi_n| < \epsilon.$$

La suite de nombres complexes $(\Pi_n)_{n \geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy, donc converge vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\Pi_n| \leq \prod_{k=0}^n (1 + |u_k|) \leq \prod_{k=0}^n e^{|u_k|} = e^{\sum_{k=0}^n |u_k|} \leq e^M$$

on a aussi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $|l| \leq e^M$.

Annales 2011-2012, texte et corrigé du DS 2, 1h30

Exercice I.

Questions de cours. *Énoncer le théorème des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis.*

Le théorème (ou « formule ») des accroissements finis concerne les fonctions à valeurs réelles et s'énonce ainsi : si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

(cf. le Corollaire 2.6 du polycopié de cours).

L'inégalité des accroissements finis concerne, elle, le cadre plus général des fonctions à valeurs complexes et s'énonce ainsi : si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors on a l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)|$$

(cf. le Théorème 2.8 du polycopié de cours).

Soit f une fonction complexe continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$ telle que f' soit bornée.

- (1) Montrer que f est uniformément continue sur $]a, b[$.
- (2) Montrer que f est bornée sur $]a, b[$.
- (3) La fonction f se prolonge-t-elle par continuité aux bornes a, b ?

- (1) Pour tout x et y dans $]a, b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$(B.1) \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \times \sup_{t \in]x, y[} |f'(t)| \leq |x - y| \times \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|.$$

Comme f' est ici supposée bornée sur $]a, b[$, on a

$$\sup_{t \in]a, b[} |f'(t)| = M \in [0, +\infty[.$$

Si $M = 0$, la fonction f est, d'après (B.1), constante sur $]a, b[$, et par conséquent uniformément continue sur cet intervalle ouvert. Si $M > 0$, alors, pour tout $\epsilon > 0$, on a, toujours d'après (B.1),

$$\forall x, y \in]a, b[,$$

$$\left(|x - y| < \eta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M} \right) \implies \left(|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon \right),$$

ce qui prouve encore que f est uniformément continue sur $]a, b[$ (cf. la Définition 2.9 du polycopié de cours).

- (2) Soit x_0 un point arbitraire de $]a, b[$ (on suppose que $]a, b[$ est non vide, sinon il n'y a rien à démontrer). Pour tout $x \in]a, b[$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$(B.2) \quad |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \times \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)| = M|x - x_0| \leq M(b - a),$$

où $M := \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|$. Comme $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$ pour tout $x \in]a, b[$, on déduit de (B.2) que

$$\forall x \in]a, b[, |f(x)| \leq |f(x_0)| + M(b - a),$$

donc que f est bornée sur $]a, b[$.

- (3) Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $]a, b[$ convergeant vers a , la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} (donc vérifie le critère de Cauchy). On en déduit, puisque

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(x_p)| \leq M|x_n - x_p|$$

(où $M := \sup_{t \in]a, b[} |f'(t)|$) d'après (B.1), que :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \left(n \geq N(\epsilon) \text{ et } p \geq N(\epsilon) \right) \\ \implies \left(|x_n - x_p| \leq \frac{\epsilon}{M} \right) \implies \left(|f(x_n) - f(x_p)| \leq \epsilon \right). \end{aligned}$$

La suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ est donc une suite de nombres complexes vérifiant aussi le critère de Cauchy, donc convergeant (d'après le théorème de Cauchy) vers une limite $l[(f(x_n))_{n \geq 0}]$. Si $(\tilde{x}_n)_{n \geq 0}$ est une autre suite de points de $]a, b[$ convergeant aussi vers a , la suite $(x_n - \tilde{x}_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 ; il en est alors de même, toujours d'après le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq M|x_n - \tilde{x}_n|$$

(cf. (B.1)), pour la suite $(f(x_n) - f(\tilde{x}_n))_{n \geq 0}$. Ceci montre que

$$l[(f(x_n))_{n \geq 0}] = l[(f(\tilde{x}_n))_{n \geq 0}],$$

et, par conséquent, que le nombre complexe $l[(f(x_n))_{n \geq 0}]$ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$. Si l'on pose donc

$$f(a) := l[(f(x_n))_{n \geq 0}],$$

où $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite quelconque de points de $]a, b[$ convergeant vers a , on définit bien un prolongement par continuité de f sur l'intervalle $[a, b[$: en effet, la fonction ainsi prolongée est bien continue en a (si l'on invoque le critère séquentiel de la Définition 2.3 du polycopié de cours). Le même raisonnement s'applique concernant le moyen de prolonger f en une fonction continue sur $]a, b[$.

Exercice II.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier la nature de la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \sin(\ln n)$.

- (1) Soit $n_k = [e^{2k\pi}] + 1$, o $[u]$ désigne la partie entière de u c'est-à-dire le plus grand entier p tel que $p \leq u$. En remarquant tout d'abord que

$\sin(\ln(e^{2k\pi})) = 0$, puis en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sin x$ et ensuite à la fonction $x \mapsto \ln x$, montrer que

$$|u_{n_k}| \leq |\ln(n_k) - \ln(e^{2k\pi})| \leq e^{-2k\pi},$$

et conclure que 0 est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.

L'inégalité des accroissements finis, que l'on applique ici à la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, couplée avec le fait que la fonction $\sin' = \cos$ est bornée sur \mathbb{R} en valeur absolue par 1, implique :

$$(B.3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x - y| \times \sup_{t \in \mathbb{R}} |\cos t| \leq |x - y|.$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}$ et $x = \ln n_k$, $y = \ln(e^{2k\pi}) = 2k\pi$ (on observe que $n_k = \lceil e^{2k\pi} \rceil + 1 > e^{2k\pi}$, donc que $x > y$ du fait de la stricte croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$), on a :

$$(B.4) \quad |\sin(\ln n_k) - \sin(2k\pi)| = |\sin(\ln n_k)| = |u_{n_k}| \leq |\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})|.$$

Sur l'intervalle $]e^{2k\pi}, n_k[$, la fonction \ln est dérivable, de dérivée la fonction strictement décroissante $t \mapsto 1/t$, et l'on a :

$$\forall t \in]e^{2k\pi}, n_k[, |\ln'(t)| = |1/t| \leq \frac{1}{e^{2k\pi}} = e^{-2k\pi}.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée cette fois à la fonction \ln sur $]e^{2k\pi}, n_k[$, implique :

$$(B.5) \quad \begin{aligned} |\ln n_k - \ln(e^{2k\pi})| &\leq |n_k - e^{2k\pi}| \times \sup_{t \in]e^{2k\pi}, n_k[} |\ln'(t)| \\ &\leq e^{-2k\pi} |n_k - e^{2k\pi}| \leq e^{-2k\pi} \end{aligned}$$

puisque

$$|n_k - e^{2k\pi}| = n_k - e^{2k\pi} = \lceil e^{2k\pi} \rceil + 1 - e^{2k\pi} \in]0, 1[$$

(du fait de la définition de $\lceil e^{2k\pi} \rceil$). En reportant l'inégalité (B.5) au second membre de l'inégalité (B.4), on obtient bien l'inégalité demandée. Comme la suite $(e^{-2k\pi})_{k \geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ (qui est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$) tend vers 0. Ainsi 0 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite (cf. la Définition 1.14 du polycopié de cours).

- (2) Refaire le raisonnement précédent avec la suite $m_k = \lceil e^{2k\pi + \pi/2} \rceil + 1$ et en déduire que 1 est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$. Conclure.

On applique comme dans la question précédente l'inégalité des accroissements finis pour la fonction \sin (inégalité (B.3)), mais cette fois avec $x = \ln m_k$ et $y = \ln(e^{2k\pi + \pi/2}) = 2k\pi + \pi/2$ (on observe ici encore que $y < x$ du fait de la définition de $m_k = \lceil e^{2k\pi + \pi/2} \rceil + 1$ et de la stricte croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$). On en déduit :

$$(B.6) \quad \begin{aligned} |\sin(\ln m_k) - \sin(2k\pi + \pi/2)| &= |\sin(\ln m_k) - 1| = |u_{m_k} - 1| \\ &\leq |\ln m_k - \ln(e^{2k\pi + \pi/2})|. \end{aligned}$$

Sur l'intervalle ouvert $]e^{2k\pi + \pi/2}, m_k[$, la fonction \ln est dérivable, de dérivée $t \mapsto 1/t$, strictement décroissante sur cet intervalle. On a donc, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction \ln sur le segment

$$(B.7) \quad \begin{aligned} & [e^{2k\pi+\pi/2}, m_k] : \\ & |\ln m_k - \ln(e^{2k\pi+\pi/2})| \leq |m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \times \sup_{t \in]e^{2k\pi+\pi/2}, m_k[} |\ln'(t)| \\ & \leq e^{-2k\pi-\pi/2} |m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| \leq e^{-2k\pi-\pi/2} \end{aligned}$$

puisque

$$|m_k - e^{2k\pi+\pi/2}| = m_k - e^{2k\pi+\pi/2} = [e^{2k\pi+\pi/2}] + 1 - e^{2k\pi+\pi/2} \in]0, 1[$$

(du fait de la définition de $[e^{2k\pi+\pi/2}]$). En reportant l'inégalité (B.7) au second membre de l'inégalité (B.6), on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |u_{m_k} - 1| \leq e^{-2k\pi-\pi/2}.$$

Comme la suite $(e^{-2k\pi-\pi/2})_{k \geq 0}$ tend vers 0, la suite $(u_{m_k})_{k \geq 0}$ (qui est encore une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$) tend vers 1. Ainsi 1 est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, et est donc bien valeur d'adhérence de cette suite. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes (0 et 1) et ne peut donc converger. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc une suite divergente.

- (3) *Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$?* Indication : pour $\vartheta \in [0, 2\pi]$, considrer la suite d'entiers $n_k^\vartheta = [e^{2k\pi+\vartheta}] + 1$.

En répétant mot pour mot le raisonnement fait dans la question précédente (mais avec cette fois θ au lieu de $\pi/2$ et donc $n_k^\theta = [e^{2k\pi+\theta}] + 1$ à la place de $m_k = [e^{2k\pi+\pi/2}] + 1$), on montre que

$$\forall k \geq 0, |u_{n_k^\theta} - \sin(\ln(e^{2k\pi+\theta}))| = |u_{n_k^\theta} - \sin \theta| \leq e^{-2k\pi-\theta}.$$

On en déduit que $\sin \theta$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (car il existe une suite extraite de cette suite, en l'occurrence la suite $(u_{n_k^\theta})_{k \geq 0}$ convergeant vers $\sin \theta$, du fait que la suite $(e^{-2k\pi-\theta})_{k \geq 0}$ converge vers 0 quelque soit θ dans $[0, 2\pi]$). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ contient donc tout le segment $[-1, 1]$, image de \mathbb{R} par l'application \sin . Comme $|u_n| \leq 1$ pour tout n (puisque u_n est un sinus), l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est exactement égal à $[-1, 1]$.

Exercice III.

1. Question de cours. *Énoncer le théorème de Rolle.*

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(a) = f(b)$ et que f soit dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[\quad \text{t.q.} \quad f'(c) = 0$$

(cf. le Théorème 2.5 du polycopié de cours).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[a, b]$ telle que f'' soit drivable sur $]a, b[$. Soient $x_0 < x_1 < x_2$, 3 points distincts du segment $[a, b]$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme P de degr 2 tel que

$$P(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2.$$

1. Notons ainsi que $n_k^0 = n_k$ et que $n_k^{\pi/2} = m_k$.

Indication : chercher P sous la forme

$$P(x) = a(x - x_0)(x - x_1) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_1)(x - x_2).$$

Si l'on pose

$$a = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad b = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad c = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

on observe immédiatement que le polynôme P ainsi construit satisfait les conditions exigées. Ces valeurs de a, b, c s'obtiennent en substituant respectivement x_2, x_1, x_0 à l'inconnue x dans :

$$f(x) = P(x) = a(x - x_0)(x - x_1) + b(x - x_0)(x - x_2) + c(x - x_1)(x - x_2)$$

(on observe chaque fois que deux des trois produits figurant dans l'expression de P telle qu'elle est proposée induisent 0 après cette substitution).

Dans toute la suite, P est fixé comme ci-dessus et, de plus, on fixe un point $x \in [a, b]$, distinct des trois nombres x_0, x_1, x_2 .

3. Comment faut-il choisir le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction :

$$g : t \in [a, b] \mapsto f(t) - P(t) - \alpha(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

s'annule en x ?

Il faut choisir α tel que

$$f(x) - P(x) - \alpha(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

soit

$$(B.8) \quad \alpha = \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}.$$

On choisit partir de maintenant α comme à la question ci-dessus, de sorte que g s'annule en quatre points distincts.

4. Vérifier que g est de classe C^2 sur $[a, b]$ et que g'' est dérivable sur $]a, b[$.

La fonction polynomiale

$$Q : t \in \mathbb{R} \mapsto P(t) + \alpha(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . La fonction g , qui s'écrit comme différence de la fonction f (de classe C^2 sur $[a, b]$ et telle que f'' est dérivable sur $]a, b[$) et de cette fonction polynomiale Q , est donc (comme f) de classe C^2 sur $[a, b]$, avec de plus g'' dérivable sur $]a, b[$.

— Montrer que g' s'annule en trois points distincts de $]a, b[$.

La fonction g s'annule aux trois points x_0, x_1, x_2 (puisque $f(x_j) = P(x_j)$ pour $j = 0, 1, 2$, par construction même du polynôme P via le choix des trois coefficients a, b, c à la question **2**) et s'annule aussi au point x (supposé distinct de ces trois points) de par le choix du paramètre α à la question **3**. Cette fonction g s'annule donc en (au moins) quatre points distincts de $[a, b]$, en l'occurrence x_0, x_1, x_2, x . D'après le théorème de Rolle, entre deux quelconques (mais consécutifs) de ces quatre points, la fonction g' admet au moins un zéro. Comme quatre points (dans \mathbb{R}) délimitent trois intervalles ouverts contigus (deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13} (chacun ayant pour

extrémités deux de ces quatre points), la fonction g' s'annule en au moins trois points distincts de $]a, b[$. On applique pour justifier cela le théorème de Rolle à chacun des trois intervalles ouverts contigus I_{1j} , $j = 1, 2, 3$, délimités par les quatre points x_0, x_1, x_2, x ; la fonction g' admet ainsi au moins un zéro dans chacun de ces trois intervalles ouverts contigus (donc deux-à-deux disjoints) I_{11}, I_{12}, I_{13} .

— Montrer que g'' s'annule en deux points distincts de $]a, b[$.

La fonction g' (continue sur $[a, b]$) s'annule en trois points distincts de $]a, b[$ (établi au point précédent). Ces trois points distincts délimitent deux intervalles contigus disjoints I_{21} et I_{22} (inclus dans $]a, b[$). D'après le théorème de Rolle, appliqué cette fois à la fonction g' continue sur $[a, b]$ (donc sur les segments $\overline{I_{21}}$ et $\overline{I_{22}}$), dérivable sur chacun des deux intervalles ouverts contigus I_{21}, I_{22} , et nulle aux bornes de chacun d'eux. La fonction g'' s'annule au moins une fois dans chacun de ces deux intervalles ouverts, ce qui implique, puisque I_{21} et I_{22} sont disjoints (car contigus), que g'' s'annule en au moins deux points de $]a, b[$ (un dans I_{21} , un dans I_{22}).

5. En déduire qu'il existe $c_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(3)}(c_x).$$

Si x est l'un des trois points x_0, x_1, x_2 , les deux fonctions

$$t \mapsto f(t) - P(t)$$

et

$$t \mapsto \frac{1}{6} (t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)$$

s'annulent en x et l'on peut prendre pour c_x n'importe quel point de $]a, b[$ pour obtenir la relation demandée. On peut donc supposer que x est différent de x_0, x_1, x_2 , ce qui nous met dans les conditions des questions 3 et 4. Si g est précisément la fonction construite à la question 3, on a établi à la question 4 que g était (comme f) de classe C^2 sur $[a, b]$, avec g'' dérivable sur $]a, b[$ et s'annulant en au moins deux points distincts de $]a, b[$, que nous noterons α et β . Le théorème de Rolle est encore applicable (à $g'' : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ cette fois) et assure que $g^{(3)}$ s'annule en au moins un point de $]a, b[$, donc de $]a, b[$. Mais on observe que

$$\forall t \in]a, b[, g^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - 6\alpha$$

(car la dérivée troisième d'une fonction polynomiale de degré 2 est identiquement nulle tandis que la dérivée troisième de $t \rightarrow t^3$ vaut la fonction constante partout égale à 6). On peut donc affirmer :

$$\exists c = c_x \in]a, b[, \quad \text{t.q.} \quad \alpha = \frac{f^{(3)}(c_x)}{6}.$$

En reportant l'expression de α donnée en (B.8), on obtient bien encore la relation :

$$f(x) - P(x) = \frac{1}{6} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f^{(3)}(c_x).$$

exigée.

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 1, 1h30

Exercice I

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} \right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Les calculs devront être dans chaque cas justifiés.

Dans le premier cas, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} = \frac{n \left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \right)^2} = \frac{1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \right)^2}$$

(on met ici en facteur au numérateur et au dénominateur le terme que l'on pense être prépondérant dans chacune de ces deux expressions lorsque n tend vers l'infini). En utilisant le fait que les suites $(\ln(n)/n)_{n \geq 1}$, $(1/n)_{n \geq 1}$ et $(5/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ convergent toutes les trois vers 0 et le résultat concernant les opérations sur les limites (Proposition 1.4 du polycopié), on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + \ln(n) + 1}{(\sqrt{n} + 5)^2} \right) = 1.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp(n \ln(1 + 1/n)) = \exp\left(\frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n}\right).$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \left(\frac{d}{dx} [\ln(1+x)] \right)(0) = 1,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^1 = e$$

puisque la fonction exponentielle est continue en 1.

Exercice II

On rappelle que l'on a, pour tout nombre réel a différent de 1, pour tout entier $n \geq 0$,

$$1 + a + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^n u_n}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (1) Vérifiez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{u_1 - u_0}{2^{n+1}} + \frac{u_2 - u_1}{2^n} + \cdots + \frac{u_{n+1} - u_n}{2}.$$

En déduire que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de nombres positifs ou nuls, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n \geq 0}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + 2^{n+1}u_{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{u_0}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n u_{k+1} 2^k \\ v_n &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n u_k 2^k. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on trouve bien la formule demandée. Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et constituée de nombres positifs, on a $u_0 \geq 0$ et $u_{k+1} - u_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule que l'on vient d'établir (en tenant compte de la forme du second membre) on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, donc que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Comme $v_0 = u_0/2$, on a aussi $v_n \geq v_0 = u_0/2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par une constante $M > 0$, il en est de même pour la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.

Si $u_k \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq M \times \frac{1 + 2 + \cdots + 2^n}{2^{n+1}} = M \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{1}{2^{n+1}} \leq M.$$

- (3) Déduire des résultats établis aux questions 1 et 2 que si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante et majorée de nombres positifs ou nuls, les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont toutes deux convergentes vers des limites réelles positives ou nulles. Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée (et constituée de nombres positifs ou nuls), il en est de même de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ d'après les deux items précédents. Or toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente (cf. la Proposition 1.2 du polycopié). Les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$, toutes les deux croissantes et majorées, sont donc toutes les deux convergentes vers des limites réelles. Comme ces deux suites sont toutes les deux des suites de nombres positifs ou nuls, les limites respectives de ces suites sont toutes les deux positives ou nulles.

- (4) Expliciter avec des quantificateurs logiques le fait qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels converge vers 0. On a :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ \iff &\left(\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \left(n \geq N(\epsilon) \implies (|u_n| \leq \epsilon) \right) \right). \end{aligned}$$

Exercice III

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels telle que

$$\sup \{|u_n|; n \in \mathbb{N}\} = M < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{3n}}{3} \right) = L \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

- (1) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées. Pourquoi existe-t-il au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n \geq 0}$) qui converge vers une limite réelle finie ? On note dans la suite $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{\varphi(n)})$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles bornées (Théorème 1.1 du polycopié) : « l'ensemble des valeurs d'adhérence (dans \mathbb{R}) d'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels bornée en valeur absolue est non vide (c'est le segment $[\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n]$). » Ici la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels bornée en valeur absolue (par M , c'est la première des hypothèses dans l'en tête de l'exercice). Cette suite admet donc, d'après ce théorème, au moins une valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$, ce qui signifie (Définition 1.9 des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels dans le polycopié) qu'il existe au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ (de la suite donnée $(u_n)_{n \geq 0}$) qui converge vers cette valeur d'adhérence l .

- (2) En utilisant la seconde hypothèse figurant dans (*), vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{3\varphi(n)}) = 3(L - l).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_{\varphi(n)} + \frac{u_{3\varphi(n)}}{3} \right) = L$$

(comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n \geq 0}$ qui est censée converger vers L), la suite $(u_{3\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers $3(L - l)$ d'après la Proposition relative aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié).

- (3) Montrer par récurrence sur l'entier k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers limite finie $l_k \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini et que la suite $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ainsi obtenue vérifie

$$l_0 = l \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad l_{k+1} = 3(L - l_k).$$

En utilisant la première hypothèse figurant dans (*), vérifier que l'on a aussi $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le résultat que l'on demande de montrer par récurrence est vrai pour $k = 0$ avec $l_0 = l$. Supposons qu'il soit vrai à un ordre $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que, pour cette valeur de k , la suite $(u_{3^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers une limite réelle l_k . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_{3^k \varphi(n)} + \frac{u_{3^{k+1} \varphi(n)}}{3} \right) = L$$

(toujours comme suite extraite de la suite $(u_n + u_{3n}/3)_{n \geq 0}$ qui est censée converger vers L), d'où l'on déduit, toujours d'après la Proposition relative

aux opérations sur les limites de suites de nombres réels (Proposition 1.4 du polycopié), que la suite $(u_{3^{k+1}\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers $3(L - l_k) = l_{k+1} \in \mathbb{R}$. La propriété (P_k) que l'on demandait de prouver par récurrence est donc bien héréditaire et (P_k) est ainsi vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{3^k\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$; comme cette dernière suite, elle est bornée en valeur absolue par M et, par conséquent, sa limite l_k aussi.

- (4) Dédurre de la relation entre l_k et l_{k+1} établie à la question 3 que

$$\forall k \in \mathbb{N}, l_{k+1} - 3L/4 = (-3) \times (l_k - 3L/4).$$

En déduire $l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $((-3)^k)_{k \geq 0}$ est-elle une suite bornée? Montrer que le fait que l'on ait $|l_k| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ implique $l = 3L/4$. La relation demandée

$$l_{k+1} - 3L/4 = (-3)(L - 3L/4)$$

équivalent à

$$l_{k+1} = 3(L - l_k),$$

comme on le vérifie immédiatement. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} l_k - 3L/4 &= (-3)(l_{k-1} - 3L/4) = (-3)^2(l_{k-2} - 3L/4) = \dots = \\ \dots &= (-3)^k(l - 3L/4), \end{aligned}$$

d'où

$$l_k = (-3)^k(l - 3L/4) + 3L/4 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ est ce que l'on appelle une suite *arithmético-géométrique*, cf. votre cours de S1). La suite $((-3)^k)_{k \geq 0}$ n'est pas une suite bornée en valeur absolue (ou en module, c'est pareil, puisque les suites sont ici réelles) car c'est une suite géométrique de raison -3 et que $|-3| > 1$. Pour que la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ reste donc bornée en valeur absolue (comme c'est le cas en fait ici d'après ce qui a été établi à la question précédente), il faut que $l - 3L/4 = 0$, soit $l = 3L/4$ (auquel cas la suite $(l_k)_{k \geq 0}$ est de fait stationnaire à cette valeur $3L/4$).

- (5) Dédurre de ce qui précède que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est égal à $\{3L/4\}$. Que peut-on dire du comportement du terme général u_n lorsque n tend vers $+\infty$? Si l est une valeur d'adhérence réelle de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (il en existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), on a nécessairement $l = 3L/4$ (d'après ce qui a été établi à la question précédente). L'ensemble des valeurs d'adhérence réelles de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ se réduit donc au singleton $\{3L/4\}$. D'après la proposition 1.10 du cours (ni $-\infty$, ni $+\infty$ ne sont valeurs d'adhérence car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est supposée bornée en valeur absolue par M), la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui n'a que $3L/4$ comme seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est convergente vers cette valeur $3L/4$.

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS 2, 1h30

Exercice I

- (1) *Énoncer le théorème de Rolle.*

Il s'agit du Théorème 2.5 du polycopié : \ll si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (non réduit à un point) et dérivable sur $]a, b[$, avec de plus $f(a) = f(b)$, il existe au moins un point c de $]a, b[$ où $f'(c) = 0$. \gg

- (2) *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.*

On va raisonner par l'absurde. Si $x \in]a, b[$ était tel que $f(x) = f(a)$, le théorème de Rolle, appliqué à la fonction f sur le segment $[a, x]$, impliquerait qu'il existe au moins un $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = 0$. Ceci serait contradictoire avec l'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Le résultat est donc démontré par l'absurde¹.

- (3) *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, p fois dérivable sur $]a, b[$, s'annulant en $p + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f^{(p)}(c) = 0$ (on commencera par traiter le cas où $p = 1$).*

On raisonne par récurrence (ou hérédité), comme d'habitude en trois étapes.

1. On valide l'assertion au cran initial (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE).

On raisonne pour commencer avec $p = 1$ et l'on suppose donc f dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en deux points distincts de $[a, b]$, ξ_1 et ξ_2 (on pourrait avoir *a priori* $\xi_1 = a$ et $\xi_2 = b$); le théorème de Rolle s'applique à f sur $[\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$ et il existe donc $c \in]\xi_1, \xi_2[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$; le résultat est acquis dans ce cas.

2. On formule (et admet) l'assertion ($\mathcal{P}(p)$ VRAIE) pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Forts du fait que le résultat est vrai pour $p = 1$ (assertion $\mathcal{P}(1)$ VRAIE), nous allons raisonner par récurrence et supposer le résultat vrai pour p fixé dans \mathbb{N}^* , pour tout segment $[\alpha, \beta]$, pour toute fonction réelle continue

1. On pouvait aussi raisonner différemment, même si ce n'était pas tout à fait dans l'esprit de l'exercice : en invoquant cette fois non plus le théorème de Rolle, mais la Proposition 2.12 du polycopié (qui en découle en fait *via* la formule des accroissements finis), on sait que si f' ne s'annule pas sur $]a, b[$, f est strictement monotone sur cet intervalle (strictement croissante ou strictement décroissante suivant que l'on ait toujours $f' > 0$ dans $]a, b[$ ou $f' < 0$ dans $]a, b[$); il est donc impossible que $f(x) = f(a)$ puisque $f(a) = \lim_{\{\xi \rightarrow a; \xi > a\}} f(\xi)$ par continuité de f en a . Cet argument était aussi accepté.

sur $[\alpha, \beta]$, p fois dérivable sur $] \alpha, \beta[$, s'annulant en $p + 1$ points distincts de $[\alpha, \beta]$ (ce sera l'assertion $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE)).

3. On prouve $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE) \implies $(\mathcal{P}(p+1)$ VRAIE). Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, $p + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que f s'annule en $p + 2$ points distincts de $[a, b]$, notés $a \leq \xi_1 < \dots < \xi_{p+2} \leq b$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule en un point $\xi_{1,2}$ de $] \xi_1, \xi_2[$, ainsi qu'en un point $\xi_{p+1,p+2}$ de $] \xi_{p+1}, \xi_{p+2}[$. Comme la fonction f' s'annule aussi en un point $\xi_{j,j+1} \in] \xi_j, \xi_{j+1}[\subset]a, b[$ pour tout j dans $\{2, \dots, p\}$, elle s'annule en $p - 1 + 2 = p + 1$ points distincts de $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[\subset]a, b[$ et est continue sur ce segment $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[$ (car f' est encore dérivable sur $]a, b[$, puisque f est au moins $2 > 1$ fois dérivable sur $]a, b[$). On peut appliquer l'hypothèse de récurrence (assertion $(\mathcal{P}(p)$ VRAIE)) à f' sur $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[$; comme f' s'annule $p + 1$ fois sur ce segment et y est continue et dérivable à l'ordre p en son intérieur, $(f')^{(p)} = f^{(p+1)}$ doit s'annuler au moins une fois dans $] \xi_{1,2}, \xi_{p+1,p+2}[$, donc dans $]a, b[$, ce que l'on voulait. On vient donc de vérifier :

$$\text{assertion } (\mathcal{P}(p) \text{ VRAIE}) \implies \text{assertion } (\mathcal{P}(p+1) \text{ VRAIE}).$$

Comme l'assertion $(\mathcal{P}(1)$ VRAIE) a été validée à l'étape 1, le résultat est prouvé par récurrence.

Exercice II

- (1) *Montrer que la fonction $f : x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est indéfiniment dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sa fonction dérivée d'ordre k est la fonction*

$$x \mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

La fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est C^∞ sur $] - 1, +\infty[$ comme composée de la fonction affine $x \in] - 1, +\infty[\mapsto 1+x \in]0, +\infty[$ et de la fonction $\ln : X \in]0, +\infty[\mapsto \ln(X)$, toutes les deux C^∞ sur leurs domaines de définition, de dérivées respectives $x \mapsto 1$ et $X \mapsto 1/X$. La première dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] - 1, +\infty[$ est, d'après la règle de Leibniz (*cf.* le cours de MISMI de semestre 1 ([**Ymis**], section 3.5), la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$. Les dérivées successives de cette dernière fonction sur $] - 1, +\infty[$ sont les fonctions

$$\begin{aligned} x \in] - 1, +\infty[&\mapsto (-1)(-2) \cdots (-k)(1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k k! (1+x)^{-k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre k de la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ sur $] - 1, +\infty[$ est donc bien la fonction

$$x \in] - 1, +\infty[\mapsto (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

(car il faut remonter d'un cran l'ordre de dérivation utilisé pour sa première dérivée, à savoir la fonction $x \in] - 1, +\infty[\mapsto (1+x)^{-1}$).

- (2) Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a, b \in I$ avec $a < b$ et $p \in \mathbb{N}$. Écrire, pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I , la formule de Taylor-Lagrange entre a et b à l'ordre $p + 1$.

Il s'agit d'énoncer ici la formule (2.49) du Théorème 2.10 du cours :
 « si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , et si $a < b$ sont deux points de I et p un entier positif, il existe au moins un nombre $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!} (b-a)^{p+1}. \gg$$

- (3) En prenant $I =]-1, +\infty[$, $a = 0$, $b = 1$ et pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convenable, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

En faisant comme indiqué et en appliquant la formule rappelée à la question 2, on voit que :

$$\begin{aligned} \exists c \in]0, 1[, \ln(2) &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} + \frac{1}{(p+1)!} \frac{(-1)^p p!}{(1+c)^{p+1}} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^p}{(p+1)(1+c)^{p+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $c \geq 0$,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{p+1}.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} 1/(p+1) = 0$, le lemme des gendarmes implique que l'on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \ln 2.$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice III

- (1) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction F continue sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

C'est le Théorème 2.1 du cours (reposant sur la méthode algorithmique dite de dichotomie qu'il fallait citer ici : « si I est un intervalle de \mathbb{R} , $a < b$ deux points de I et f une fonction continue de I dans \mathbb{R} , alors f prend au moins une fois entre a et b toute valeur c appartenant au segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$. »).

- (2) Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = 0$.

On peut supposer, quitte à remplacer P par $-P$, que le coefficient du terme dominant t^{2k+1} de P est strictement positif. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

(car le degré de P est impair et que $(-\infty)^{2k+1} = -\infty$ tandis que l'on a $(+\infty)^{2k+1} = +\infty$, et que l'on sait d'autre part qu'une fonction polynomiale réelle est équivalente à sa fonction monomiale de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P doit prendre au moins une fois toute valeur entre $-R$ et R lorsque $R > 0$ est arbitraire, donc en particulier la valeur 0.

- (3) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |f^{(k)}(x)| \leq |P(x)|,$$

où P désigne, comme à la question précédente, une fonction polynomiale à coefficients réels de degré impair. Dédurre de la question 2 qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est cette fonction f et ce nombre réel a que l'on conserve jusqu'à la fin de l'exercice.

Comme P s'annule en un point a (d'après le résultat établi question 2) et que $|f^{(k)}(a)| \leq |P(a)| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- (4) Soit $b > a$. Écrire, lorsque $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $p+1$ pour la fonction f entre a et b . En déduire l'inégalité :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On demandait ici d'énoncer, pour une fonction C^∞ sur $I = \mathbb{R}$ (à valeurs ici réelles, mais elle pourrait tout aussi bien être à valeurs complexes), l'inégalité (2.54) du Théorème 2.11 du cours : « si a, b , avec $a < b$ sont deux points de I et $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in]a,b[} |f^{(p+1)}(x)|. \quad \gg$$

Comme ici $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, \dots, p$, et ce pour tout $p \in \mathbb{N}$, et que $|f^{(p+1)}(x)| \leq |P(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par hypothèses, on en déduit, pour ce qui est de notre contexte :

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(p+1)}(x)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

- (5) Soit, pour $b > a$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = (b-a)^{p+1}/(p+1)!$. Montrer qu'il existe un entier positif K tel que pour $p \geq K$, $0 < u_{p+1} \leq u_p/2$. En déduire $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 0$.

On a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{b-a}{p+1}.$$

Si $p \geq \sup(0, 2(b-a) - 1) = K$, on a donc $u_{p+1} \leq u_p/2$ (ou encore $u_p \leq u_{p-1}/2$). Par récurrence, on en déduit, pour tout $p \geq K$,

$$0 \leq u_p \leq (1/2)^{p-K} u_K.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} (1/2)^{p-K} u_K = 0$, le lemme des gendarmes implique, du fait de l'encadrement ci-dessus, que la suite $(u_p)_{p \geq 0}$ converge vers 0.

- (6) *Déduire des résultats établis aux questions 4 et 5 que pour tout $b > a$, $f(b) = 0$.*

En prenant la limite dans l'inégalité

$$|f(b)| \leq \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| = u_p \sup_{x \in [a,b]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

lorsque p tend vers l'infini, on trouve $f(b) = 0$ pour $b > a$.

- (7) *Soit $b < a$. En écrivant comme aux questions précédentes l'inégalité de Taylor-Lagrange à un ordre arbitraire pour la fonction $x \mapsto f(2a-x)$ entre a et $2a-b > a$ et en raisonnant comme à la question 6, montrer que l'on a encore $f(b) = 0$.*

Les nombres dérivés successifs en a de la fonction composée $x \mapsto f(2a-x)$ sont nuls car, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{dx^k} [f(2a-x)] = (-1)^k f^{(k)}(2a-x)$$

d'après la règle de Leibniz et que $[f^{(k)}(2a-x)]_{x=a} = f^{(k)}(a) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} |[f(2a-x)]_{x=2a-b}| = |f(b)| &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [a, 2a-b]} |f^{(p+1)}(2a-x)| \\ &\leq \frac{(a-b)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{x \in [b, a]} |P(x)| \quad \forall p \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En prenant cette fois $u_p := (b-a)^{p+1}/(p+1)!$, on raisonne comme aux questions 5 et 6 et l'on montre que $f(b) = 0$ si $b < a$.

- (8) *Déduire des deux questions précédentes que f est identiquement nulle sur \mathbb{R} .*

On a établi $f(b) = 0$ si $b > a$ (à la question 6) et $f(b) = 0$ si $b < a$ (à la question 7). On sait aussi que $f(a) = 0$ par hypothèses, donc $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} .

Annales 2013-2014, texte et corrigé du DS 1, 1h30

Question de cours

- (1) Soit I un sous-ensemble de \mathbb{R} . Expliciter avec des quantificateurs ce que signifie le fait qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ soit uniformément continue sur I . Il s'agit de la définition 2.9 du cours, s'exprimant ainsi en termes de quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \eta(\epsilon) > 0 \text{ tel que} \\ \forall x, y \in I, (|x - y| < \eta) \implies (|f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

- (2) Pour quels sous-ensembles I de \mathbb{R} peut-on affirmer que toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur I est uniformément continue sur cet ensemble ? C'est au théorème de Heine (théorème 2.3 du cours) qu'il fallait faire référence ici : dès que le sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ est supposé fermé et borné (c'est-à-dire compact), toute fonction continue de I dans \mathbb{C} est automatiquement uniformément continue sur I . Un exemple important est celui où I est un segment $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Exercice 1.

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par la condition initiale $v_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = v_n + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- (1) Montrer que les deux suites $(v_{2k})_{k \geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k \geq 1}$ sont des suites adjacentes. On a

$$\begin{aligned} v_{2(k+1)} - v_{2k} &= (v_{2(k+1)} - v_{2k+1}) + (v_{2k+1} - v_{2k}) = \\ &= \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)+1} + \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} = -\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k+1} \geq 0 \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

La suite $(v_{2k})_{k \geq 1}$ est donc croissante. De même

$$\begin{aligned} v_{2(k+1)+1} - v_{2k+1} &= (v_{2(k+1)+1} - v_{2(k+1)}) + (v_{2(k+1)} - v_{2k+1}) = \\ &= \frac{(-1)^{2(k+1)+1}}{2(k+1)+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+1} \leq 0 \quad \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

La suite $(v_{2k+1})_{k \geq 1}$ est donc décroissante. On a enfin

$$|v_{2k+1} - v_{2k}| = \left| \frac{(-1)^{2k}}{2k+1} \right| = \frac{1}{2k+1}$$

et la suite $(v_{2k+1} - v_{2k})_{k \geq 1}$ converge donc (comme c'est le cas pour la suite $(1/(2k+1))_{k \geq 1}$) vers 0 lorsque k tend vers l'infini. On a donc

$$v_{2k} \leq v_{2(k+1)} \leq v_{2k+3} \leq v_{2k+1} \quad \forall k \geq 1$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (v_{2k+1} - v_{2k}) = 0.$$

Ce sont là exactement les conditions (1.10) de la définition 1.8 du cours (suites adjacentes). Les deux suites $(v_{2k})_{k \geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k \geq 1}$ sont donc bien adjacentes.

- (2) *En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite ℓ . On invoque le critère de convergence des suites adjacentes (proposition 1.6 du cours) : les deux suites $(v_{2k})_{k \geq 1}$ et $(v_{2k+1})_{k \geq 1}$ sont convergentes vers la même limite ℓ . La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge donc vers la limite commune de ces deux sous-suites (dont les termes s'intercalent pour former précisément la suite $(v_n)_{n \geq 1}$), c'est-à-dire ℓ .*
- (3) *Justifier en calculant les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ (on précisera combien sont nécessaires) que ℓ est un nombre compris entre 0 et 1 et dont la première décimale est dans l'ensemble $\{5, 6, 7\}$. On observe (en utilisant si nécessaire la calculette) que*

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{1}{2} = 0.5, \quad v_3 = \frac{5}{6} \simeq 0.833,$$

$$v_4 = \frac{7}{12} \simeq 0.583, \quad v_5 = \frac{47}{60} \simeq 0.783.$$

Comme

$$v_2 \leq v_4 \leq \ell \leq v_5 \leq v_3 \leq v_1$$

du fait de l'adjacence des des deux suites (et puisque la suite $(v_{2k})_{k \geq 1}$ est croissante tandis que la suite $(v_{2k+1})_{k \geq 1}$ est décroissante), le nombre ℓ appartient au segment $[v_4, v_5] = [7/12, 47/60] \subset [0.58, 0.79]$ et sa première décimale appartient nécessairement à l'ensemble $\{5, 6, 7\}$. On utilise ici l'assertion concernant les DDI dans l'énoncé de la proposition 1.6. Il fallait calculer les cinq premiers termes de la suite pour valider le résultat demandé.

Exercice 2.

- (1) *Expliciter ce que signifie le fait qu'une suite $(u_k)_{k \geq 1}$ de nombres complexes soit une suite de Cauchy. Que peut-on dire du comportement d'une suite de Cauchy $(u_k)_{k \geq 0}$ de nombres complexes lorsque k tend vers l'infini ?*
 Une suite $(u_k)_{k \geq 1}$ de nombres complexes est dite de Cauchy si elle vérifie le critère de Cauchy (1.15) de la définition 1.16 du cours :

$$\forall \epsilon > 0, \exists K = K(\epsilon) \in \mathbb{N}^*, (k \geq K \text{ et } k' \geq K) \implies (|u_k - u_{k'}| \leq \epsilon).$$

Le théorème 1.3 du cours assure que toute suite de Cauchy $(u_k)_{k \geq 1}$ de nombres complexes est nécessairement convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque k tend vers l'infini.

- (2) *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a*

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Si $k \geq 2$, on a $k \geq k-1$ et par conséquent $1/k^2 \leq 1/(k(k-1))$. L'égalité $1/k^2 = 1/(k-1) - 1/k$ (pour $k \geq 2$) s'obtient en réduisant le second membre au même dénominateur.

- (3) *Déduire de la question 2 que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

est une suite qui converge vers une limite $\ell \in [1, 2]$. On a, pour tout $n \geq 2$,

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

en appliquant à chaque terme de la somme l'inégalité établie à la question 2. Mais on a, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \\ \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(la somme se trouve être « télescopique », les termes se détruisant au fur et à mesure qu'on les ajoute). La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite croissante de nombres réels ($S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)^2 \geq 0$) minorée par $S_1 = 1$ et majorée par 2 car $S_n \leq 1 + (1 - 1/n) = 2 - 1/n$ pour tout $n \geq 2$. D'après la proposition 1.2 du cours la suite croissante majorée de nombres réels $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers une limite ℓ . Comme $S_n \in [1, 2]$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $\ell \in [1, 2]$ par passage à la limite.

- (4) *Soit $(u_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Vérifier que, si n et p sont deux entiers strictement positifs tels que $n > p > 1$, on a

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - u_{n-1}| + \dots + |u_{p+1} - u_p| \leq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} = S_{n-1} - S_{p-1}.$$

La première inégalité à établir résulte de l'inégalité triangulaire (inégalité (1.13) du cours) : si z_1, \dots, z_{n-p} sont $n-p$ nombres complexes, on a

$$|z_1 + \dots + z_{n-p}| \leq |z_1| + \dots + |z_{n-p}|.$$

Pour la seconde inégalité, il suffit d'ajouter les inégalités

$$|u_{k+1} - u_k| \leq \frac{1}{k^2}, \quad k = p, \dots, n-1.$$

La dernière égalité résulte de la définition même de $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n-1} 1/k^2$ et $S_{p-1} = \sum_{k=1}^{k=p-1} 1/k^2$.

- (5) *Déduire des résultats établis aux deux questions précédentes que la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est une suite convergente.* Toute suite convergente est de Cauchy (exemple 1.10 du cours). La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est donc Cauchy. Si $\epsilon > 0$ est donné, il existe donc $K(\epsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que dès que $n > p \geq K(\epsilon) + 1$, on a $|S_{n-1} - S_{p-1}| \leq \epsilon$ (on applique le critère de Cauchy rappelé à la question 1). On a donc

$$(n > p \geq K(\epsilon) + 1) \implies (|u_n - u_p| \leq \epsilon).$$

La suite $(u_k)_{k \geq 1}$ vérifie donc aussi le critère de Cauchy et est par conséquent convergente vers une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Soit $[a, b]$ ($a < b$) un segment de \mathbb{R} et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$.

- (1) *En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un nombre $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire que f admet au moins un point fixe.* Cette question reprend (avec le segment $[0, 1]$ remplacé ici par le segment $[a, b]$) l'exemple 2.5 du cours. Soit $F : x \in [a, b] \mapsto f(x) - x$. On a $F(a) \geq 0$ et $F(b) \leq 0$ puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent tous deux au segment $[a, b]$. Si $F(a)F(b) = 0$, f admet a ou b comme point fixe ; si $F(a)F(b) \neq 0$, on a nécessairement $F(a)F(b) < 0$ et le TVI (théorème 2.1 du cours) assure, puisque F est continue sur $[a, b]$, que F s'annule au moins en un point ℓ de $]a, b[$, ce qui signifie que f présente un point fixe en ce point ℓ .
- (2) *On suppose de plus à partir de maintenant que f vérifie la condition¹*

$$\forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b], \quad (x = y) \text{ ou } (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

Montrer que le nombre $\ell \in [a, b]$ introduit à la question 1 est unique. Si l'on avait deux nombres ℓ_1 et ℓ_2 de $[a, b]$ distincts tels que $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$, on aurait $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$, ce qui est absurde.
- (3) *Soit $x \in [a, b]$. Montrer que l'on a aussi $(x + f(x))/2 \in [a, b]$.* Les nombres x et $f(x)$ sont dans $[a, b]$, donc le milieu du segment qu'ils bornent l'est aussi puisque $[a, b]$ est un segment. Or $(x + f(x))/2$ est précisément le milieu de ce segment.
- (4) *On introduit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = \alpha \in [a, b]$ et la relation de récurrence :*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + f(u_n)).$$

1. Il y avait un petit problème ici car le cas $x = y$ devait être considéré à part. L'énoncé a donc été légèrement modifié. Il en sera bien sûr tenu compte lors de la correction.

- Justifier (en utilisant le résultat établi à la question **3**) pourquoi la définition de cette suite est licite. Ceci se justifie par récurrence. En fait, on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la définition de u_0, \dots, u_n est licite et que tous ces nombres sont dans $[a, b]$. La définition de u_0 ne pose pas de problème. Si l'on a pu définir u_0, \dots, u_n en respectant le fait que tous les $u_k, k = 0, \dots, n$, soient dans $[a, b]$, la définition de $u_{n+1} = (u_n + f(u_n))/2$ est licite puisque $f(u_n)$ est bien défini (car $u_n \in [a, b]$ et que $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$). D'autre part $u_{n+1} \in [a, b]$ d'après le résultat établi à la question **3**. Ainsi la définition de u_0, \dots, u_{n+1} est licite et tous ces nombres sont dans $[a, b]$. Ce que l'on voulait prouver est bien ainsi prouvé par récurrence.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - u_{n-1}) + f(u_n) - f(u_{n-1})}{2}. \quad (*)$$

Comme $|f(u_n) - f(u_{n-1})| < |u_n - u_{n-1}|$, les deux nombres $u_n - u_{n-1}$ et

$$(u_n - u_{n-1}) + (f(u_n) - f(u_{n-1})) = (u_n - u_{n-1}) - (f(u_{n-1}) - f(u_n))$$

ont même signe. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ est donc d'après (*) le même que celui de $u_n - u_{n-1}$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc bien monotone (croissante ou décroissante).

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite monotone (donc croissante ou décroissante) de nombres réels tous dans un même segment $[a, b]$. Cette suite est donc à la fois majorée et minorée. Elle converge d'après la proposition 1.2 du cours vers une limite ℓ' . Comme f est continue, la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(\ell')$ et on a, par passage à la limite dans la relation inductive

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + f(u_n)),$$

$\ell' = (\ell' + f(\ell'))/2$, soit $f(\ell') = \ell'$. Le nombre ℓ' est donc un point fixe de f . Comme un tel point fixe est unique et égal à ℓ (d'après la question **2**), on a $\ell' = \ell$.

Annales 2013-2014, texte du DS 2, 1h30

Exercice 1.

- (1) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Peut-on déterminer x_0 de manière approchée par une méthode algorithmique et laquelle ?
- (3) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 2.

- (1) Énoncer la règle de l'Hôpital.
- (2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{1 - \cos x} \right).$$

Exercice 3. Soient h un nombre réel strictement positif et f une fonction de classe C^2 sur $[0, 2h]$, prenant ses valeurs dans \mathbb{R} . On définit la fonction ϕ_h sur $[0, h]$ par

$$\forall x \in [0, h], \phi_h(x) := f(x+h) - f(a+x).$$

- (1) Montrer que ϕ_h est de classe C^2 sur $[0, h]$ et qu'il existe $c_h \in [0, h]$ tel que

$$\begin{aligned} (f(2h) - f(h)) - (f(h) - f(0)) &= \\ &= f(2h) - 2f(h) + f(0) = h \phi'_h(c_h). \end{aligned}$$

- (2) Exprimer la fonction $\phi'_{a,h}$ en fonction de a, h et de la dérivée de la fonction f sur $[a, a+2h]$.
- (3) Dédire des deux questions précédentes qu'il existe $\alpha_h \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(a + 2\alpha h).$$

Exercice 4.

- (1) Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et dérivable en tout point de $]a, b[$.

- (2) Vérifier que si x et y sont deux éléments de $[-\pi/4, \pi/4]$, on a

$$|x - y| \leq |\tan x - \tan y| \leq 2|x - y|.$$

- (3) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction à valeurs complexes de classe C^p ($p \in \mathbb{N}$) sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} et dérivable à l'ordre $p+1$ en tout point de $]a, b[$. À quelle valeur de p correspond l'inégalité des accroissements finis énoncée à la question 1 ?

- (4) Montrer que pour tout $x > 1$

$$\left| \log(x) - \frac{(x-1)(x-3)}{2} \right| \leq \frac{(x-1)^3}{6}.$$

Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS1, 1h30

Exercice 1. Déterminez pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse. Dans chaque cas, justifiez votre réponse soit à l'aide d'une démonstration (si vous pensez que l'assertion est vraie), soit en exhibant un contre-exemple (si vous pensez que l'assertion est fausse).

- (1) « Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ est nécessairement monotone ». L'assertion est **FAUSSE** : par exemple la suite $((-1)^n/n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 sans être ni croissante ni décroissante. Les suites de l'exemple 1.6 du polycopié régies par la relation inductive $u_{n+1} - u_n = (-1)^n a_n$, où $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de nombres strictement positifs tendant vers 0 (c'est le principe des ressorts avec amortissement en mécanique), fournissent toutes des contre-exemples.
- (2) « Si A est un sous-ensemble fini et non vide de \mathbb{R} , on a $\sup A \in A$ ». L'assertion est **VRAIE** : un sous-ensemble fini non vide de \mathbb{R} , décrit comme $A = \{x_1, \dots, x_N\}$ (ici à $N \geq 1$ éléments supposés distincts) est toujours tel que ses éléments (en nombre fini, ici N) puissent être rangés dans l'ordre croissant $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \dots < x_{\sigma(N)}$, où σ est une application bijective de $\{1, \dots, N\}$ dans lui-même ; il possède donc un plus grand élément, ici $x_{\sigma(N)} = \max(x_1, \dots, x_N)$; ce plus grand élément de A est un majorant ; c'est le plus petit des majorants de A car il est lui-même dans A ; on a donc $\sup A \in A$.
- (3) « Il existe au moins un nombre ℓ de $[-1, 1]$ tel que l'on puisse extraire de la suite $(\cos(n))_{n \geq 0}$ une sous-suite convergeant vers ℓ ». L'assertion est **VRAIE** : le théorème de Bolzano-Weierstraß (théorème 1.1 du polycopié) assure que toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels bornée en valeur absolue (ce qui signifie $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) admet au moins une valeur d'adhérence réelle ℓ (ici $|\cos(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; comme toute valeur d'adhérence ℓ de la suite $(\cos(n))_{n \geq 0}$ est limite d'une sous-suite $(\cos(\varphi(n)))_{n \geq 0}$, où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans lui-même, et que $|\cos(\varphi(n))| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi par passage à la limite $|\ell| \leq 1$, soit $\ell \in [-1, 1]$.
- (4) « Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels appartenant tous au même segment $[-M, M]$ (avec $M > 0$) est divergente (c'est-à-dire non convergente vers une limite réelle ℓ) si et seulement si elle possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes ». L'assertion est **VRAIE** : en effet une telle suite admet au moins une valeur d'adhérence réelle ℓ d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß ; de deux choses l'une :

- si l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ (qui est non vide) se réduit à un seul point $\{\ell_0\}$, cela signifie que toutes les sous-suites extraites de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergent vers ℓ_0 , donc que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ_0 ;
- s'il existe deux valeurs propres distinctes réelles $\ell_1 \neq \ell_2$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge car, si elle convergerait, ce serait à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2 , ce qui est impossible (unicité de la limite d'une suite si cette limite existe);

la suite est donc bien divergente si et seulement si on se trouve dans la seconde alternative (au moins deux valeurs d'adhérence distinctes).

- (5) « Si A est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R} tel que $\inf A = 3$, alors $\inf\{x^2; x \in A\} = 9$. » L'assertion est **VRAIE** : si $\inf A = 3$, on a $x \geq 3$ pour tout $x \in A$, donc $x^2 \geq 9$ pour tout $x \in A$; on a donc l'inégalité donc $\inf\{x^2; x \in A\} \geq 9$. D'autre part, puisque $\inf A = 3$, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [3, 3 + 1/n[\cap A$, soit $x_n^2 \in [9, (3 + 1/n)^2[$ avec $x_n \in A$; comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + 1/n)^2 = 9$ (en décroissant par valeurs supérieures) et que l'on a $\inf\{x^2; x \in A\} \leq (3 + 1/n)^2$ pour tout $n \geq 1$ car $x_n \in A$, on a aussi $\inf\{x^2; x \in A\} \leq 9$ en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$; on a donc bien $\inf\{x^2; x \in A\} = 9$.

Exercice 2.

- Donnez un exemple d'un sous-ensemble A de \mathbb{R} qui ne soit ni ouvert ni fermé (on pourra penser à un intervalle). L'intervalle $A = [0, 1[$ n'est pas fermé car le nombre 1 est adhérent à A ($1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 1/n)$ et $1 - 1/n \in A$ dès que $n \geq 1$) mais n'est pas dans A ; le complémentaire de A dans \mathbb{R} est $B = \mathbb{R} \setminus [0, 1[=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$: cet ensemble B n'est pas non plus fermé car 0 lui est adhérent ($0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1/n)$) sans que 0 soit dans B ; l'intervalle $A = [0, 1[$ n'est donc ni ouvert (c'est-à-dire de complémentaire fermé) ni fermé.
- Donnez un exemple d'une suite de nombres réels ne tendant ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$, mais ne possédant pourtant aucune valeur d'adhérence réelle. La suite $(u_n)_{n \geq 0} = ((-1)^n n)_{n \geq 0}$ ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ car la sous-suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ tandis que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$; comme la suite $(|u_n|)_{n \geq 0} = (|n|)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ ne saurait admettre de valeur d'adhérence réelle.
- Que signifie le fait qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels soit une suite de Cauchy? Cela signifie

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, p \geq N(\epsilon), |u_n - u_p| \leq \epsilon$$

(définition 1.16 du polycopié). Autrement dit, en français : deux termes arbitraires de la suite sont aussi proches qu'on le souhaite (à une distance de moins de ϵ l'un de l'autre avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit) pourvu que leurs indices dépassent tous deux un seuil $N(\epsilon)$ suffisamment grand. *Est-il possible de donner un exemple de suite de Cauchy de nombres réels qui ne soit pas convergente?* **NON**, car toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente vers une limite réelle (théorème de Cauchy, théorème 1.3 du polycopié).

- Donnez un exemple d'une suite de nombres irrationnels convergeant vers un nombre rationnel. Le nombre π est irrationnel, comme le sont tous les

nombres π/n pour $n \in \mathbb{N}^*$; la suite $(\pi/n)_{n \geq 1}$ converge vers le nombre rationnel 0.

Exercice 3. On définit une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$u_0 = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

- Vérifiez par récurrence sur l'entier n que tous les nombres u_n appartiennent au segment $[\sqrt{2}, 2]$. On note (P_n) ($n \in \mathbb{N}$) l'assertion suivante : « $u_n \in [\sqrt{2}, 2]$ ». L'assertion (P_0) est vraie car $\sqrt{2} \in [\sqrt{2}, 2]$. Si l'assertion (P_n) est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné, ceci signifie que $u_n \in [\sqrt{2}, 2]$; on en déduit, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$, que

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2 + 2} = 2;$$

il en résulte que l'assertion (P_{n+1}) est vraie. L'assertion (P_n) est donc vraie au cran initial ($n = 0$) et héréditaire; elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (principe de récurrence).

- Discutez suivant la valeur de $x \in \mathbb{R}$ le signe du trinôme $x^2 - x - 2$. Le discriminant vaut $1 - 4(-2) = 9$; les deux racines de ce trinôme sont donc $(1 \pm \sqrt{9})/2$, soit -1 et 2 ; le trinôme est du signe du coefficient dominant (ici 1), donc $+$, dans $] -1, 2[$; du signe $-$ dans $] -\infty, -1[$ et $]2, +\infty[$.
- Montrez que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante. On a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2 + u_n - u_n^2 = -(u_n^2 - u_n - 2) \geq 0$$

car $u_n \in [\sqrt{2}, 2] \subset] -1, 2[$ et que le trinôme $x^2 - x - 2$ est négatif entre ses racines -1 et 2 (d'après le résultat établi à la question précédente). On a donc $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$, soit donc $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante.

- La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet-elle une limite réelle ℓ ? Si oui, quelle est la valeur de ℓ ? La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante majorée (par 2). Elle est donc convergente (proposition 1.2 du photocopié) vers une limite réelle $\ell \leq 2$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc en particulier en ℓ , on a $\ell = \sqrt{2+\ell}$ par passage à la limite dans la relation inductive $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc $\ell^2 - (2+\ell) = 0$, soit $\ell = -1$ ou $\ell = 2$; le cas $\ell = -1$ est à oublier car $\ell \geq \sqrt{2}$ puisque $u_0 = \sqrt{2}$ et que la suite est croissante. On a donc par élimination $\ell = 2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1/1000 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Donnez un exemple d'une telle fonction f (pensez à modifier par exemple la fonction exponentielle dont vous tracerez le graphe sur \mathbb{R}). La fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto -1/1000 + \exp(x)$$

convient; son graphe (réalisé ici avec Sage) est affiché sur la figure G.1 ci-dessus.

- Montrez que pour tout nombre réel $c \geq 0$, il existe au moins un nombre réel x_c tel que $f(x_c) = c$. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1/1000 < 0$, il existe un seuil $-M < 0$ tel que $f(a) < -1/2000 < 0$ dès que $a < -M$. De même, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe, pour tout $c \geq 0$, un seuil $M_c > 0$ tel que $f(b) \geq c + 1$ dès que $b \geq M_c$. On prend $a < -M$ et $b > M_c$; d'après

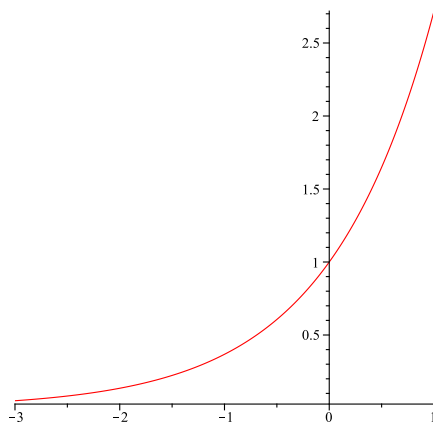


FIGURE G.1. Le graphe de $x \mapsto \exp(x)$ au dessus de $[-3, 1]$ (figure de l'exercice 4, item 1)

le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b])$ est un intervalle (corollaire 2.1 du polycopié) puisque f est continue, ce qui implique que f prend au moins une fois sur $[a, b]$ la valeur intermédiaire $c \in [0, c + 1[\subset [f(a), f(b)]$.

- On observe graphiquement que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ pour deux nombres réels $a < b$. Décrire une démarche algorithmique permettant de calculer de manière approchée un zéro $x_0 \in]a, b[$ de f lorsque la fonction f et les nombres a et b sont connus. Il s'agit de l'algorithme de dichotomie ; on initie cet algorithme avec $x = a$ et $y = b$ et on procède ainsi (en pseudo-code Python) :

```
x = a; y = b
u = f((x+y)/2)
while u <> 0 :
    if u*f(x) < 0:
        x = x; y = (x+y)/2
    else :
        x = (x+y)/2; y = y
    u = f((x+y)/2)
return (x+y)/2
```

Toute tentative de transcription de ce code en langage non algorithmique mais suffisamment explicite était évidemment ici admise ; on exigeait juste que le processus de décision `if ... else ...` soit clairement explicité, ainsi que le recours au point milieu $(x+y)/2$ à chaque cran de la boucle (ici `while`).

Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS2, 1h30

Exercice 1. Déterminez pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse. Dans chaque cas, justifiez votre réponse soit à l'aide d'une démonstration (si vous pensez que l'assertion est vraie), soit en exhibant un contre-exemple (si vous pensez que l'assertion est fausse).

- (1) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée en valeur absolue sur $[0, 1]$, f est continue sur $[0, 1]$. Cette assertion est fausse : la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$ est une fonction bornée en valeur absolue par 1 sur $[0, 1]$ mais n'est pas continue sur $[0, 1]$ car 1 est un point de discontinuité puisque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 \neq f(1) = 0.$$

- (2) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors f est bornée en valeur absolue sur $[0, 1]$. Cette assertion est vraie : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles est minorée et majorée sur $[a, b]$; de plus les extrema sont réalisés sur $[a, b]$ (il s'agit du théorème 2.2 du polycopié).
- (3) La fonction $x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur \mathbb{R} . Cette assertion est vraie : on dispose en effet de l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||y| - |x|| \leq |x - y|$$

(inégalité triangulaire (1.5) du polycopié). Si $|x - y| \leq \epsilon$, on a donc $||y| - |x|| \leq |x - y| \leq \epsilon$. La clause (2.11) de la définition 2.9 du polycopié est donc satisfaite si l'on convient de poser $\eta(\epsilon) = \epsilon$.

Exercice 2. On définit la fonction f suivante sur \mathbb{R} :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x \sin(x) \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (1) Vérifier que f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et calculer le nombre dérivé $f'(x_0)$ en un tel point. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto \cos(x)$. La fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est aussi dérivable sur \mathbb{R}^* comme fonction composée de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x,$$

dérivable sur \mathbb{R}^* et de dérivée sur cet ouvert $x \in \mathbb{R}^* \mapsto -1/x^2$, et de la fonction

$$y \in \mathbb{R} \mapsto \sin(y)$$

(de dérivée $y \in \mathbb{R} \mapsto \cos(y)$). La fonction composée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(1/x)$ est donc dérivable (comme composée de fonctions dérivables) sur \mathbb{R}^* , de dérivée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto (-1/x^2) \times \cos(1/x)$ (formule de Leibniz sur la dérivation des fonctions composées). La fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R}^* comme produit de trois fonctions dérivables. Le nombre dérivé vaut (d'après les règles de calcul rappelées page 48 du polycopié) :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \sin(x_0) \sin(1/x_0) + x_0 \cos(x_0) \sin(1/x_0) - x_0 \frac{\sin(x_0) \cos(1/x_0)}{x_0^2} \\ &= \sin(x_0) \sin(1/x_0) + x_0 \cos(x_0) \sin(1/x_0) - \frac{\sin(x_0)}{x_0} \cos(1/x_0). \end{aligned}$$

- (2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $|\sin(x) \sin(1/x)| \leq 1$ car la fonction sinus est bornée en valeur absolue par 1 sur \mathbb{R} . On a donc $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$; cette inégalité reste vraie en $x = 0$ car les deux membres sont nuls. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |x|.$$

Si $|x| \leq \eta = \epsilon$, on a donc $|f(x)| \leq \epsilon$. Ceci implique

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

- (3) Montrer que la fonction f est aussi dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. On a

$$\forall h \in \mathbb{R}, |f(h)| = |f(0+h) - f(0)| \leq |h| |\sin(h)|.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} |\sin(h)| = 0$, on peut écrire

$$f(0+h) = f(0) + 0 \times h + o(h).$$

La fonction f est donc dérivable en $x_0 = 0$ et de nombre dérivé égal à $f'(0) = 0$. On invoque ici la proposition 2.4 du cours pour présenter la dérivabilité en 0 sous la forme de *différentiabilité* à l'origine. On aurait pu se contenter de montrer que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (\sin(h) \sin(1/h)) = 0,$$

d'après le lemme des gendarmes (puisque $|\sin(h) \sin(1/h)| \leq |\sin(h)|$ pour tout h), ce qui revient aussi à dire que f est dérivable en 0, de nombre dérivé en ce point $f'(0) = 0$.

- (4) La limite

$$\lim_{\substack{x_0 \rightarrow 0 \\ x_0 \neq 0}} f'(x_0)$$

existe-t-elle? La fonction f' est-elle continue sur \mathbb{R} tout entier? On rappelle que, si $x_0 \neq 0$,

$$f'(x_0) = \sin(x_0) \sin(1/x_0) + x_0 \cos(x_0) \sin(1/x_0) - \frac{\sin(x_0)}{x_0} \cos(1/x_0).$$

La fonction f' est continue sur \mathbb{R}^* comme somme de produits de composées de fonctions continues. Si $x_k = 1/(2k\pi)$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on a

$$\cos(1/x_k) = \cos(2k\pi) = 1$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} \times \cos(1/x_k) = 1.$$

De plus $|\sin(1/x_k)| \leq 1$ et $|\cos(x_k) \sin(1/x_k)| \leq 1$. On a donc, compte tenu de l'expression de $f'(x_0)$ lorsque $x_0 \in \mathbb{R}^*$:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f'(x_k) = -1.$$

Comme la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini et que la suite $(f'(x_k))_{k \geq 1}$ tend vers $-1 \neq f'(0)$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x_0)$ n'existe pas dans \mathbb{R} . La fonction f' n'est donc pas continue en $x_0 = 0$.

Exercice 3. Les limites suivantes existent-elles ? Si oui, les calculer ; sinon, justifier pourquoi elles n'existent pas :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{x^3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\pi x/2), \quad \lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 16} \right).$$

- Pour la première limite (forme indéterminée 0/0), on tente d'appliquer la règle de l'Hôpital ; celle ci permet d'affirmer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^3} \right) = (\text{si elle existe}) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{3x^2} \right).$$

Ce n'est pas gagné car on trouve toujours au second membre une indétermination 0/0. Mais on peut insister et invoquer deux fois encore la règle de l'Hôpital :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{3x^2} \right) &= (\text{si elle existe}) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x}{6x} \right) \\ &= (\text{si elle existe}) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos x}{6} \right) = -1/6. \end{aligned}$$

On trouve donc au final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^3} \right) = -1/6.$$

- La seconde limite n'existe pas : en effet, si $x = x_k = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), on a $\cos((4k + 1)\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, tandis que, si $x = \tilde{x}_k = 4k\pi$, on a $\cos(\pi\tilde{x}_k/2) = \cos(2k\pi) = 1$. La limite n'existe pas car 0 et 1 sont des limites distinctes respectivement pour les deux suites $(\cos(\pi x_k/2))_{k \geq 1}$ et $(\cos(\pi \tilde{x}_k/2))_{k \geq 1}$ tandis que les suites $(x_k)_{k \geq 1}$ et $(\tilde{x}_k)_{k \geq 1}$ tendent toutes les deux vers $+\infty$.
- On applique (juste une fois cette fois) la règle de l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 16} \right) = \frac{0}{0} = (\text{si elle existe}) \lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{\pi \cos(\pi x)}{2x} \right) = \frac{\pi}{-8} = -\frac{\pi}{8}.$$

Exercice 4.

- (1) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} (avec $a < b$). Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. « Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ » (c'est l'énoncé du théorème 2.4 du polycopié).

- (2) Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable jusqu'à l'ordre 3 en tout point de I et s'annulant en au moins 4 points distincts de I . Montrer que la fonction dérivée d'ordre 3 (notée f''') s'annule au moins une fois dans I . La fonction f s'annule en quatre points $\alpha < \beta < \delta < \gamma$ distincts de I . On peut appliquer le théorème de Rolle à f sur chacun des trois segments $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ et $[\gamma, \delta]$ puisque $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta) = 0$. La fonction f' s'annule donc en trois points distincts $\alpha' \in]\alpha, \beta[$, $\beta' \in]\beta, \gamma[$, $\gamma' \in]\gamma, \delta[$. On reprend donc le raisonnement avec f' (encore dérivable sur I et telle que l'on ait, cette fois aux trois points $\alpha' < \beta' < \gamma'$, $f'(\alpha') = f'(\beta') = f'(\gamma') = 0$) en utilisant Rolle sur les deux segments $[\alpha', \beta']$ et $[\beta', \gamma']$. La fonction f'' s'annule donc en deux points distincts $\alpha'' \in]\alpha', \beta'[$ et $\beta'' \in]\beta', \gamma'[$. On peut recommencer avec Rolle une dernière fois (car f'' est encore dérivable sur I et que $f''(\alpha'') = f''(\beta'') = 0$), cette fois sur le segment $[\alpha'', \beta'']$ en prenant pour fonction f'' . La fonction f''' s'annule donc en au moins un point de $]\alpha'', \beta''[$, donc de I .

Exercice 5.

- (1) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} (avec $a < b$). Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. « Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ » (c'est l'énoncé du corollaire 2.2 du polycopié).
- (2) Montrer que si x et y sont deux nombres réels tels que $0 \leq x < y < \pi/2$, on a

$$|\tan(y) - \tan(x)| \leq \frac{|y - x|}{(\cos(y))^2}.$$

La fonction $\xi \mapsto \tan(\xi)$ est continue sur $] -\pi/2, \pi/2[$, donc sur le segment $[x, y] \subset [0, \pi/2[\subset] -\pi/2, \pi/2[$, dérivable sur $]x, y[$ (car sur $] -\pi/2, \pi/2[$), de dérivée

$$\xi \in] -\pi/2, \pi/2[\mapsto \frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

D'après la formule des accroissements finis (rappelée à la question 1 avec ici $a = x$ et $b = y$), on a

$$\tan(y) - \tan(x) = (y - x) \frac{1}{\cos^2(c)}$$

pour un certain $c \in]x, y[$. Comme la fonction \cos est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et que $0 \leq x < c < y < \pi/2$, on a $\cos^2 c \geq \cos^2 y$. On a donc

$$|\tan(y) - \tan(x)| = |y - x| \frac{1}{\cos^2(c)} \leq \frac{|y - x|}{(\cos(y))^2}.$$

ANNEXE I

Annales 2014-2015, texte du DM1 et corrigé

Exercice 1

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Vous justifierez votre réponse chaque fois soit avec une démonstration, soit avec un contre-exemple (suivant que vous pensiez que l'assertion en question soit vraie ou fausse). Si A est une partie non vide de \mathbb{R} , on note $\sup A$ la borne supérieure de A .

- (1) Une partie finie non vide A de \mathbb{R} contient toujours sa borne supérieure $\sup A$.
- (2) Si A est une partie non vide de \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in A, \quad x \leq 5,$$

alors $\sup A \leq 5$.

- (3) Si A est une partie non vide de \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in A, \quad x < 5,$$

alors $\sup A < 5$.

- (4) Si A et B sont deux parties non vides bornées de \mathbb{R} (c'est-à-dire toutes deux incluses dans un même segment $[-M, M]$) et que l'on note

$$A + B := \{a + b; a \in A, b \in B\},$$

alors

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

- (5) Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels converge vers une limite réelle si et seulement si chaque suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite réelle ;
- (6) Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels converge vers une limite réelle ℓ si et seulement si la suite $(|x_n|)_{n \geq 1}$ converge vers $|\ell|$.
- (7) Si A est une partie non vide de \mathbb{R} et que $a = \sup A$, le sous-ensemble $A \cap]a - 1/10^N, a]$ est non vide pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.
- (8) Si A est une partie non vide de \mathbb{R} et que a est un majorant de A tel que le sous-ensemble $A \cap]a - 1/10^N, a]$ soit non vide pour tout $N \in \mathbb{N}$, alors $a = \sup A$.

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels. On suppose :

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [-M, M] \quad (*)$$

Quel théorème permet d'affirmer qu'il existe au moins une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers l'infini ?

2. Donner un exemple d'une suite de nombres réels $(u_n)_{n \geq 0}$ divergente et vérifiant tout de même (*).

3. On suppose maintenant que l'on a toujours (*), mais cette fois aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5} \right) = L \quad (**).$$

et que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers une limite réelle ℓ (une telle sous-suite existe d'après la question 1). En utilisant (**), montrer alors que la suite $(u_{5\varphi(n)})_{n \geq 0}$ est aussi convergente et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{5\varphi(n)} = 5(L - \ell).$$

4. Toujours en utilisant (**), montrer par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$ que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{5^k \varphi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers une limite ℓ_k et que l'on a

$$\ell_0 = \ell \quad \text{et} \quad \ell_{k+1} = 5(L - \ell_k).$$

5. Vérifier que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5) \left(\ell_k - \frac{5L}{6} \right).$$

En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^k \left(\ell - \frac{5L}{6} \right).$$

En utilisant le fait que tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sont dans $[-M, M]$, déduire de ce qui précède que $\ell = 5L/6$.

6. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle une suite convergente dans \mathbb{R} ? Si oui, quelle est la valeur de sa limite ?

CORRIGÉ DU DM1 - 2014-2015

Exercice 1. 1) Soit A une partie non vide, finie de \mathbb{R} , c'est-à-dire

$$A = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq k \leq n$. Alors A est majorée par $M := \max\{x_k; 1 \leq k \leq n\}$ et $M \in A$, donc $\boxed{\sup(A) = \max(A) \in A}$.

2) Comme $\forall x \in A, x \leq 5$ alors A est majorée par 5. A est non vide, donc $\sup(A)$ existe et c'est le plus petit des majorants ; on a donc en particulier $\boxed{\sup(A) \leq 5}$.

3) Considérons l'ensemble $\boxed{A := \{5 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $5 - \frac{1}{n} < 5$ mais $\sup(A) = 5$. En effet, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $5 - \varepsilon \leq 5 - \frac{1}{N} \leq 5$. C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, 5 - \varepsilon \leq x \leq 5$, et comme 5 est un majorant de A , on en déduit que $\boxed{5 = \sup(A)}$.

4) Soient A et B deux parties bornées de \mathbb{R} (non vides). On note $s_A = \sup(A)$ et $s_B = \sup(B)$ (elles existent car A et B sont non vides et majorées). Montrons que $\sup(A + B) = s_A + s_B$.

D'une part, pour tout $a \in A, a \leq s_A$ et, pour tout $b \in B, b \leq s_B$, donc pour tout $x \in A + B, x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$ par définition de $A + B$, et on a $a + b \leq s_A + s_B$. Donc $\sup(A + B) \leq s_A + s_B$.

Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $a \in A$ et $b \in B$ tels que $s_A + s_B - \varepsilon \leq a + b \leq s_A + s_B$. Or, par définition de $s_A = \sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $s_A - \frac{\varepsilon}{2} \leq a \leq s_A$. De même, il existe $b \in B$ tel que $s_B - \frac{\varepsilon}{2} \leq b \leq s_B$. Par somme, $s_A - \frac{\varepsilon}{2} + s_B - \frac{\varepsilon}{2} \leq a + b \leq s_A + s_B$, *i.e.* $s_A + s_B - \varepsilon \leq a + b \leq s_A + s_B$. Donc $\boxed{\sup(A + B) = s_A + s_B}$.

5) Supposons que $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, alors, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Soit φ une extractrice. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$ (\star). Nous rappellerons la démonstration de (\star) ci-dessous. En particulier, pour tout $n \geq N, \varphi(n) \geq n \geq N$, donc $|x_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$, ou encore, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell}$.

Montrons, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. Par définition, $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. On a $\varphi(0) \geq 0$ (puisque $\varphi(n) \in \mathbb{N}$). Supposons que $\varphi(n) \geq n$. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante. Donc, par hypothèse de récurrence, $\varphi(n+1) > n$, *i.e.* $\varphi(n+1) \geq n+1$. D'où (\star).

Pour la réciproque, supposons que toute suite extraite de (x_n) est convergente. En particulier, avec $\varphi(n) = n$, la suite extraite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente. Donc l'équivalence est vraie. Si, si, $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{\mathbb{N}}$...

6) Si $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors $(|x_n|)_{\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors, par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \ell| \leq \varepsilon$. Or, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, ||a| - |b|| \leq |a - b|$ (un doute? allez voir l'inégalité triangulaire (1.5) page 9 du fascicule). Donc, pour $n \geq N, ||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell| \leq \varepsilon$.

La réciproque est fautive. On considère la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}, |x_n| = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = 1$, mais $(x_n)_{\mathbb{N}}$ diverge puisqu'elle a deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.

7) Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \sup(A)$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, $\forall x \in A, x \leq a$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors, d'après ce qui précède, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{10^N}$, il existe $x \in A$ tel que $a - \frac{1}{10^N} \leq x \leq a$. Cela signifie que l'ensemble $A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$ est non vide.

Remarque : on a équivalence entre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon < x \leq a.$$

8) Par hypothèse a est un majorant de A . Il reste à montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, a - \varepsilon \leq x \leq a$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^N} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{10^N} \leq \varepsilon$. Par ailleurs, l'ensemble $A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$ est non vide par hypothèse, donc il existe $x \in A \cap]a - \frac{1}{10^N}; a]$, c'est-à-dire, il existe $x \in A$ vérifiant $a - \frac{1}{10^N} < x \leq a$. Donc, il existe $x \in A$, tel que $a - \varepsilon \leq a - \frac{1}{10^N} < x \leq a$. D'où $\boxed{a = \sup(A)}$.

Exercice 2.

1) C'est le théorème de Bolzano-Weierstraß : toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente.

2) Considérons la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée puisque, pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$, mais $(u_n)_{\mathbb{N}}$ diverge.

3) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5}\right) = L$ et que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ . **Attention, φ est fixée maintenant...**

On note $v_n = u_n + \frac{u_{5n}}{5}$, alors la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers L , donc la suite extraite $(v_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers L . Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{5\varphi(n)} = 5(v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)})$, alors la suite $(u_{5\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ est convergente comme somme de suites convergentes et, d'après ce qui précède, elle converge vers $5(L - \ell)$.

4) **Remarque :** pour simplifier la rédaction, montrons que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k vérifiant $\ell_k = -5(L - \ell_{k-1})$.

La suite $(u_{\varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_0 = \ell$. Pour $k = 1$, d'après la question 3), la suite $(u_{5^1 \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et on a $\ell_1 = 5(L - \ell_0)$.

Soit $k \geq 1$. Supposons que $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et on a $\ell_k = 5(L - \ell_{k-1})$. On note $\psi(n) = 5^k \varphi(n)$. Alors, par hypothèse de récurrence, $(u_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et, d'après $(\star\star)$, la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie dans la question 3), converge vers L . Donc, la suite extraite $(v_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers L , et, par somme, la suite $(v_{\psi(n)} - u_{\psi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers $L - \ell_k$. Comme, pour $n \in \mathbb{N}$, $5(v_{\psi(n)} - u_{\psi(n)}) = u_{5\psi(n)}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{5\psi(n)} = 5(L - \ell_k)$, c'est-à-dire $(u_{5^{k+1} \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers un réel, qu'on note ℓ_{k+1} , et on a $\ell_{k+1} = 5(L - \ell_k)$. Donc, par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k et on a $\ell_k = 5(L - \ell_{k-1})$.

5) • Soit $k \in \mathbb{N}$, alors, d'après la question précédente,

$$\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = 5(L - \ell_k) - \frac{5L}{6} = \frac{25L}{6} - 5\ell_k = -5\left(\ell_k - \frac{5L}{6}\right).$$

D'où, pour $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = -5\left(\ell_k - \frac{5L}{6}\right)}$.

• Soit $k \in \mathbb{N}$, $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = -5\left(\ell_k - \frac{5L}{6}\right)$. Pour $k \geq 1$, $\ell_k - \frac{5L}{6} = -5\left(\ell_{k-1} - \frac{5L}{6}\right)$, donc

$$\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5) \times (-5)\left(\ell_{k-1} - \frac{5L}{6}\right) = (-5)^2\left(\ell_{k+1-2} - \frac{5L}{6}\right).$$

Supposons $k \geq p$ et $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^p\left(\ell_{k+1-p} - \frac{5L}{6}\right)$ (vérifiée pour $p = 1$). Alors $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^p \times (-5)\left(\ell_{k+1-p-1} - \frac{5L}{6}\right)$ car

$$\ell_{k+1-p} - \frac{5L}{6} = -5\left(\ell_{k+1-p-1} - \frac{5L}{6}\right).$$

D'où $\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^{p+1}\left(\ell_{k+1-(p+1)} - \frac{5L}{6}\right)$. En particulier, pour $p = k$,

$$\boxed{\ell_{k+1} - \frac{5L}{6} = (-5)^{k+1} \times (-5)\left(\ell_0 - \frac{5L}{6}\right)}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-M; M]$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les limites des suites extraites $(u_{5^k \varphi(n)})_{\mathbb{N}}$ appartiennent à $[-M; M]$, i.e. $\ell_k \in [-M; M]$. Notons $x_k = \ell_k - \frac{5L}{6}$, on vient de prouver que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'après ce qui précède, on a aussi $x_k = (-5)^k\left(\ell - \frac{5L}{6}\right)$. Supposons que $\ell \neq \frac{5L}{6}$, c'est-à-dire, $\ell - \frac{5L}{6} \neq 0$. Alors, la suite extraite $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^{2k} = +\infty$.

Par conséquent, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Contradiction. Donc $\boxed{\ell = \frac{5L}{6}}$.

6) Reprenons. On suppose que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{5n}}{5} \right) = L.$$

Puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une suite extraite convergente. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite convergente. Alors, on vient de montrer que sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{5L}{6}$. C'est-à-dire, toute suite extraite convergente converge vers la même limite $\frac{5L}{6}$.

On en déduit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers $\frac{5L}{6}$. C'est la propriété 1.10 page 10 du fascicule.

Remarque sur la question 3), erreur fréquente : suite extraite de suite extraite. Notons $w_n = u_{\varphi(n)}$; on définit ainsi une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On peut alors définir une suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ d'extractrice ψ , c'est-à-dire $w_{\psi(n)}$ et on a $w_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}$ et non $u_{\psi(\varphi(n))}$!! Pensez à la suite extraite d'indice impair :

$$(w_n) = (u_1; u_3; u_5; \dots; u_{2n+1}; \dots)$$

définie par $w_n = u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec $\varphi(n) = 2n + 1$. Une suite extraite de cette suite extraite est une suite "dont les indices sont impairs, mais on ne les prend pas tous". Exemple $(w_{2n}) = (u_1; u_5; u_9; \dots; u_{4n+1}; \dots)$ avec $\psi(n) = 2n$, et on a $w_{2n} = u_{4n+1} = u_{\varphi(\psi(n))}$.

Annales 2014-2015, texte du DM2 et corrigé

Exercice 1

- (1) Donner un exemple d'une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui ne soit dérivable que sur \mathbb{R}^* mais admette pourtant des dérivées à gauche et à droite (distinctes) en $x_0 = 0$.
- (2) On considère un nombre $\alpha > 0$. Montrer que la fonction

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x|^\alpha \cos(1/|x|) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R} . Quelle condition nécessaire et suffisante faut-il imposer au nombre $\alpha > 0$ pour que cette fonction soit dérivable sur \mathbb{R} ? Calculer dans ce cas la fonction dérivée f'_α (on distinguera les trois cas $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, $x_0 > 0$ pour calculer en fonction de α et de x_0 la valeur du nombre dérivé $f'_\alpha(x_0)$).

Exercice 2

- (1) Soient $M > 0$, I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction continue sur I , dérivable et de nombre dérivé $f'(x_0) \in [-M, M]$ en tout point x_0 intérieur à I . Montrer que f est uniformément continue sur I . L'hypothèse de dérivabilité en tout point intérieur est-elle vraiment nécessaire dans le cas où l'intervalle I est un segment $[a, b]$? Préciser bien le théorème utilisé pour justifier la réponse à cette dernière question.
- (2) Donner un exemple de fonction uniformément continue sur \mathbb{R} , dérivable en tout point de \mathbb{R}^* , mais non dérivable en 0 (penser à exploiter l'inégalité triangulaire telle qu'elle est énoncée en (1.5) dans le polycopié).

Exercice 3. Soit f et g les fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 2x - 3.$$

- (1) Soient a et b deux nombres réels. Donner l'équation de la tangente $T_{f,a}$ au graphe de f au point $(a, f(a))$, puis celle de la tangente $T_{g,b}$ au graphe de g au point $(b, g(b))$.
- (2) Trouver la relation que doivent satisfaire a et b pour que les deux tangentes $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ soient parallèles. Existe-t-il des couples de valeurs (a, b) tels que les tangentes $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ soient confondues? Si oui, les déterminer.
- (3) Soit F la fonction $F : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) + ig(x) \in \mathbb{C}$. Montrer que F est dérivable en tout point de \mathbb{R} (comme fonction à valeurs complexes) et

calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le nombre dérivé $F'(a)$. Donner (toujours en fonction de a) l'équation cartésienne

$$A(a)x + B(a)y + C(a) = 0$$

de la tangente à la courbe paramétrée par $x \mapsto F(x)$ au point $F(a)$.

Exercice 4

Évaluer les limites suivantes en expliquant précisément la démarche utilisée pour les calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sin(x))^2}{1 - \cos(x)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(x))} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^{1/(1-x)} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x(\sin(8x))/x \right).$$

Exercice 5

- (1) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, dérivable à l'ordre n en tout point de \mathbb{R} et que la fonction dérivée $f^{[n]}$ (à l'ordre n) est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = H_n(x) \exp(-x^2/2).$$

où H_n est une fonction polynomiale de degré exactement n (on déterminera aussi la relation inductive permettant de calculer H_{n+1} à partir de H_n).

- (2) Que valent les limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{[n]}(x)$ (pour n fixé dans \mathbb{N}) ?
- (3) Toujours par récurrence sur n , démontrer en utilisant le théorème de Rolle 2.4 du polycopié (ou une petite variante, lorsque le segment $[a, b]$ se trouve remplacé par $] -\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme H_n admet exactement n racines réelles distinctes. Ce polynôme H_n peut-il avoir d'autres racines complexes que celles là ?

CORRIGÉ DU DM2 - 2014-2015

Exercice 1.

1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x|$; elle est continue sur \mathbb{R} .

Comme, pour $x > 0$, $f(x) = x$ et pour $x < 0$, $f(x) = -x$, alors la fonction est dérivable sur \mathbb{R}^* (et on a, pour $x > 0$, $f'(x) = 1$ et pour $x < 0$, $f'(x) = -1$). En 0, soit $h \in \mathbb{R}$, $\frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \frac{|h|}{h}$, donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{|h|}{h} = -1$. Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

2) • Soit $\alpha > 0$. Par définition, $|x|^\alpha = \exp(\alpha \ln(|x|))$, donc, par théorèmes généraux, f est continue sur \mathbb{R}^* .

En 0,

$$|f_\alpha(x)| = |x|^\alpha \left| \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) \right| \leq |x|^\alpha.$$

Comme $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} |f_\alpha(x)| = 0$, c'est-à-dire, f est continue en 0.

• Toujours par théorèmes généraux, f_α est dérivable sur \mathbb{R}^* .

En 0, on considère le taux d'accroissement $\frac{f_\alpha(h) - f_\alpha(0)}{h - 0} = \frac{|h|^\alpha \cos\left(\frac{1}{|h|}\right)}{h}$.

(i) Si $\alpha > 1$, $\left|\frac{f_\alpha(h)}{h}\right| \leq |h|^{\alpha-1}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(h)}{h} = 0$, et f_α est dérivable en 0.

(ii) Si $\alpha = 1$, $\cos\left(\frac{1}{|h|}\right)$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, donc f_1 n'est pas dérivable en 0.

(iii) En effet, si $h_n = \frac{1}{2\pi n}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{|h_n|}\right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(h_n)}{h_n} = +\infty$, donc f_α n'est pas dérivable en 0.

Calcul des dérivées : • Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$, $f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x)) \cos(1/x)$, donc $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos(1/x) + x^\alpha \cdot \frac{\sin(1/x)}{x^2}$, d'où, pour $\alpha > 0$ et $x > 0$,

$$f'_\alpha(x) = x^{\alpha-2} \left(\alpha x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

• Pour $\alpha > 0$ et $x < 0$, $f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(-x)) \cos(-1/x)$, donc

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= -\frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(-x)) \cos(-1/x) + (-x)^\alpha \cdot \frac{\sin(-1/x)}{(-x)^2} \\ &= \frac{\alpha}{|x|} \cdot |x|^\alpha \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) + |x|^{\alpha-2} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right), \end{aligned}$$

d'où, pour $\alpha > 0$ et $x < 0$, $f'_\alpha(x) = |x|^{\alpha-2} \left(\alpha |x| \cos\left(\frac{1}{|x|}\right) + \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) \right).$

Et pour $\alpha > 1, x = 0$, $f'_\alpha(0) = 0$.

Attention : l'existence de la dérivée en 0 pour $\alpha > 1$ ne signifie pas que f'_α est continue en 0, en d'autres termes, on n'a pas forcément $\lim_{x \rightarrow 0} f'_\alpha(x) = f'_\alpha(0)$. Ici, il faut distinguer, $\alpha > 2$ et $1 < \alpha \leq 2$...

Exercice 2.

1) • Soient $a < b \in I$, alors f est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ car f est dérivable à l'intérieur de I . Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[a; b]$, on a $|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{x \in]a; b[} |f'(x)|$. Or, par hypothèse,

pour tout $x \in]a; b[$, $|f'(x)| \leq M$, donc $\forall a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, prenons $\eta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, alors, pour tout $a, b \in I$, tels que $|a - b| \leq \eta$, on a

$|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a| \leq M \cdot \eta = \varepsilon$, c'est-à-dire f est uniformément continue sur I .

• Si $I = [a; b]$ est un segment, alors, d'après le théorème de Heine, f étant continue sur $[a; b]$, elle est uniformément continue sur $[a; b] = I$. Donc l'hypothèse de dérivabilité n'est pas nécessaire.

2) Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Alors f est continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* , non dérivable en 0 (car sa dérivée à droite en 0 est 1, et sa dérivée à gauche -1), mais f est uniformément continue sur \mathbb{R} . En effet, on sait que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (inégalité triangulaire inverse), donc, soit $\varepsilon > 0$, prenons $\eta = \varepsilon > 0$, alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq \eta$, on a $|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq \eta = \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* mais pas en 0.

Exercice 3.

1) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = a^2 - 4a + 3$, $f'(a) = 2a - 4$. Donc l'équation de la tangente au graphe de f en $(a; f(a))$ est donnée par $y = (x - a)f'(a) + f(a)$. C'est-à-dire

$$\boxed{T_{f,a} : y = (2a - 4)x - a^2 + 3.}$$

De même pour la fonction g , on a $T_{g,b} : y = (x - b)g'(b) + g(b)$ d'où

$$\boxed{T_{g,b} : y = (-2b + 2)x + b^2 - 3.}$$

2) • Les droites $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même vecteur directeur. D'après leur équations \vec{u} de coordonnées $(1; 2a - 4)$ dirige $T_{f,a}$ et \vec{v} de coordonnées $(1; -2b + 2)$ dirige $T_{g,b}$. Donc $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow 2a - 4 = -2b + 2 \Leftrightarrow a = -b + 3$. Les droites $T_{f,a}$ et $T_{g,b}$ sont parallèles si et seulement si $a = -b + 3$.

• Elles sont confondues si et seulement si elles sont parallèles et ont un point en commun. D'où

$$(2a - 4)x - a^2 + 3 = (-2b + 2)x + b^2 - 3 \text{ avec } a = -b + 3. \text{ Or}$$

$$(2(3 - b) - 4)x - (3 - b)^2 + 3 = (2 - 2b)x - (b^2 - 6b + 9) + 3 = (2 - 2b)x - b^2 + 6b - 6,$$

$$\text{donc } (2a - 4)x - a^2 + 3 = (-2b + 2)x + b^2 - 3 \Leftrightarrow -b^2 + 6b - 6 = b^2 - 3 \Leftrightarrow 2b^2 - 6b + 3 = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 63 - 4 \times 6 = 12$, donc $b = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$.

On a bien, si $b = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ alors $a = 3 - b = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$, et si $b = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ alors $a = 3 - b =$

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{2}. \text{ Donc } \boxed{T_{f,a} = T_{g,b} \Leftrightarrow (a, b) = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } (a, b) = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right).}$$

3) • Soit F définie par $F(x) = f(x) + ig(x)$. F est dérivable en a si son taux d'accroissement $\frac{F(x) - F(a)}{x - a}$ admet une limite finie complexe. On a, pour $x \neq$

$$a, \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + i \frac{g(x) - g(a)}{x - a}. \text{ Comme } f \text{ et } g \text{ sont dérivables sur}$$

\mathbb{R} , on en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$, donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f'(a) + ig'(a). \text{ Donc, pour } a \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{F'(a) = (2a - 4a) + i(-2a + 2).}$$

• D'après la proposition 2.7 (page 42), comme F est dérivable en tout point a , on sait que la tangente à courbe représentant F a pour vecteur directeur $F'(a)$ de coordonnées $(f'(a); g'(a))$, d'après ce qui précède, et passe par $F(a)$ de coordonnées $(f(a); g(a))$.

Rappel : $z \in \mathbb{C}$ a pour coordonnées $(\operatorname{Re}(z); \operatorname{Im}(z))$ dans le plan.

Si on note $A(a)x + B(a)y + C(a) = 0$, l'équation de la tangente à la courbe représentant F alors $-B(a) = f'(a)$ et $A(a) = g'(a)$ (vecteur directeur d'une droite), puis $C(a) = g'(a)f(a) - f'(a)g(a)$ puisque la tangente passe par $F(a)$. D'où l'équation de la tangente au point d'affixe $F(a)$:

$$\boxed{g'(a)(x - f(a)) - f'(a)(y - g(a)) = 0} \text{ (calcul à faire).}$$

Exercice 4.

Pour la plupart des limites suivantes, nous allons appliquer la règle de l'Hôpital sous la forme de la proposition 2.10 du polycopié ou de la remarque 2.18 page 55,

c'est-à-dire f, g définies et continues sur $]a; b[\setminus \{x_0\}$, dérivables sur $]a; b[\setminus \{x_0\}$, telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$; alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

1) On considère les fonctions f et g continues et dérivables sur $[-1; 1]$ définies par $f(x) = \sin^2(x)$ et $g(x) = 1 - \cos(x)$, alors $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x)$ et $g'(x) = \sin(x)$, donc, pour $x \neq 0$, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2 \cos(x)$, d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$. D'après

la règle de l'Hôpital, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{1 - \cos(x)} = 2}$.

2) On considère les fonctions f et g continues et dérivables sur $[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}]$ définies par $f(x) = \ln(\cos(2x))$ et $g(x) = \ln(\cos(x))$, alors $f(0) = g(0) = 0$, $f'(x) = -\frac{2 \sin(2x)}{\cos(2x)}$ et $g'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Pour $x \neq 0$, sachant que $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, on a $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{4 \sin(x) \cos^2(x)}{\cos(2x) \sin(x)} = \frac{4 \cos^2(x)}{\cos(2x)}$, d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 4$.

D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(x))} = 4}$.

3) Soit $x \neq 0$, $\frac{2^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln(2)} - 1}{x}$. On considère les fonctions f et g dérivables sur \mathbb{R} définies par $f(x) = e^{x \ln(2)} - 1$ et $g(x) = x$. Alors $f'(x) = \ln(2) 2^x$ et $g'(x) = 1$, donc, par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ln(2)$. D'après la règle de

l'Hôpital, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln(2)}$.

4) Soit $x > 0, x \neq 1, x^{\frac{x}{1-x}} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{1-x}\right)$. On considère les fonctions f et g dérivables sur $]0; +\infty[$ définies par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = 1 - x$. Alors $f(1) = g(1) = 0$ et, pour $x > 0, x \neq 1, f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = -1$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1$.

D'après la règle de l'Hôpital, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$. Donc, par continuité de la fonction \exp en -1 , on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{1-x}} = e^{-1}}$.

5) Soit $x > 0, x^{\frac{\sin(8x)}{x}} = \exp\left(\frac{\sin(8x)}{x} \ln(x)\right)$. Comme \sin est dérivable en 0 et que sa dérivée est \cos , alors la limite du taux d'accroissement de \sin en 0 est $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$. Donc, pour $x > 0, \frac{\sin(8x)}{x} = 8 \times \frac{\sin(8x)}{8x} \rightarrow 8$ lorsque x tend vers 0. Donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(8x)}{x} \ln(x) = -\infty$, puis par composition

avec \exp , $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{\sin(8x)}{x}} = -\infty}$.

Exercice 5.

1) Par composition des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ qui sont de classes \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , la fonction $f : x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Pour $n = 1$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, donc

$$f'(x) = H_1(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

avec $H_1(x) = -x$ et H_1 est une fonction polynomiale de degré 1.

Pour $n = 2$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, donc $H_2(x) = x^2 - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que, pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ avec H_n fonction polynomiale de degré n . Alors, par produit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (-xH_n(x) + H'_n(x)) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. Comme $\deg(H_n) = n$, alors $\deg(H'_n) = n - 1$, donc $\deg(-xH_n) = n + 1$. On en déduit que $\deg(-xH_n + H'_n) = n + 1$. Donc, par récurrence, nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale de degré n notée H_n telle que $f^{(n)}(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

De plus, comme pour $n = 1$, nous avons $H_2(x) = -xH_1(x) + H'_1(x)$, alors nous avons la relation de récurrence, pour $n \geq 1$, $H_{n+1} = -xH_n(x) + H'_n(x)$.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$. Donc, par linéarité de la limite,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

3) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \neq 0$, alors, d'après la relation $f^{(n)} = H_n \times f$, les zéros de la fonction $f^{(n)}$ sont exactement les racines du polynôme H_n . Nous allons appliquer le théorème de Rolle à f puis de façon répétée aux dérivées de f jusqu'à l'ordre n pour montrer que $f^{(n)}$ admet n zéros distincts. Plus exactement nous allons utiliser le résultat de l'exercice A69 du photocopié : Rolle sur \mathbb{R} avec limites égales aux infinis (qui est aussi vrai sur un intervalle semi-borné fermé).

• Nous avons f (continue et) dérivable sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_{1,1} \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c_{1,1}) = 0$.

Pour f' , nous avons f' continue et dérivable sur $] -\infty; c_{1,1}[$, $f'(c_{1,1}) = 0$ et, d'après la question 5.2,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} H_1(x)f(x) = 0$, donc, il existe $c_{2,1} \in] -\infty, c_{1,1}[$ tel que $f''(c_{2,1}) = 0$.

De même sur $[c_{1,1}; +\infty[$, f' est dérivable, $f'(c_{1,1}) = 0$ et, d'après la question 5.2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_1(x)f(x) = 0$, donc, il existe $c_{2,2} \in]c_{1,1}; +\infty[$ tel que $f''(c_{2,2}) = 0$. Et nous avons $c_{2,1} < c_{2,2}$.

• Supposons que, jusqu'à un entier $k \in \{2; 3; \dots; n - 1\}$, il existe k nombres réels deux à deux distincts

$$c_{k,1} \in] -\infty; c_{k-1,1}[, c_{k,2} \in]c_{k-1,1}; c_{k-1,2}[, \dots, c_{k,k} \in]c_{k-1,k-1}; +\infty[$$

tels que $f^{(k)}(c_{k,j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq k$. Alors, nous savons que $f^{(k)}$ est dérivable sur \mathbb{R} donc continue et dérivable sur chaque intervalle $] -\infty; c_{k,1}[$,

$[c_{k,j}; c_{k,j+1}]$ et $[c_{k,k}; +\infty[$, avec $1 \leq j \leq k$ et que

$$f^{(k)}(c_{k,j}) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} H_k(x)f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} H_k(x)f(x) = 0.$$

Donc, en appliquant le théorème de Rolle à $f^{(k)}$ sur chacun des **intervalles deux à deux disjoints** ci-dessus, nous obtenons l'existence de $k + 1$ nombres réels deux à deux distincts, $c_{k+1,1} \in]-\infty; c_{k,1}[$, $c_{k+1,2} \in]c_{k,1}; c_{k,2}[$, \dots , $c_{k+1,k+1} \in]c_{k,k}; +\infty[$ tels que $f^{(k+1)}(c_{k+1,j}) = 0$ pour $1 \leq j \leq k + 1$.

Ainsi, par récurrence, nous obtenons au rang $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de n nombres réels deux à deux distincts $c_{n,1}, c_{n,2}, \dots, c_{n,n} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $1 \leq j \leq n$, $f^{(n)}(c_{n,j}) = 0$. Donc, d'après ce que nous avons dit plus haut, nous en déduisons que H_n admet n racines réelles deux à deux distinctes. Or H_n est une fonction polynomiale de degré n donc elle admet au plus n racines complexes (distinctes ou confondues), par conséquent, les racines de H_n sont exactement les n nombres réels distincts $c_{n,j}$ avec $1 \leq j \leq n$ et ce sont les seules racines possibles.

Annales 2014-2015, texte du DM3 et corrigé

EXERCICE 1 (intégrales de Wallis)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

1.a. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale W_n est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin^n(x)$ est une fonction à valeurs réelles continue sur $[0, \pi/2]$, donc une fonction intégrable au sens de Riemann sur ce segment (propositions 3.3 et 3.4 du polycopié¹).

1.b. Calculer W_0, W_1 et W_2 . Le calcul pour $n = 0$ et $n = 1$ se fait en exploitant le théorème fondamental de l'analyse (théorème 2.9 du polycopié) : si $a < b$ et que la fonction $F : X \in [a, b] \mapsto F(X)$ est une primitive d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur le segment $[a, b]$, on a

$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On a donc ici :

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = [X]_0^{\pi/2} = \pi/2, \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = [-\cos X]_0^{\pi/2} = 1.$$

On calcule W_2 en utilisant la formule de duplication pour la fonction cosinus ($\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, voir le cours d'analyse en S1) :

$$W_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{X}{2} - \frac{\sin(2X)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

1.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$. Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n = 0$? Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geq 0$ (car la fonction sinus s'annule en 0 et est croissante sur $[0, \pi/2]$) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin^n(x)$ est donc une fonction positive sur $[0, \pi/2]$. Du fait de la monotonie de l'opération de prise d'intégrale au sens de Riemann (inégalité (3.26) du polycopié), on a $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx \geq \int_0^{\pi/2} 0 dx = 0$. Sur $[\pi/4, \pi/2]$, la fonction sinus est minorée par $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. On a donc, d'après la relation de Chasles (proposition 3.11 du polycopié), pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \int_0^{\pi/4} \sin^n(x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^n(x) dx \\ &\geq \int_0^{\pi/4} 0 dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2^{-n/2} dx = 0 + 2^{-n/2} \frac{\pi}{4} > 0. \end{aligned}$$

1. On se réfère constamment dans ce corrigé au polycopié du cours (pour les renvois aux énoncés des résultats invoqués).

Il n'existe donc aucune valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $W_n = 0$.

1.d. *Montrer que la suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.* Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$ (par une récurrence immédiate). Toujours du fait de la monotonie de l'opération prise d'intégrale au sens de Riemann, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = W_n.$$

La suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est donc bien décroissante.

2.a. *À l'aide d'une intégration par partie, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On utilise comme suggéré dans l'énoncé la formule d'intégration par parties (proposition 3.15 du cours) en posant, si $n \in \mathbb{N}$, $g_{n,1}(X) = \sin^{n+1}(X)$ et $g_2(X) = -\cos(X)$ (primitive de la fonction sinus). On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \times \sin(x) dx = \int_0^{\pi/2} g_{n,1}(x) g_2'(x) dx \\ &= [g_{n,1}(x) g_2(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} g_{n,1}'(x) g_2(x) dx \\ &= (1 \times 0 - 0 \times (-1)) - (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \cos(x) \times (-\cos(x)) dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) (1 - \sin^2(x)) dx = (n+1)(W_n - W_{n+2}). \end{aligned}$$

(on a utilisé pour passer à la dernière ligne de cette suite d'égalités la relation trigonométrique $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). On en déduit, en ramenant tout au membre de gauche, que

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \iff W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

ce qui est bien la formule demandée.

2.b. *Montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n+1)W_n W_{n+1}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ? (Indication : on calculera w_0).* On a $w_0 = W_0 W_1 = \pi/2 \times 1$ d'après la question **1.b**. On va montrer que $w_n = w_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence. La propriété (P_n) que l'on souhaite établir est vraie au cran $n = 0$. Supposons la vérifiée au cran $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par définition de w_{n+1} :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= ((n+1)+1) W_{n+1} W_{(n+1)+1} = \\ &= (n+2) W_{n+1} W_{n+2} = ((n+2) W_{n+2}) W_{n+1} = ((n+1) W_n) W_{n+1} = w_0 \end{aligned}$$

d'après la formule inductive établie à la question **2.a** et le fait que (P_n) est ici supposée vraie. On a donc bien ainsi montré que

$$((P_n) \text{ vraie}) \implies ((P_{n+1}) \text{ vraie}) ;$$

Le résultat demandé est donc acquis par récurrence : la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ stationne à la valeur $w_0 = \pi/2$.

3.a. Justifier que, pour $n \geq 1$, $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et en déduire que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Comme la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante (question **1.d**), on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n-1} \geq W_n \geq W_{n+1} > 0$. Mais, on a aussi, d'après le résultat établi en **2.b**,

$$W_{n+1} = \frac{1}{W_n} \times \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad W_{n-1} = \frac{1}{W_n} \times \frac{\pi}{2n}.$$

On a donc, compte-tenu de ce que $W_{n-1} \geq W_n \geq W_{n+1} > 0$:

$$W_n \geq \frac{1}{W_n} \times \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{W_n} \times \frac{\pi}{2n} \geq W_n.$$

En multipliant ces deux inégalités par W_n et en prenant ensuite la racine carrée, on en déduit l'encadrement

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

demandé.

3.b. En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n$. On a $\sqrt{n} W_n \leq \sqrt{\pi/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la majoration de W_n établie à la question **3.a**. Mais on a aussi la minoration

$$\sqrt{n} W_n \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sqrt{\pi/2}$$

pour tout $n \geq 1$ (d'après cette fois la minoration de W_n établie à la même question **3.a**). Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^{-1/2} = 1,$$

on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\pi/2}$$

d'après le lemme des gendarmes (le terme général de la suite est encadré par les termes généraux de deux suites ayant même limite $\sqrt{\pi/2}$).

Les intégrales de Wallis permettent d'obtenir l'équivalent de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Cette magnifique formule (si, si...) se traduit par $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Nous allons utiliser cette formule pour comparer $n!$ et n^n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(v_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{n!}{n^n}$. À l'aide de l'équivalent de Stirling, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. D'après la formule de Stirling (admise ici) on a, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{n!}{n^n} = (e^{-n} \times \sqrt{2\pi n}) + \frac{o(1)}{n^n}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e^{-n} \times \sqrt{2\pi n} = \exp\left(-n + \frac{\ln(2\pi n)}{2}\right) = \exp(\ln(2\pi)/2 - n + \ln(n)/2).$$

Comme on a, toujours lorsque n tend vers $+\infty$,

$$-n + \ln(n)/2 = -n \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ln(n)}{n}\right) = -n(1 - o(1)),$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + \ln(n)/2) = -\infty.$$

En prenant l'exponentielle, on a donc

$$e^{-n} \times \sqrt{2\pi n} = o(1)$$

lorsque n tend vers l'infini ; comme c'est aussi le cas pour $o(1)/n^n$ puisque la suite $(n^n)_{n \geq 1}$ tend évidemment vers $+\infty$ du fait que $n^n \geq n$ dès que $n \geq 1$, on en déduit que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ tend bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange (ou la formule de Taylor-Lagrange avec reste intgral) à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que u_n converge vers $\ln 2$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (théorème 2.7 du polycopié) appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ entre $a = 0$ et $b = 1$ (cette fonction f est bien de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ et l'application de la formule de Taylor-Lagrange est ainsi ici licite), on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(1) = \ln(2) = \sum_{k=1}^n (1-0)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1}$$

avec un certain $c_n \in]0, 1[$. Or on a $f(0) = 0$ et, pour tout $x > -1$, pour tout $k \geq 1$, $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! / (1+x)^k$. On a donc, en reportant ces valeurs dans la formule écrite ci-dessus :

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{(-1)^n n!}{(1+c_n)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n+1} \times \frac{1}{(1+c_n)^{n+1}}.$$

Comme $c_n > 0$, la suite $(1/(1+c_n)^{n+1})_{n \geq 0}$ est une suite bornée par 1. On a donc bien

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = o(1)$$

lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque $1/(n+1) = o(1)$ dans ce cas).

EXERCICE 3 (avec la trigonométrie... on tourne en rond !)

1. Montrer que $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\frac{\pi}{4} - x)) dx$. On effectue le changement de variables $x = \pi/4 - t$ et on utilise la formule de changement de variables dans les primitives (proposition 3.16 du cours). On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)) dx &= \int_{\pi/4-0}^{\pi/4-\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t)) (-dt) = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - t)) dt = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(\pi/4 - x)) dx. \end{aligned}$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$ (Indication : on exprimera $1+\tan(x)$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$ et $\cos(x)$). Pour tout $x \in [0, \pi/4]$, on a

$$\begin{aligned} 1 + \tan(x) &= \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)} = \sqrt{2} \times \frac{\cos(x) \cos(\pi/4) + \sin(x) \sin(\pi/4)}{\cos(x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\cos(\pi/4 - x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

On a donc, en prenant les logarithmes :

$$\forall x \in [0, \pi/4], \ln(1 + \tan(x)) = \frac{\ln(2)}{2} + \ln(\cos(\pi/4 - x)) - \ln(\cos(x)).$$

En intégrant enfin entre 0 et $\pi/4$ et en utilisant la linéarité de l'opération de prise d'intégrale ainsi que le résultat établi à la question 1, on trouve donc

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx = \frac{\ln(2)}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{\ln(2) \times \pi}{8}.$$

EXERCICE 4 (“calculus”, comme disent les américains)

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^1 \arctan x dx; \quad \int_0^1 (x^2 + 1) \cos x dx; \quad \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3} dx; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx.$$

— Pour calculer la première intégrale, on utilise la formule d'intégration par parties (proposition 3.15 du cours) en prenant comme fonctions g_1 et g_2 les fonctions $g_1 : X \mapsto \arctan(X)$ et $g_2 : X \mapsto X$ (primitive de la fonction $X \mapsto 1$). On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x) dx &= \int_0^1 g_1(x)g_2'(x) dx \\ &= [g_1(X)g_2(X)]_0^1 - \int_0^1 g_1'(x)g_2(x) dx \\ &= \arctan(1) - \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

— Pour calculer la seconde intégrale, on procède de manière identique en prenant comme fonctions g_1 et g_2 respectivement $X \mapsto X^2 + 1$ et $X \mapsto \sin(X)$ (primitive de la fonction cosinus). On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 1) \cos(x) dx &= \int_0^1 g_1(x)g_2'(x) dx \\ &= [g_1(X)g_2(X)]_0^1 - \int_0^1 g_1'(x)g_2(x) dx \\ &= 2 \sin(1) - 2 \int_0^1 x \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Ce n'est toutefois pas encore gagné et il faut donc recommencer pour calculer séparément $\int_0^1 x \sin(x) dx$, toujours par parties, mais en choisissant cette

fois comme fonctions \tilde{g}_1 et \tilde{g}_2 les fonctions $X \mapsto X$ et $X \mapsto -\cos(X)$ (primitive de la fonction sinus). On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(x) dx &= \int_0^1 \tilde{g}_1(x) \tilde{g}_2'(x) dx \\ &= [\tilde{g}_1(X) \tilde{g}_2(X)]_0^1 - \int_0^1 \tilde{g}_1'(x) \tilde{g}_2(x) dx \\ &= -\cos(1) + \int_0^1 \cos(x) dx = -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 \\ &= -\cos(1) + \sin(1). \end{aligned}$$

En reportant ce résultat au second membre dans premier calcul, on obtient :

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \cos(x) dx = 2 \sin(1) - 2(-\cos(1) + \sin(1)) = 2 \cos(1).$$

- Le troisième exemple est une application de la formule de changement de variables dans les primitives. On pose $x = \exp(t)$ (ce qui est licite car $[e, 3] \subset]0, +\infty[$, cela revient donc à poser $t = \ln(x)$). On applique la proposition 3.16 du cours, ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} \int_e^3 \frac{dx}{x (\ln(x))^3} &= \int_{\ln(e)}^{\ln(3)} \frac{e^t dt}{e^t t^3} = \int_1^{\ln(3)} t^{-3} dt = \\ &= \left[\frac{X^{-2}}{-2} \right]_1^{\ln(3)} = \frac{(\ln(3))^2 - 1}{2 (\ln(3))^2}. \end{aligned}$$

- Le quatrième exemple est encore une application de la formule de changement de variables dans les primitives. En effet, l'intégrale à calculer s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) dx &= - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) (-\sin(x)) dx = \\ &= - \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/2)} (1 - t^2) dt = \int_0^1 (1 - t^2) dt = [T - T^3/3]_0^1 = 2/3. \end{aligned}$$

EXERCICE 5

Calculer les limites à l'aide des développements limités.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(\sin(\sqrt{x^2 + x}) - \sin(\sqrt{x^2 - x}) \right).$$

- Pour le premier exemple, numérateur et dénominateur s'annulent en 0 et la limite est donc indéterminée. On fait un développement à l'ordre 2 du numérateur, soit, d'après la règle concernant la recherche d'un DL pour un produit (voir la formule (2.76) dans le polycopié) :

$$(1 - e^h) \sin(h) = (-h - h^2/2 + o(h^2)) (h + o(h^2)) = -h^2 + o(h^2).$$

Comme le DL du dénominateur est $h^2 + o(h^2)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x - 1) \sin(x)}{x^2 + x^3} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-h^2 + o(h^2)}{h^2 + o(h^2)} \right) = -1.$$

- Dans ce second exemple, numérateur et dénominateur s'annulent en 0 et la limite est encore indéterminée. On fait un DL à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur pour pouvoir conclure. Le DL à l'ordre 2 du dénominateur est

$$(\sin(2h))^2 = (2h + o(h^2))^2 = 4h^2 + o(h^2).$$

Le numérateur est la fonction composée de $X \mapsto \ln(X)$ dont le DL à l'ordre 2 en $X_0 = 1$ est

$$\ln(1 + H) = H - H^2/2 + o(H^2)$$

et de la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ dont le DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 2 est

$$\cos(3h) = 1 - \frac{(3h)^2}{2} + o(h^2) = 1 - 9h^2/2 + o(h^2).$$

D'après la proposition 2.18, le DL à l'ordre 2 de la fonction composée $x \mapsto \ln(\cos(3x))$ en $x_0 = 0$ est :

$$\ln(\cos(3h)) = (-9h^2/2) + o(h^2).$$

On a au final :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos(3x))}{(\sin(2x))^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-9h^2/2 + o(h^2)}{4h^2 + o(h^2)} \right) = -9/8.$$

- Il y avait un piège dans cet exemple car les DL sont inutiles ici : il suffit en effet d'observer que la fonction

$$x \mapsto \sin \sqrt{x^2 + x} - \sin \sqrt{x^2 - x}$$

(définie pour $x \geq 1$ car alors $x^2 - x \geq 0$) est bornée en valeur absolue par 2 puisque la fonction sinus prend ses valeurs dans $[-1, 1]$. On a donc

$$\forall x \geq 1, \quad |e^{-x} (\sin \sqrt{x^2 + x} - \sin \sqrt{x^2 - x})| \leq 2e^{-x} = o(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$. La limite demandée vaut donc 0.

- La bonne version de l'exemple précédent² était en fait le calcul, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} (\sinh(\sqrt{x^2 + x}) - \sinh(\sqrt{x^2 - x}))).$$

On fait donc ce calcul ici, en guise d'exercice complémentaire. On rappelle ici que, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sinh(X) = (e^X - e^{-X})/2$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \pm x} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x^2 \pm x}} = 0$, ce qui fait que la limite à calculer est la même que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} (e^{-x + \sqrt{x^2 + x}} - e^{-x + \sqrt{x^2 - x}}) \right).$$

On a, grâce à un DL à l'ordre 2 de $y \mapsto \sqrt{1 + y}$ au voisinage de $y_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 \pm x} - x &= x \sqrt{1 \pm 1/x} - x = \\ &= x (1 \pm 1/(2x) - 1/(8x^2) + o(1/x^2)) - x \\ &= \pm 1/2 - 1/(8x) + o(1/x) = \pm 1/2 + o(1). \end{aligned}$$

2. Il y avait une faute de frappe : « sinh » était devenu malencontreusement « sin ».

lorsque x tend vers $+\infty$. On a donc

$$\begin{aligned} e^{-x+\sqrt{x^2+x}} - e^{-x+\sqrt{x^2-x}} &= \\ e^{1/2+o(1)} - e^{-1/2+o(1)} &= \sqrt{e} - 1/\sqrt{e} + o(1) \end{aligned}$$

lorsque x tend vers l'infini. On a donc au final :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} (\sinh(\sqrt{x^2+x}) - \sinh(\sqrt{x^2-x}))) = (e^{1/2} - e^{-1/2})/2 = \sinh(1/2).$$

EXERCICE 6

1. *Expliciter le résultat concernant le calcul d'une intégrale par les sommes des Riemann pour une fonction f continue sur $[a, b]$ dans le cas d'une subdivision régulière, i.e. de pas $\frac{b-a}{n}$. Préciser ce résultat lorsque $a = 0$ et $b = 1$. Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles est intégrable au sens de Riemann sur ce segment (d'après les propositions 3.3 et 3.4 du polycopié). On peut donc appliquer le théorème 3.3 du cours (calcul approché de l'intégrale par les sommes de Riemann). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n,k}),$$

où $\xi_{n,k}$ est un point arbitraire dans le segment

$$\left[a + k \left(\frac{b-a}{n} \right), a + (k+1) \left(\frac{b-a}{n} \right) \right] \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

entre les deux nœuds consécutifs

$$x_k = a + k \left(\frac{b-a}{n} \right) \quad \text{et} \quad x_{k+1} = a + (k+1) \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

du maillage régulier (de pas $(b-a)/n$) de $[a, b]$:

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < \dots < x_{n-1} = a + (n-1) \left(\frac{b-a}{n} \right) < x_n = b.$$

Le nombre S_n ainsi défini est une somme de Riemann pour la fonction f relativement à cette subdivision. Lorsque n tend vers $+\infty$, le pas $(b-a)/n$ de la subdivision en question tend vers 0 et le théorème 3.3 (clause (2)) implique donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Dans le cas $a = 0$ et $b = 1$, on a :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{n,k}).$$

On peut en particulier choisir $\xi_{n,k} = k/n$ ($k = 0, \dots, n-1$) car ce point (qui est un nœud) est bien dans le segment $[k/n, (k+1)/n]$; on a donc en particulier lorsque $a = 0$ et $b = 1$, avec ce choix des points intermédiaires $\xi_{n,k}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \right) = \int_{[0,1]} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Notons que l'on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right) = \int_{[0,1]} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

si l'on prend cette fois pour $\xi_{n,k}$ (pour $k = 0, \dots, n-1$) le point $x_{k+1} = (k+1)/n$ extrémité (et non plus origine) du segment entre les deux nœuds consécutifs k/n et $(k+1)/n$ du maillage régulier de pas $1/n$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

— On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_0(k/n),$$

avec $f_0 : x \in [0, 1] \rightarrow x$. On a donc, en utilisant le résultat rappelé à la question **1** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 x dx = [X^2/2]_0^1 = 1/2.$$

— On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_1(k/n),$$

avec $f_1 : x \mapsto 1/(1+x)$. On a donc, en utilisant à nouveau le résultat rappelé à la question **1** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \right) = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+X)]_0^1 = \ln(2).$$

Annales 2012-2013, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00

EXERCICE I

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par récurrence pour $n \geq 1$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n^2} \quad \forall n \geq 1.$$

- (1) Calculer u_2 et u_3 . On a en appliquant la formule reliant u_{n+1} à u_n que $u_2 = (1 + 1)/1 = 2$ et $u_3 = (2 + 2)/4 = 1$.
- (2) Montrer, en raisonnant par récurrence sur n , que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite à termes positifs. On a $u_1 = 1 \geq 0$. L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ (à savoir « $u_n \geq 0$ ») est donc vérifiée au cran initial ($n = 1$). Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un cran fixé $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie $u_n \geq 0$. Alors $u_{n+1} = (n + u_n)/n^2 = 1/n + u_n/n^2 \geq 1/n > 0$, ce qui montre que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. L'assertion « $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ » est bien ainsi prouvée par récurrence.
- (3) Montrer que $u_n \geq 1/(n - 1)$ pour tout $n \geq 2$, puis en déduire que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. D'après la formule exprimant u_{n+1} à partir de u_n , on a

$$u_n = \frac{n - 1 + u_{n-1}}{(n - 1)^2} = \frac{1}{n - 1} + \frac{u_{n-1}}{(n - 1)^2} \quad \forall n \geq 2.$$

Comme $u_{n-1} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$ (d'après la question 2), on a bien $u_n \geq 1/(n - 1)$ pour tout $n \geq 2$. On a donc, toujours d'après la formule liant u_{n+1} à u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n + u_n}{n^2} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} u_n \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{1}{n - 1} = \frac{1}{n} - \frac{n + 1}{n^2} = -\frac{1}{n^2} \leq 0 \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

- (4) Déduire de la question 3 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite majorée par 2, décroissante à partir de $n = 2$. On a $u_1 = 1 \leq 2$, puis $u_2 = 2$. D'après le résultat établi à la question 3, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante ; elle est donc majorée par son premier terme, à savoir $u_2 = 2$. Comme $u_1 = 1$, tous les u_n , pour $n \geq 1$, sont majorés par 2. La décroissance à partir de $n = 2$ a été vue juste au dessus.
- (5) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. Toute suite décroissante minorée (ici par 0) est convergente (Proposition 1.2 du cours). Donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$

et, bien sûr, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers l . On a donc (de par le résultat concernant les opérations sur les limites de suites, Proposition 1.4 du cours)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + u_n \times \frac{1}{n^2} \right) = 0 + l \times 0 = 0.$$

La suite $(u_{n+1})_{n \geq 1}$, donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, converge vers $l = 0$.

(6) *Montrer, en utilisant les résultats établis aux questions 3 et 4, que :*

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}.$$

La première inégalité a été établie à la question 3. D'autre part

$$u_n \leq \frac{n-1+u_{n-1}}{(n-1)^2} \leq \frac{n-1+2}{(n-1)^2} = \frac{n+1}{(n-1)^2}$$

puisque $u_{n-1} \leq 2$ pour tout $n \geq 2$.

(7) *En déduire un équivalent pour u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $1/(n-1) \sim 1/n$ et $(n+1)/(n-1)^2 \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, le terme u_n qui se trouve encadré par $1/(n-1)$ et $(n+1)/(n-1)^2$ est aussi équivalent à $1/n$ (lemme de gendarmes).*

On définit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ en posant $v_n = (1+u_n)^n$ pour tout $n \geq 1$.

resume *Rappeler le DL à l'ordre 1 en 0 de la fonction*

$$x \in]-1, +\infty[\rightarrow f(x) = \ln(1+x).$$

Il s'agit juste d'exprimer ici que f est dérivable en $x = 0$, de nombre dérivé $f'(0) = 1/1 = 1$ en ce point. Le DL demandé est donc :

$$\log(1+h) = \log 1 + h + o(h) = h + o(h).$$

resume *Exploiter la formule $x^n = \exp(n \ln x)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$) pour réexprimer v_n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$. On a, en exploitant la relation suggérée, lorsque n tend vers l'infini :*

$$\begin{aligned} v_n &= \exp(n \log(1+u_n)) = \exp(n(u_n + o(u_n))) \\ &= \exp(n(u_n + o(1/n))) = \exp(nu_n + o(1)). \end{aligned}$$

Comme $u_n \sim 1/n$ lorsque n tend vers l'infini, la suite $(nu_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1 et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^1 = e$ du fait que la fonction exponentielle est continue en $x = 1$.

EXERCICE II

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x > -1, \quad f_n(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}.$$

(1) *Montrer que f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et calculer $x_1 \text{ongmapstof}'_n(x)$. La fonction f_n est définie sur $]-1, +\infty[$. Elle est dérivable sur cet intervalle ouvert comme quotient de deux fonctions polynomiales (donc C^∞ sur \mathbb{R}), la fonction figurant au dénominateur ne s'annulant pas sur $]-1, +\infty[$. Le calcul de la dérivée se fait en utilisant les règles de calcul pour la dérivée*

d'un quotient (vues dans le cours de MISMI ainsi qu'en Terminale); on obtient, pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \right] = \frac{u'_n(x)v_n(x) - u_n(x)v'_n(x)}{v_n^2(x)} \\ &= \frac{nx^{n-1}(1+x)^n - n(x^n+1)(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \\ &= n \frac{x^{n-1}(1+x) - x^n - 1}{(1+x)^{n+1}} = \frac{n(x^{n-1} - 1)}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

(2) Montrer que f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$ en un unique point de $[0, +\infty[$ que l'on déterminera et calculer la valeur de ce minimum. La fonction f'_n s'annule en un seul point, $x = 1$. Comme $f'_n < 0$ lorsque $x^{n-1} < 1$, i.e. $x < 1$, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Comme $f'_n > 0$ lorsque $x^{n-1} > 1$, i.e. $x > 1$, f_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Il y a donc un (unique) point où f_n réalise son minimum sur $[0, +\infty[$, le point $x = 1$, la valeur du minimum de f_n en ce point étant égale à $2/2^n = 2^{1-n}$.

(3) En déduire que

$$\forall x \geq 0, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n),$$

puis que

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \quad (a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

On a, d'après les résultats établis à la question 2 :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \frac{1}{f_n(x)} \leq \frac{1}{2^{1-n}} = 2^{n-1}.$$

Il en résulte donc

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n).$$

Si $a \geq 0$ et $b > 0$, on a, en prenant $x = a/b$ dans l'inégalité précédente :

$$(1+a/b)^n \leq 2^{n-1}(1+a^n/b^n).$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par b^n , on trouve bien

$$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

Cette inégalité subsiste si $a \geq 0$ et $b = 0$ puisque $2^{n-1} \geq 1$. Elle est donc valide en fait pour tout a, b dans $[0, +\infty[$.

EXERCICE III

Soient $a < b$ deux nombres réels.

(1) Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions supposées dans un premier temps de classe C^1 sur $[a, b]$, et telles que $f'(t) \leq g'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse pour une fonction h de classe C^1 sur un segment de \mathbb{R} et démontrer que

$$f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x) \quad \text{lorsque} \quad a \leq x < y \leq b.$$

Il s'agit du résultat suivant (théorème 2.12 du cours) : si h est une fonction à valeurs réelles ou complexes de classe C^1 sur le segment $[x, y]$ (non réduit à un point), alors

$$h(y) - h(x) = \int_x^y h'(t) dt.$$

Si $[x, y] \subset [a, b]$, on applique ce résultat à la fonction $h = (g - f)|_{[x, y]}$. On a

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = \int_x^y (g'(t) - f'(t)) dt.$$

Or l'intégrale de Riemann sur un segment d'une fonction continue positive est positive du fait de la propriété de monotonie de la prise d'intégrale. On a donc

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) \geq 0,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

- (2) On considère $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans la question 1, mais on suppose maintenant seulement que ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que $f'(t) \leq g'(t)$, cette fois seulement pour tout $t \in]a, b[$. Énoncer la formule des accroissements finis pour une fonction réelle h définie sur un segment de \mathbb{R} non réduit à un point, puis, en l'appliquant à la fonction $g - f$, montrer que lorsque $a \leq x < y \leq b$, on a encore $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$.

On utilise ici la formule des accroissements finis (corollaire 2.6 du cours) : si h est une fonction réelle continue sur un segment $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$h(y) - h(x) = h'(c)(y - x).$$

On prend ici $h = (g - f)|_{[x, y]}$. Il existe $c_{x, y} \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que

$$(g(y) - f(y)) - (g(x) - f(x)) = (y - x)(g'(c_{x, y}) - f'(c_{x, y})).$$

Comme $f' \leq g'$ sur $]a, b[$, on a donc $f'(c_{x, y}) - g'(c_{x, y}) \leq 0$, ce qui donne l'inégalité demandée.

- (3) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe deux constantes α et β telles que $f'(t) \in [\alpha, \beta]$ pour tout $t \in]a, b[$. Soient encore x et y dans $[a, b]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \beta.$$

On utilise comme à la question 2 la formule des accroissements finis sur $[x, y]$ (corollaire 2.6 du cours); notons que l'on aurait pu aussi utiliser le théorème fondamental de l'analyse comme à la question 1, mais il aurait fallu être plus soigneux avec les cas $x = a$ ou $y = b$ et utiliser en plus la continuité de f en ces points. On prend ici $h = f|_{[x, y]}$. On a donc

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Or $y - x > 0$ et $f'(c) \in [\alpha, \beta]$ par hypothèses. On a donc

$$\alpha \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq \beta.$$

(4) Soit $f : x \in] - \pi/2, \pi/2[\mapsto \tan x$.

— Calculer $f'(x)$ pour $x \in] - \pi/2, \pi/2[$ et montrer que $f'(x) \geq 1$ pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$. La dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

sur $] - \pi/2, \pi/2[$ est

$$x \mapsto \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \geq 1$$

en utilisant la règle de calcul donnant la dérivée d'un quotient (cf. le cours de MISMI ou de Terminale).

— En déduire que $|\tan x| \geq |x|$ pour tout $x \in] - \pi/2, \pi/2[$. La fonction \tan est paire sur $] - \pi/2, \pi/2[$. Il suffit donc de prouver l'inégalité pour $x \in]0, \pi/2[$. D'après la formule des accroissements finis, on a, pour un certain $c_x \in]0, x[$,

$$\tan x - \tan 0 = \tan'(c_x)(x - 0) = x \tan'(c_x) \geq x.$$

On a donc $\tan x \geq x$ sur $[0, \pi/2[$. Par parité, on a $|\tan x| \geq |x|$ sur $] - \pi/2, \pi/2[$.

EXERCICE IV

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} \right) - n.$$

(1) Calculer, en exprimant l'expression dont on prend la limite comme une somme de Riemann,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right).$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}.$$

On reconnaît à droite une somme de Riemann pour la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

(la subdivision est ici régulière et de pas $1/n$). Comme le pas de la subdivision utilisée tend ici vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il résulte du

théorème 3.3 du cours (sur la convergence des sommes de Riemann) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2} - 1).$$

- (2) Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle entre $a = 0$ et $b = h > 0$ et en déduire :

$$\forall n \geq 1, \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \left| e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq \frac{e}{2n^2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange demandée est :

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2} \exp c_h$$

(avec c_h entre 0 et h). puisque $\exp' = \exp$ sur \mathbb{R} et que $\exp(0) = 1$. On a donc, en prenant $h(n, k) = 1/\sqrt{n^2 + kn}$,

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 + kn} e^{c_{h(n,k)}} \leq \frac{e^{c_{h(n,k)}}}{2n^2}.$$

Comme $c_{h(n,k)} \in [0, h(n, k)] \subset [0, 1]$ et que la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , donc sur $[0, 1]$, on a $e^{c_{h(n,k)}} \leq e^1 = e$. On a donc bien l'inégalité demandée.

- (3) Déduire des questions 1 et 2 que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer sa limite. On a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}} - 1 \right).$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, puis en ajoutant les inégalités obtenues à la question 2 (pour $k = 0, \dots, n-1$), on trouve :

$$\left| u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}} \right| \leq n \times \frac{e}{2n^2} = \frac{e}{2n}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ a donc la même limite que la suite des sommes de Riemann introduite à la question 1. Elle est donc convergente vers $2(\sqrt{2} - 1)$ d'après le résultat établi à la question 1.

EXERCICE V

Soient $a < b$ deux nombres réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ deux fonctions continues.

- (1) Montrer si $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$, on a

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

On a

$$\forall t \in [a, b], m g(t) \leq f(t) g(t) \leq M g(t).$$

En utilisant la monotonie de l'opération de prise d'intégrale de Riemann, on a bien l'inégalité demandée par intégration sur $[a, b]$ de l'inégalité ponctuelle précédente.

- (2) Dédurre de la question 1 qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$, on a aussi $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$ d'après l'encadrement établi à la question précédente. Les deux membres de la formule que l'on demande d'établir sont nuls et l'on peut donc prendre pour c n'importe quel point de $[a, b]$. Si $\int_a^b g(t) dt > 0$, on a, d'après l'inégalité établie à la question 1 :

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences (Théorème 2.1, puis Théorème 2.3 du cours), toute valeur entre m et M (incluses) est prise par f sur $[a, b]$. Il existe donc bien $c \in [a, b]$ réalisant la relation voulue.

- (3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt.$$

Exprimer $I(\alpha+1)$ en fonction de $I(\alpha)$ lorsque α est un nombre réel fixé. On utilise la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(\alpha+1) &= \int_0^1 (1+t)^{\alpha+1} e^t dt \\ &= \left[(1+t)^{\alpha+1} e^t \right]_0^1 - (\alpha+1) \int_0^1 (1+t)^\alpha e^t dt \\ &= 2^{\alpha+1} e - 1 - (\alpha+1) I(\alpha). \end{aligned}$$

- (4) Dédurre des questions 2 et 3 que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$I(\alpha)(2 + \alpha + c_\alpha) = 2^{\alpha+1} e - 1.$$

D'après le résultat établi à la question 2 (en prenant $f(t) = 1+t$ et $g(t) = (1+t)^\alpha e^t$), on voit qu'il existe $c_\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$I(\alpha+1) = (1+c_\alpha) I(\alpha).$$

En reportant dans la formule établie à la question 3, on trouve donc

$$I(\alpha)(1+c_\alpha+\alpha+1) = 2^{\alpha+1} e - 1.$$

C'est la formule voulue.

Annales 2013-2014, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00

EXERCICE I

I.1 (Question de cours). Soit f une fonction à valeurs réelles définie dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant x_0 et $p \in \mathbb{N}$. On suppose que f est dérivable jusqu'à l'ordre $p + 1$ au point x_0 . Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre $p + 1$ pour f au voisinage de x_0 .

On peut écrire, pour h voisin de 0, puisque f est dérivable jusqu'à l'ordre $p + 1$ en x_0 , que

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0) h^k + h^{p+1} \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ (ce qui équivaut à dire, en utilisant les notations de Landau, que $h^{p+1} \epsilon(h) = o(h^{p+1})$ lorsque h tend vers 0). C'est le théorème 2.6 du polycopié que l'on cite ici.

I.2. Montrer que la fonction tangente hyperbolique définie sur \mathbb{R} tout entier par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et que sa fonction dérivée \tanh' sur \mathbb{R} vérifie la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2. \quad (\dagger)$$

En déduire que la fonction \tanh est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables : en effet, les fonctions $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow e^{-x}$ sont dérivables sur \mathbb{R} , donc aussi leur différence et leur somme (qui ne s'annule pas). En utilisant la formule

$$(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{f^2},$$

(MISMI, semestre 1), il vient

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = 1 - \tanh^2(x). \end{aligned}$$

Pour montrer que la fonction \tanh est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , il suffit de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété (\mathcal{P}_k) suivante : « la fonction \tanh est dérivable

sur \mathbb{R} jusqu'à l'ordre k et sa dérivée à l'ordre k s'exprime comme $P_k \circ \tanh$, où P_k est une fonction polynomiale. \gg

Il est clair que (\mathcal{P}_1) est vraie (on prend $P_1(X) = 1 - X^2$). Supposons que (\mathcal{P}_k) soit vraie. Comme la composée de deux fonctions dérivables est dérivable (et qu'une fonction polynomiale est C^∞), la fonction $\tanh^{(k)} = P_k \circ \tanh$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée

$$x \in \mathbb{R} \mapsto (1 - \tanh^2(x)) P'_k(\tanh(x)) = P_{k+1}(\tanh(x))$$

où $X \mapsto P_{k+1}(X) = (1 - X^2) P'_k(X)$ est bien une fonction polynomiale. On a bien vérifié que $(\mathcal{P}_k) \implies (\mathcal{P}_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La propriété (\mathcal{P}_k) est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par récurrence. On en déduit que la fonction \tanh est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

I.3. *Montrer que $\tanh'(0) = 1$ et que la fonction \tanh est impaire. Dédurre du résultat rappelé à la question I.1 qu'il existe des constantes réelles a, b, c (que l'on ne calculera pas numériquement dans un premier temps) telles que*

$$\tanh(h) = h + a h^3 + b h^5 + c h^7 + h^8 \epsilon(h) \quad (\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0)$$

au voisinage de $h = 0$.

On a $\tanh(0) = 0$, donc $\tanh'(0) = 1 - (\tanh(0))^2 = 1$. Comme

$$\frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la fonction \tanh est bien impaire. Comme elle est C^∞ , elle est en particulier de classe C^8 et la formule de Taylor-Young assure alors (voir la question I.1) qu'elle admet un développement limité à l'ordre 8 en $x_0 = 0$, de la forme

$$\tanh(h) = \sum_{k=0}^8 a_k h^k + h^8 \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. On a $a_0 = 0$ puisque $\tanh(0) = 0$ et $a_1 = \tanh'(0) = 1$. Comme la fonction est impaire, on a l'égalité des deux développements limités

$$\sum_{k=0}^8 a_k h^k + h^8 \epsilon(h) = -\sum_{k=0}^8 a_k (-h)^k - h^8 \epsilon(-h).$$

On déduit du résultat sur l'unicité des développements limités en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, à un ordre donné, pour une fonction donnée (si tant est qu'il en existe (proposition 2.14 du polycopié), que tous coefficients $a_{2\ell}$ sont nuls. Il reste donc seulement $a_3 = a$, $a_5 = b$ et $a_7 = c$ et on a le développement à l'ordre 8 demandé.

I.4 (Question de cours). *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'une fonction continue f sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} contenant x_0 admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la forme :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + h^n \epsilon(h) \quad (\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0)$$

au voisinage de $h = 0$. Écrire le développement limité à l'ordre $n + 1$ en x_0 de la primitive F de x s'annulant en x_0 , c'est-à-dire de la fonction

$$x \in I \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

C'est la proposition 2.19 du cours qu'il faut invoquer ici. On a, lorsque h est voisin de 0 :

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + h^{n+1} \tilde{\epsilon}(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}(h) = 0$.

I.5. Dédurre du résultat de cours rappelé à la question **I.4** que le développement limité de \tanh' à l'ordre 7 en 0 est

$$\tanh'(h) = 1 + 3a h^2 + 5b h^4 + 7c h^6 + h^7 \epsilon(h) \quad (\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0)$$

au voisinage de $h = 0$.

Si le développement limité à l'ordre 7 en 0 de \tanh' est

$$\tanh'(h) = \sum_{k=0}^7 b_k h^k + h^7 \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$, celui de \tanh en 0 à l'ordre 8 est, d'après le résultat rappelé à la question **I.4**,

$$\tanh(h) = \sum_{k=0}^7 b_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + h^8 \tilde{\epsilon}(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\epsilon}(h) = 0$. Mais ce DL est aussi

$$\tanh(h) = h + a h^3 + b h^5 + c h^7 + h^8 \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. Par identification des deux développements ainsi obtenus (unicité des développements limités), on en déduit bien $b_1 = b_3 = b_5 = 0$, $b_0 = 1$, $b_2 = 3a$, $b_4 = 5b$ et $b_6 = 7c$.

I.6. En utilisant la relation (\dagger) établie à la question **I.2** et l'expression des développements limités de \tanh et de \tanh' exprimés à partir des constantes a, b, c aux questions **I.3** et **I.5**, calculer les valeurs de ces trois constantes. Quel est le développement limité à l'ordre 8 de la fonction \tanh en $x = 0$?

Par composition des développements limités, le développement à l'ordre 7 de \tanh^2 en 0 est

$$h^2 \left(1 + ah^2 + bh^4 + ch^6 + o(h^7) \right)^2 = h^2 \left(1 + 2ah^2 + (2b + a^2)h^4 \right) + o(h^7).$$

On a donc, au voisinage de 0,

$$1 + 3a h^2 + 5b h^4 + 7c h^6 + o(h^7) = 1 - h^2 - 2a h^4 - (2b + a^2) h^6 + o(h^7).$$

Par identification de ces deux développements à l'ordre 7 de \tanh' en 0, on trouve $a = -1/3$, $b = -2a/5 = 2/15$, $c = -(2b + a^2)/7 = -17/315$. Ceci est confirmé par exemple si l'on invoque le logiciel Sage (on aurait pu aussi invoquer Maple, mais je ne peux que conseiller Sage d'une part parce que c'est un logiciel libre, d'autre part parce que la syntaxe Python vous est un peu familière en L1) :

```
sage: var('x')
      f=(e^x - e^(-x))/(e^x+e^(-x)); f.taylor(x,0,8)
ans: -17/315*x^7 + 2/15*x^5-1/3*x^3 + x
```

(le terme $o(x^7)$ est sous-entendu par la machine, qui affiche juste la partie principale ou encore entière des développements de Taylor). Comme quoi la machine est, elle, infaillible!

EXERCICE II

On définit, pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $x > 0$, la fonction

$$I_n : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

II.1.

- (Question de cours) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse (pour une fonction f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, à valeurs réelles). C'est le théorème 2.9 du polycopié : si $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} (non réduit à un point) et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 , alors

$$\int_a^b g'(t) dt = \int_{[a,b]} g'(t) dt = g(b) - g(a).$$

- Appliquer ce théorème pour en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction I_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée. Expliciter aussi la fonction I_0 . Si F_n est la primitive de $x \mapsto 1/(1+x^3)^n$ sur $[0, +\infty[$ s'annulant en 0, on a $F_n(x) - F(0) = F_n(x) = \int_0^x dt/(1+t^3)^n = I_n(x)$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. La fonction I_n est donc la primitive de $t \mapsto 1/(1+t^3)^n$ sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0. Elle est donc de classe C^1 sur cet intervalle et a pour dérivée $x \mapsto 1/(1+x^3)^n$. On a $I_0(x) = \int_0^x dt = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

II.2. Trouver des nombres rationnels a, b, c tels que l'on ait l'égalité des fractions rationnelles en la variable X :

$$\frac{1}{1+X^3} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

On a

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)}.$$

On peut écrire en utilisant la division euclidienne :

$$X^2 - X + 1 = (X + 1)(X - 2) + 3$$

En reportant cette identité de Bézout au numérateur de $1/(X^3+1)$, on trouve

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{3} \frac{(X^2 - X + 1) - (X - 2)(X + 1)}{(X + 1)(X^2 - X + 1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{X + 1} - \frac{X - 2}{X^2 - X + 1} \right).$$

On trouve donc $a = 1/3$, $b = -1/3$, $c = 2/3$. On aurait aussi pu trouver ces nombres par simple identification des deux membres, mais c'était moins élégant que cette méthode utilisant la division euclidienne.

II.3.

- **(Question de cours)** Rappeler la formule de changement de variables dans les primitives et l'appliquer pour expliciter les primitives sur \mathbb{R} s'annulant en 0 des fonctions :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

lorsque α et β sont des nombres réels (avec $\beta \neq 0$). On traitera dans un premier temps le cas particulier où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Si $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ sont deux segments de \mathbb{R} , $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, on a (proposition 3.16 du polycopié) :

$$\forall u \in [\alpha, \beta], \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\xi) d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) d\tau.$$

La primitive sur \mathbb{R} de $1/(1+t^2)$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) s'annulant en 0 est la fonction arctan. Dans le cas général, on écrit

$$\frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{1 + X^2} \right]_{X=(x-\alpha)/\beta} \right).$$

En posant $\varphi(x) = (x - \alpha)/\beta$ et en appliquant la formule de changement de variables dans les primitives, on trouve que la primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

s'annulant en 0 est

$$x \mapsto \frac{1}{\beta} \left[\arctan \left(\frac{t - \alpha}{\beta} \right) \right]_0^x.$$

On a aussi

$$\frac{x - \alpha}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2X}{X^2 + \beta^2} \right]_{X=x-\alpha} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dX} [\log(X^2 + \beta^2)] \right]_{X=x-\alpha}.$$

La formule de changement de variables dans les primitives implique qu'une primitive de cette fonction de x sur \mathbb{R} s'annulant en 0 est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left[\log((x - \alpha)^2 + \beta^2) \right]_0^x$$

- Utiliser les résultats établis au précédent item pour exprimer la fonction I_1 en termes de fonctions rationnelles, de la fonction logarithme et de la fonction arc tangente.

On a

$$X^2 - X + 1 = (X - 1/2)^2 + 3/4 = (X - \alpha)^2 + \beta^2$$

avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = \sqrt{3}/2$. On a

$$\frac{X - 2}{X^2 - X + 1} = \frac{X - \alpha}{(X - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha - 2}{(X - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

En utilisant ce qui précède, une primitive s'annulant en 0 de

$$x \mapsto \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

est

$$\begin{aligned} x \mapsto & \frac{\log((x-1/2)^2 + 3/4)}{2} - \frac{3/2}{\sqrt{3}/2} \left[\arctan \left[\frac{2}{\sqrt{3}}(t-1/2) \right] \right]_0^x \\ & = \frac{\log(x^2 - x + 1)}{2} - \sqrt{3} \left(\arctan \left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] + \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right) \end{aligned}$$

On obtient donc finalement, en regroupant les calculs :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{\log(x+1)}{3} - \frac{1}{3} \left(\log \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \log \left[\left(\frac{x+1}{x^2 - x + 1} \right)^{1/3} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

On pourra vérifier que cette formule est exacte, d'une part en s'assurant (ce qui est immédiat) que

$$I_1(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,$$

d'autre part en faisant appel à un logiciel de calcul formel (tel **Sage** ou **Maple**) pour calculer une primitive de la fonction rationnelle $x \mapsto 1/(1+x^3)$. En utilisant par exemple la routine **INTSYMB** mise en ligne (sous **Sage** et **Python**) sur le guide Moodle (c'est, on le notera, une procédure récursive, ce qui est naturel ici), on implémente la démarche algorithmique décrite plus haut :

```
sage: R.<x>=QQ[]; P=1; Q=1+x^3
sage: INTSYMB(R,P,Q,1)
ans:
Primitive= 0 + somme
coefficient * log | |
[[1/3, x + 1]]
+ somme
coefficient *log | |
[[-0.3333333333333334?,
      x - 0.5000000000000000? - 0.866025403784439?*I]]
+ somme
coefficient * arg( )
[[0.5773502691896258?,
      x - 0.5000000000000000? - 0.866025403784439?*I]]
```

On reconnaît notre résultat car :

```
sage: RDF(1/sqrt(3)); RDF(sqrt(3)/2)
ans: 0.57735026919
      0.866025403784
```

Le logiciel est bien ici venu à l'appui du résultat établi!

II.4.

- (**Question de cours**) *Rappeler, étant données deux fonctions f et g à valeurs réelles et de classe C^1 sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (avec $a < b$), la formule d'intégration par parties. C'est la proposition 3.15 du cours : si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit*

à un point, à valeurs réelles ou complexes, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)g(t) dt &= \int_{[a,b]} f'(t)g(t) dt \\ &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_{[a,b]} f(t)g'(t) dt \\ &= (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(t)g'(t) dt. \end{aligned}$$

— *Expliciter des polynômes U et V de degrés respectivement 0 et 1 tels que*

$$1 = U(X)(1 + X^3) + V(X) \times (3X^2).$$

On a

$$1 + X^3 - \frac{X}{3}(3X^2) = 1 + X^3 - X^3 = 1,$$

On peut donc prendre $U = 1$ et $V = -X/3$.

— *En déduire, lorsque n est un entier supérieur ou égal à 2, l'identité entre fractions rationnelles en la variable X :*

$$\frac{1}{(1 + X^3)^n} = \frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} + \frac{X}{3(n-1)} \times \frac{d}{dX} \left[\frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} \right].$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + X^3)^n} &= \frac{U(X)(1 + X^3) + V(X)(3X^2)}{(1 + X^3)^n} \\ &= \frac{U(X)}{(1 + X^3)^{n-1}} + V(X) \frac{3X^2}{(1 + X^3)^n} \\ &= \frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} - \frac{X}{3} \frac{1}{-n+1} \frac{d}{dX} \left[\frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} + \frac{X}{3(n-1)} \frac{d}{dX} \left[\frac{1}{(1 + X^3)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

— *Déduire de la formule d'intégration par parties rappelée au premier item les identités :*

$$\begin{aligned} I_n(x) &= I_{n-1}(x) + \frac{x}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} - \frac{1}{3(n-1)} I_{n-1}(x) \\ &= \frac{x}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} + \frac{3n-4}{3(n-1)} I_{n-1}(x) \quad (\forall n \geq 2). \end{aligned}$$

On utilise la formule d'intégration par parties sur $[0, x]$ en prenant comme fonction f la fonction $t \mapsto 1/(1+t^3)^{n-1}$ et pour fonction g la fonction t .

On a alors, d'après la formule établie à l'item précédent :

$$\begin{aligned}
 I_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^{n-1}} + \frac{1}{3(n-1)} \int_0^x f'(t)g(t) dt \\
 &= I_{n-1}(x) + \frac{f(x)g(x) - f(0)g(0)}{3(n-1)} - \frac{1}{3(n-1)} \int_0^x f(t)g'(t) dt \\
 &= I_{n-1}(x) + \frac{x}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} - \frac{I_{n-1}(x)}{3(n-1)} \\
 &= \frac{x}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{3(n-1)}\right) I_{n-1}(x) \\
 &= \frac{x}{3(n-1)(1+x^3)^{n-1}} + \frac{3n-4}{3(n-1)} I_{n-1}(x).
 \end{aligned}$$

Ceci donne les formules voulues lorsque $n \geq 2$.

- Indiquer un processus algorithmique (dédduit de la relation établie à l'item précédent et de l'expression de I_1 établie à la question **II.3**) conduisant à l'expression de I_n (lorsque n est un entier strictement positif) en termes de fonctions rationnelles, de la fonction logarithme et de la fonction arc tangente. Lorsque $n = 1$, l'expression de I_n en termes des fonctions rationnelles, logarithme et arc tangente a été obtenue à la question **II.3**. Lorsque $n \geq 2$, la relation établie précédemment montre que I_n est la somme d'une fonction rationnelle (donc dans la classe des fonctions « admissibles » pour l'expression des fonctions) et de I_{n-1} multipliée par le facteur $(3n-4)/3(n-1)$. Si $n = 2$, c'est fini, car on sait expliciter I_1 . Si $n > 2$, on recommence avec I_{n-1} , que l'on exprime comme la somme d'une fonction rationnelle et de I_{n-2} (multipliée par $(3(n-1)-4)/(3(n-2))$). Et ainsi de suite. On parvient ainsi à abaisser l'ordre de l'exposant n au dénominateur jusqu'à la valeur $n = 1$ où l'on sait conclure. On obtient bien au final une expression de I_n en termes des fonctions admissibles proposées (fonctions rationnelle, logarithme et arc tangente). On trouvera cette méthode (dite de Hermite) implémentée sous Sage sur le guide sous Moodle :

```

sage: R.<x>=Q[]; P=1; Q=1+x^3
sage: def HERMITE_ITERE(R,P,Q,n):
    X=R.0
    if n==1:
        return [(P//Q).integral(),P-(P//Q)*Q]
    else:
        D=Q.xgcd(derivative(Q,X))
        NewPrim = D[2]*P/((1-n)*Q^(n-1))
        PP = P*D[1]+(1/(n-1))*derivative(P*D[2],X)
        Prim = HERMITE_ITERE(R,PP,Q,n-1)[0]
        Reste = HERMITE_ITERE(R,PP,Q,n-1)[1]
        return [Prim+NewPrim,Reste]
sage: HERMITE_ITERE(R,P,Q,n)

```

Par exemple, si $n = 8$, on obtient comme résultat :

```

sage: HERMITE_ITERE(R,1,1+x^3,8)
ans: [(3740/19683) * (x + 1)^-7 * x * (x^2 - x + 1)^-7 *
(x^18 + 33/5*x^15 + 369/20*x^12 + 6197/220*x^9
+ 7737/308*x^6 + 9585/748*x^3 + 12203/3740),

```

7480/19683]

Ceci signifie que $I_8(x)$ est la somme d'une fraction rationnelle (première entrée de la liste) et de $(7480/19683) \times I_1(x) = 2^3 \times 3^{-9} \times 5 \times 11 \times 17 \times I_1(x)$.

II.5.

- **(Question de cours)** Si f et g sont deux fonctions réelles intégrables au sens de Riemann sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$, que peut-on dire du signe de la quantité

$$\int_{[a,b]} g(t) dt - \int_{[a,b]} f(t) dt \quad ?$$

L'opération de prise d'intégrale de Riemann est une opération monotone (inégalité (3.26) du polycopié). Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, on a conséquent $\int_{[a,b]} f(t) dt \leq \int_{[a,b]} g(t) dt$. La quantité mentionnée ici est donc de signe positif.

- *Montrer (en appliquant le résultat de cours rappelé à l'item précédent) que, si $x > 0$ est un nombre réel fixé, la suite $(I_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments du segment $[0, x]$. En déduire que, pour tout $x > 0$, la suite $(I_n(x))_{n \geq 0}$ est convergente. On a l'inégalité $(1 + t^3)^{-n} \leq (1 + t^3)^{-(n-1)}$ pour tout $t \in [0, x]$ et tout $n \geq 1$. En intégrant, on obtient par conséquent (d'après ce qui est rappelé à l'item précédent) que la suite $(I_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante. Comme cette suite est minorée par 0, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$ ¹.*

EXERCICE III

III.1 (Question de cours). *Qu'appelle-t-on somme de Riemann pour une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ subdivisé en une subdivision $\sigma : x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$? Que fait une suite de sommes de Riemann associée à la fonction f et à une suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0 ?*

Pour définir une somme de Riemann pour f (attachée à une subdivision donnée), il faut se donner un point arbitraire ξ_j dans chaque segment $[x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, \dots, N-1$) entre deux nœuds consécutifs de la subdivision. La somme de Riemann associée à ce choix est alors définie par

$$\text{sr}, [f; (\xi_j)_j; \sigma] = \sum_{j=0}^{N-1} (x_{j+1} - x_j) f(\xi_j)$$

(définition 3.8 du polycopié). Une suite de sommes de Riemann associée à la fonction f et à une suite de subdivisions de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0 converge vers $\int_{[a,b]} f(t) dt$. C'est le théorème 3.3 du polycopié applicable ici car une fonction f continue sur un segment est nécessairement intégrable au sens de Riemann sur ce segment ; l'assertion (3.48) dans l'énoncé de ce théorème 3.3 est donc valide.

1. En fait, cette limite vaut 0. En effet, si $\ell > 0$, en exploitant les résultats établis à la question **II.4**, on trouverait que $I_{n-1}(x) - I_n(x) \simeq \ell/(3n)$. Or la suite $(\sum_1^N (1/n))_{N \geq 1}$ tend vers $+\infty$ (voir l'exercice A.16 du polycopié). Si $(I_n(x))_{n \geq 1}$ tendait vers une limite strictement positive ℓ , on en déduirait que $I_N(x) = \sum_{n=1}^N (I_n(x) - I_{n-1}(x)) + I_0(x)$ tendrait aussi vers $+\infty$, ce qui serait absurde. Cette observation est un commentaire qui ne fait pas partie du corrigé (on ne posait pas la question de la valeur de la limite ℓ).

III.2. Appliquer le résultat rappelé à la question précédente pour calculer

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N k \sqrt{N^2 - k^2} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \sqrt{1 - \frac{k^2}{N^2}} \right).$$

Soit la subdivision régulière d du segment $[0, 1]$ de pas $1/N$, c'est-à-dire la subdivision $0 < 1/N < 2/N \leq \dots \leq (N-1)/N \leq 1$. Soit f la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto t \sqrt{1 - t^2}.$$

Clairement

$$\frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^N k \sqrt{N^2 - k^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \sqrt{1 - \frac{k^2}{N^2}}$$

est une somme de Riemann pour cette fonction et la subdivision régulière de $[0, 1]$ de pas $1/N$ (on le reconnaît sur la forme de droite). D'après le résultat rappelé à la question **III.1**, la limite de la suite proposée est

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} t \sqrt{1 - t^2} dt &= \int_0^1 t \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - u} du \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \left[(1 - u)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

III.3.

- (**Question de cours**) Soit $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ deux segments non réduits à un point dans \mathbb{R} et φ une application bijective et de classe C^1 entre $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ telle que φ' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. Énoncer le théorème qui relie l'intégrabilité au sens de Riemann des fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} à celle des fonctions de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} ainsi que la formule de changement de variables dans les intégrales de Riemann complétant ce théorème. C'est la proposition 3.17 du polycopié. Dire que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ équivaut à dire que $t \in [\alpha, \beta] \mapsto f(\varphi(t)) |\varphi'(t)|$ est intégrable au sens de Riemann sur $[\alpha, \beta]$. De plus, on a alors, si l'une ou l'autre de ces conditions d'intégrabilité au sens de Riemann est remplie :

$$\int_{[a,b]} f(\xi) d\xi = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(\tau)) |\varphi'(\tau)| d\tau.$$

- La fonction

$$f : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est-elle bornée sur $[0, 1]$? Quels sont les points de discontinuité de cette fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} ? La fonction f est-elle intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$? Cette fonction a pour limite à gauche $+\infty$ au point 1 ; elle n'est pas bornée. Le seul point de discontinuité est $x_0 = 1$. Parmi les clauses nécessaires pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann sur un segment, figure le fait que cette fonction soit bornée sur ce segment (voir la définition 3.3 du polycopié). Ici f n'est pas bornée sur $[0, 1]$, donc elle n'est pas intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

- Soit $\alpha \in]0, 1[$; justifier pourquoi la restriction $f|_{[0, \alpha]}$ de f au segment $[0, \alpha]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0, \alpha]$. On notera $I_\alpha[f]$ l'intégrale de Riemann de $f|_{[0, \alpha]}$ sur $[0, \alpha]$. La restriction de f à $[0, \alpha]$ est une fonction continue sur ce segment. Cette restriction est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0, \alpha]$.
- En utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales de Riemann rappelée dans le premier item (appliquée avec la fonction $\varphi = \sinus : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$), montrer que

$$I_\alpha[f] = \arcsin(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} I_\alpha[f] = \pi/2.$$

L'application φ réalise bien une bijection de classe C^1 entre $[0, \arcsin(\alpha)]$ et $[0, \alpha]$; de plus $\varphi' = \cos$ ne s'annule pas sur $[0, \arcsin(\alpha)]$ car on a $0 < \arcsin(\alpha) < \pi/2$. La formule de changement de variables rappelée au premier item donne

$$\begin{aligned} \int_{[0, \alpha]} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} &= \int_{[0, \arcsin(\alpha)]} \cos(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2(\tau)}} \\ &= \int_{[0, \arcsin(\alpha)]} d\tau = \arcsin(\alpha). \end{aligned}$$

La deuxième égalité demandée résulte de la continuité de la fonction \arcsin en $t = 1$ et du fait que $\arcsin(1) = \pi/2$.

- En utilisant le comportement des suites de sommes de Riemann rappelé en **III.1** et les résultats établis à l'item précédent, montrer que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \left[\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{[N\alpha]} \frac{1}{\sqrt{N^2 - k^2}} \right) \right] = \frac{\pi}{2} \quad ([N\alpha] = \text{partie entière de } N\alpha).$$

On introduit la subdivision de $[0, \alpha]$ définie par

$$0 < 1/N < 2/N < \dots < \frac{[N\alpha]}{N} < \alpha. \quad (*)$$

On constate que

$$\sum_{k=1}^{[N\alpha]} \frac{1}{\sqrt{N^2 - k^2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[N\alpha]-1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2/N^2}} + \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} - \frac{1}{N}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} = \\ &= \frac{\alpha - [N\alpha]/N}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} + \left(\frac{1}{N} - (\alpha - [N\alpha]/N) \right) \frac{1}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} \\ &= \frac{\alpha - [N\alpha]/N}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} + \epsilon(N) \end{aligned}$$

avec

$$0 \leq \epsilon(N) \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

On a donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon(N) = 0$. D'autre part

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[N\alpha]-1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2/N^2}} + \frac{\alpha - [N\alpha]/N}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}}$$

est une somme de Riemann pour la fonction f sur le segment $[0, \alpha]$ relativement à la subdivision (*); lorsque N tend vers l'infini, le pas de cette subdivision tend vers 0 et l'on a donc, d'après le résultat de cours rappelé à la question **III.1** :

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[N\alpha]-1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2/N^2}} + \frac{\alpha - [N\alpha]/N}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} \right) = \\ & = \int_{[0, \alpha]} f(\xi) d\xi = \arcsin(\alpha). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} = \\ & \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[N\alpha]-1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2/N^2}} + \frac{\alpha - [N\alpha]/N}{\sqrt{1 - ([N\alpha]/N)^2}} \right) + \epsilon(N) - \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

on a aussi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{[N\alpha]} \frac{1}{\sqrt{N^2 - k^2}} \right) = \arcsin(\alpha).$$

En prenant la limite (de cette limite) lorsque $\alpha \in]0, 1[$ tend vers 1 par valeurs inférieures, on trouve bien $\pi/2$ puisque la fonction arcsin est continue en 1. Cela établit le résultat demandé².

2. En fait, on aurait pu établir que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N^2 - k^2}} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad (**)$$

ce qui aurait été le double passage à la limite. Mais il aurait fallu pour cela utiliser la majoration

$$\sum_{k=[N\alpha]}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N^2 - k^2}} \leq \frac{N - [N\alpha]}{\sqrt{N^2 - [N\alpha]^2}}$$

et choisir dans un premier temps α assez proche de 1 pour que ce terme reste inférieur ou égal à ϵ (arbitraire) indépendamment de N tendant vers l'infini. On ne demandait pas ici d'établir ce résultat (**), et cette note est à interpréter juste comme un commentaire.

Annales 2014-2015, texte et corrigé du DS Terminal, 3h00

EXERCICE I

I.1. Pourquoi la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet-elle un développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$? Écrire ce développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. Cette fonction est une fonction de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ comme composée de la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x$ de classe C^∞ sur \mathbb{R} et de la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. D'après la formule de Taylor-Young (théorème 2.6 du polycopié), cette fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet un DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$. Comme $f'(0) = 1$, $f''(0) = [(x+1)^{-1/2}/2]_{x=0} = 1/2$, $f'''(0) = [-(1+x)^{-3/2}/4]_{x=0} = -1/4$, le DL demandé est

$$\sqrt{1+h} = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} h^k + o(h^2) = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2).$$

I.2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de terme général $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+5}$. En exploitant le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ pour la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ (établi à la question **I.1**) et en pensant à factoriser $n + \alpha$ sous la forme $n(1 + \alpha/n)$ lorsque $\alpha > 0$, vérifier qu'il existe des nombres réels a et b (que l'on calculera) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n^{3/2}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Comme suggéré dans le texte, on écrit, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n+2} = \sqrt{n} \sqrt{1+2/n} \quad \text{et} \quad \sqrt{5+n} = \sqrt{n} \sqrt{1+5/n}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, la suite $(1/n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 et l'on peut donc exploiter le DL à l'ordre 2 trouvé à la question **I.1** pour écrire, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{5+n} &= \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &\quad - \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{n} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{5}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= (1 - 5/2) \frac{1}{\sqrt{n}} - (1/2 - 25/8) \frac{1}{n^{3/2}} + o(n^{-3/2}) \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{21}{8} \times \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

On trouve donc $a = -3/2$ et $b = 21/8$.

I.3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente et calculer sa limite. Peut-on dire aussi que cette suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy ? Puisque l'on a (d'après le résultat établi à la question **I.2**) que, lorsque n tend vers l'infini,

$$u_n = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{21}{8} \times \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$$

et que les suites $(1/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ et $(1/n^{3/2})_{n \geq 1}$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend aussi vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Toute suite de nombres réels ou complexes convergente vers un nombre réel ou complexe est une suite de Cauchy (converger vers un nombre réel ou complexe et être de Cauchy sont même deux propriétés équivalentes pour une suite de nombres réels ou complexes d'après le théorème de Cauchy, théorème 1.3 du polycopié) ; la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers 0 est donc naturellement une suite de Cauchy.

I.4. Montrer que la suite $(\sqrt{n} \times u_n)_{n \geq 0}$ est aussi une suite convergente vers une limite réelle ℓ que l'on calculera. Quel est le signe de $\sqrt{n} \times u_n - \ell$ lorsque n devient grand ? Lorsque n tend vers l'infini, on a, d'après le résultat établi à la question

I.3 :

$$\sqrt{n} \times u_n = -\frac{3}{2} + \frac{21}{8} \times \frac{1}{n} \times (1 + \varepsilon_n)$$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. Comme la suite $(1/n)_{n \geq 1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(\sqrt{n} \times u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $\ell = -3/2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme on a, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{n} u_n + \frac{3}{2} = \frac{21}{8n} \times (1 + \varepsilon_n),$$

que $1/n > 0$ si $n \geq 1$ et que la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, le signe de $\sqrt{n} u_n - \ell = \sqrt{n} u_n + 3/2$ lorsque n devient grand est le signe plus.

EXERCICE II

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq a,$$

où a désigne un nombre réel strictement positif.

II.1. Justifier en invoquant un résultat du cours que l'on explicitera que la fonction f est une fonction strictement croissante sur \mathbb{R} . D'après la formule des accroissements finis (applicable ici car f est dérivable sur \mathbb{R} , donc *a fortiori* continue sur \mathbb{R} , voir le corollaire 2.2 du cours), on peut écrire, si $x < y$ sont deux nombres réels distincts,

$$\exists c_{x,y} \in]x, y[\quad \text{tel que } f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x) \geq a(y - x) > 0.$$

La fonction f est donc bien une fonction strictement croissante sur \mathbb{R} . On pouvait invoquer ici aussi la première assertion de la proposition 2.12 du polycopié.

II.2. Montrer que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) - f(0) \geq ax.$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On applique à nouveau la formule des accroissements finis : pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0) \geq ax.$$

On a donc bien $f(x) \geq f(0) + ax$ pour tout $x \geq 0$ (c'est évident lorsque $x = 0$). Comme la fonction affine de pente strictement positive $x \mapsto ax + f(0)$ tend vers

$+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, toute fonction h telle que $h(x) \geq L(x)$ pour tout $x \geq 0$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. C'est bien le cas en particulier pour la fonction f .

EXERCICE III

III.1. *Étant donnée une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et un entier $N \in \mathbb{N}$, énoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $N + 1$ entre a et b en précisant sous quelles hypothèses sur la fonction f cette formule est vraie. Il s'agit du théorème 2.7 du polycopié. Si $N \in \mathbb{N}$ et que f est une fonction à valeurs réelles de classe C^N sur un intervalle I , que a et b sont deux points distincts de I , et qu'en plus la fonction $f^{(N)}$ est dérivable dans l'intervalle ouvert $I_{a,b}$ entre ces deux points, on peut écrire*

$$\exists c \in I_{a,b} \quad \text{tel que} \quad f(b) - \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(c).$$

III.2. *Montrer que, pour tout nombre réel $x \in [-1, 1]$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité*

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2p+1)!}.$$

On applique cette formule avec la fonction \sin entre 0 et x et l'entier $N = 2p + 1$. La fonction \sin est une fonction impaire, de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et telle que $f^{(2k)}(0) = 0$ et que $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\ell=0}^{2p+1} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!} x^\ell = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et x (rappelée à la question **III.1**), il existe, pour tout $x \in [-1, 1]$, un réel c_x strictement inclus entre 0 et x tel que :

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ = \frac{x^{2(p+1)}}{(2(p+1))!} f^{(2(p+1))}(c_x) = \frac{x^{2(p+1)}}{(2(p+1))!} (-1)^{p+1} \sin(c_x) \end{aligned}$$

puisque $\sin^{(2\ell)} = (-1)^\ell \sin$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et que $(2p+1) + 1 = 2(p+1)$. En prenant les valeurs absolues, on trouve bien :

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2(p+1)}}{(2(p+1))!} \leq \frac{1}{(2p+1)!}.$$

III.3. *Calculer $3!$, $5!$, $7!$, $8!$, $9!$ et vérifier que $9! > 10^5$. En utilisant l'inégalité établie à la question **III.2** avec une valeur de p convenable, trouver un entier positif a tel que les quatre premières décimales de $a/5040$ soient les mêmes que les quatre premières décimales de $\sin(1)$. On a $3! = 6$, $5! = 120$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880 > 10^5 = 100000$. Si l'on applique le résultat obtenu à la question **III.2** avec $x = 1$ et $p = 3$, on trouve*

$$\left| \sin(1) - \left(1 + \frac{0}{2!} - \frac{1}{6} + \frac{0}{4!} + \frac{1}{120} + \frac{0}{6!} - \frac{1}{5040} + \frac{0}{8!} \right) \right| \leq \frac{1}{(8+1)!} = \frac{1}{9!}.$$

On utilise ici la formule de Taylor-Lagrange complète à l'ordre $2(p+1)+1=9$. On a, en réduisant les fractions au même dénominateur :

$$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{4241}{5040}.$$

D'après la formule établie à la question 1, l'écart entre $\sin(1)$ et le nombre rationnel $4241/5040$ est un nombre inférieur ou égal en valeur absolue au seuil $1/9! < 10^{-5}$. Les quatre premières décimales de $\sin(1)$ et de $4241/5040$ sont donc les mêmes. On prend donc $a = 4241$ (en prenant comme valeur de p la valeur $p = 4$). On peut vérifier ce résultat avec **Sage** en comparant les représentations de $\sin(1)$ et de $4241/5040$ en virgule flottante, avec 100 bits de précision en binaire (c'est-à-dire $100 \times \ln(2)/\ln(10) \simeq 30$ décimales dans le système décimal) :

```
sage : Ndigits = 100; R = RealField(Ndigits)
      R(sin(1)); R(4241/5040)
ans :
0.84147098480789650665250232163
0.84146825396825396825396825397
```

Les quatre premières décimales communes sont 8,4,1,4 (on le vérifie aussi avec une calculatrice ordinaire comme celle autorisée lors de l'examen); on constate que $\sin(1) > 4241/5040$.

EXERCICE IV

IV.1. *Écrire le développement limité à l'ordre 12 au voisinage de l'origine pour la fonction $x \mapsto 1 - \cos(x^6)$.* Il s'agit du développement d'une fonction composée $g \circ f$, où $f : x \mapsto x^6$ et $g : X \mapsto 1 - \cos(X)$. Le DL à l'ordre 12 de $X \mapsto 1 - \cos(X)$ en $X_0 = 0$ est donné par la formule de Taylor :

$$1 - \cos(H) = 1 - \left(1 - \frac{H^2}{2!} + \frac{H^4}{4!} - \frac{H^6}{6!} + \frac{H^8}{8!} - \frac{H^{10}}{10!} + \frac{H^{12}}{12!} + o(H^{12})\right).$$

Lorsque l'on substitue H par h^6 et que l'on ne garde que les termes contribuant à la partie principale du DL à l'ordre 4 de $x \mapsto 1 - \cos(x)$ (c'est-à-dire seulement les termes en h^k avec $0 \leq k \leq 12$), il reste :

$$1 - \cos(h^6) = \frac{h^{12}}{2} + o(h^{12}).$$

C'était ce développement limité que l'on demandait ici. Mais, afin de pouvoir traiter convenablement la question **IV.2** suivante, il fallait pousser plus loin de développement limité, en fait en l'exprimant avec un terme de plus à l'ordre cette fois 24 et non plus 12, ce qui donne

$$1 - \cos(h^6) = \frac{h^{12}}{2} - \frac{h^{24}}{4!} + o(h^{24}) = \frac{h^{12}}{2} - \frac{h^{24}}{24} + o(h^{24}).$$

IV.2. *Déduire du résultat établi à la question IV.1 le développement limité à l'ordre 15 au voisinage de l'origine pour la fonction :*

$$x \mapsto (1 - \cos(x^6))^{1/4}.$$

Le DL à l'ordre 1 pour la fonction $X \mapsto (1 + X)^{1/4}$ en $X = 0$ est

$$(1 + H)^{1/4} = 1 + \frac{H}{4} + o(H). \quad (\dagger)$$

On a donc, d'après le résultat établi à la question **III.1** :

$$\begin{aligned}(1 - \cos(h^6))^{1/4} &= \left(\frac{h^{12}}{2} + o(h^{12})\right)^{1/4} \\ &= h^3(1 + o(1))^{1/4} = h^3\left(1 + \frac{o(1)}{4} + o(o(1))\right)\end{aligned}$$

en utilisant le DL à l'ordre 1 (†) pour $X \mapsto (1+X)^{1/4}$. On constate que ce n'est pas suffisant ici pour avoir un DL à l'ordre 15 (car le $o(1)$ n'est pas du tout explicite). Il fallait donc pousser plus loin (jusqu'à l'ordre 24) le DL de $x \mapsto 1 - \cos(x^6)$ au voisinage de $x = 0$. Si l'on fait cela, on obtient

$$\begin{aligned}(1 - \cos(h^6))^{1/4} &= \left(\frac{h^{12}}{2} - \frac{h^{24}}{24} + o(h^{24})\right)^{1/4} \\ &= \left(\frac{h^{12}}{2}\right)^{1/4} \times \left(1 - \frac{h^{12}}{12} + o(h^{12})\right)^{1/4} \\ &= \frac{h^3}{2^{1/4}} \left(1 - \frac{h^{12}}{12} + o(h^{12})\right)^{1/4} \\ &= \frac{h^3}{2^{1/4}} - \frac{h^{15}}{48 \times 2^{1/4}} + o(h^{15})\end{aligned}$$

si l'on utilise le DL à l'ordre 1 de $X \mapsto (1+X)^{1/4}$ donné par (†) ci-dessus. On a ici le DL à l'ordre 15 demandé.

EXERCICE V

Soit c un nombre réel. On suppose que la fonction polynomiale

$$x \mapsto x^4 + 4x + c$$

s'annule en deux nombres réels distincts $x_0 < x_1$. Montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + 1$ s'annule nécessairement dans $]x_0, x_1[$. En déduire que l'on a nécessairement $x_0 < -1$ et $x_1 > -1$. Si la fonction polynomiale (donc de classe C^∞) $x \mapsto x^4 + 4x + c$ s'annule en deux points distincts $x_0 < x_1$, elle prend la même valeur (ici en l'occurrence 0) en ces deux points. D'après le théorème de Rolle (en l'occurrence le théorème 2.4 du polycopié), sa fonction dérivée $x \mapsto 4(x^3 + 1)$ s'annule au moins une fois dans $]x_0, x_1[$. Or $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; comme la fonction trinôme $x \mapsto x^2 - x + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} car son discriminant $1 - 4 = -3$ est strictement négatif, -1 est le seul zéro réel de cette fonction dérivée $x \mapsto x^3 + 1$. On déduit de ce qui précède que nécessairement $x_0 < -1 < x_1$.

EXERCICE VI

VI.1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ et pour chaque entier k entre 0 et $n-1$, on choisit un point $x_{n,k}$ dans $[k/n, (k+1)/n]$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}).$$

En utilisant un théorème du cours que l'on énoncera précisément, montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite converge vers un nombre réel S . Calculer ce nombre réel lorsque f est la fonction :

$$f : x \in [0, 1] \mapsto \frac{4}{1+x^2}.$$

La somme S_n est une somme de Riemann (définition 3.8 du polycopié) pour la fonction continue (donc intégrable au sens de Riemann) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, associée à la subdivision régulière de $[0, 1]$ de pas $1/n$. Lorsque n tend vers l'infini, le pas de cette subdivision tend vers 0. D'après le théorème d'approximation de l'intégrale d'une fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment $[a, b]$ par ses sommes de Riemann (pour une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0 comme c'est le cas ici puisque ce pas vaut $1/n$), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_{[0,1]} f(x) dx.$$

Il s'agit de l'assertion finale du théorème 3.3 du polycopié. Pour la fonction $x \mapsto 4/(1+x^2)$, on trouve donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= 4 \int_{[0,1]} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 4 [\arctan(X)]_0^1 = 4 \arctan(1) = \pi. \end{aligned}$$

VI.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_p = 4 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^p}.$$

En écrivant, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{p+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^p} - \frac{x}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^{p+1}},$$

vérifier que la suite $(I_p)_{p \geq 1}$ est régie par la condition initiale $I_1 = \pi$ et la relation de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p+1} = I_p \times \left(\frac{2p-1}{2p} \right) + \frac{1}{p 2^{p-1}}.$$

On pose $J_p = I_p/4$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant (pour transformer sous l'intégrale l'expression donnant $J_{p+1} = \int_0^1 dx/(1+x^2)^{p+1}$) la relation proposée, on trouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$J_{p+1} = J_p - \int_0^1 \frac{x}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^{p+1}} dx. \quad (*)$$

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction

$$x \mapsto \frac{2x}{(1+x^2)^{p+1}}$$

est la fonction

$$X \mapsto -\frac{1}{p} \frac{1}{(1+X^2)^p} = -\frac{1}{p} (1+X^2)^{-p}$$

du fait du théorème de dérivation des fonctions composées (règle de Leibniz). En utilisant la formule d'intégration par parties (proposition 3.5 du polycopié) avec ici les fonctions $g_1 : x \mapsto x/2$ et $g_2 : X \mapsto -(1+X^2)^{-p}/p$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{2} \frac{2x}{(1+x^2)^{p+1}} dx &= \int_0^1 g_1(x) g_2'(x) dx = \\ &= \left[\frac{X}{2} \times \left(-(1+X^2)^{-p}/p \right) \right]_0^1 - \int_0^1 g_1'(x) g_2(x) dx = -\frac{1}{p 2^{p+1}} + \frac{1}{2p} J_p. \end{aligned}$$

En reportant dans (*), on a donc la relation de récurrence :

$$J_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{2p}\right) J_p + \frac{1}{p2^{p+1}}.$$

En multipliant les deux membres par 4, on trouve bien la relation voulue. On sait déjà d'autre part que $I_1 = \pi$. Cette condition initiale, couplée avec la relation inductive que l'on vient d'établir, génère bien la suite $(I_p)_{p \geq 1}$.

VI.3. Calculer la limite de la suite $(\tilde{S}_n)_{n \geq 1}$ de terme général

$$\tilde{S}_n = 4 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^5}{(n^2 + k^2)^3} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

On exprime \tilde{S}_n pour tout entier $n \geq 1$ comme

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 4 \left(\frac{n^2}{n^2 + k^2} \right)^3 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{4}{(1 + (k/n)^2)^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

avec $f : x \mapsto 4/(1 + x^2)^3$. Comme $k/n \in [k/n, (k+1)/n]$, \tilde{S}_n est une somme de Riemann pour la fonction f sur $[0, 1]$ relativement à la subdivision régulière de pas $1/n$ de ce segment. D'après le résultat rappelé à la question **VI.1**, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{S}_n = 4 \int_{[0,1]} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = 4 \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = I_3.$$

D'après la relation inductive établie à la question **VI.2**, on a

$$I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2} I_1 + 1 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

En combinant ces deux relations, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{S}_n = I_3 = \frac{3\pi}{8} + 1.$$

VI.4. Quel est développement limité à l'ordre 6 au voisinage de l'origine pour la fonction :

$$f : y \mapsto \frac{1}{(1+y)} ?$$

En déduire par dérivation le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de l'origine pour la fonction $y \mapsto (1+y)^{-3}$, puis le développement limité à l'ordre 8 au voisinage de l'origine pour la fonction :

$$x \mapsto \frac{4}{(1+x^2)^3}.$$

Donner enfin le développement limité à l'ordre 9 au voisinage de l'origine pour la fonction

$$F : X \mapsto 4 \int_0^X \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

D'après la formule

$$\frac{1+h^7}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + h^6 = \frac{1}{1+h} + \frac{o(h^6)}{1+h} = \frac{1}{1+h} + o(h^6)$$

(valable pour $h \neq -1$, donc en particulier lorsque h tend vers 0), le DL à l'ordre 6 au voisinage de l'origine pour la fonction f est

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + h^6 + o(h^6).$$

En dérivant deux fois la fonction f , on trouve la fonction $y \mapsto 2(1+y)^{-3}$. Le DL à l'ordre 4 pour cette fonction $y \mapsto (1+y)^{-3}$ s'obtient en dérivant deux fois le DL de $f : y \mapsto 1/(1+y)$ à l'ordre 6, puis en divisant ensuite le résultat par 2. Cela donne :

$$\begin{aligned} (1+h)^{-3} &= \frac{1}{2}(2 - 6h + 12h^2 - 20h^3 + 30h^4 + o(h^4)) \\ &= 1 - 3h + 6h^2 - 10h^3 + 15h^4 + o(h^4). \end{aligned}$$

En composant avec la fonction $x \mapsto x^2$, on en déduit que le DL à l'ordre 8 en $x_0 = 0$ de $x \mapsto (1+x^2)^{-3}$ est

$$(1+h^2)^{-3} = 1 - 3h^2 + 6h^4 - 10h^6 + 15h^8 + o(h^8).$$

Le DL à l'ordre 9 de F en $x_0 = 0$ s'obtient en primitivant ce DL à l'ordre 8 (multiplié au préalable par 4) et en exploitant le fait que $F(0) = 0$ (F est bien la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto 4(1+x^2)^{-3}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, théorème 2.9 du polycopié). On applique ensuite la proposition 2.19 du polycopié relativement à l'intégration terme-à-terme des DL. On a donc

$$F(H) = 4H - 4H^3 + \frac{24}{5}H^5 - \frac{40}{7}H^7 + \frac{20}{3}H^9 + o(H^9).$$

Bibliographie

- [Eis] M. Eisermann, L'algorithme **Pagerank** de Google : une promenade sur la toile.
<http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/enseignement/google-promenade.pdf>
- [Lag] J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, seconde édition, Courcier, Paris, 1813.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2299441/f7>
- [MatL1] Mathématiques L1, Laurent Larazzini et Jean-Pierre Marco *ed.*, nouvelle édition + eText, Pearson Education, Paris, 2012.
- [MatToutenUn] Mathématiques Tout-en-Un pour la Licence, niveau L1, J.P. Ramis et A. Warusfel *ed.*, Dunod, Paris, 2006.
- [Scilab] **Scilab**, logiciel libre téléchargeable sur le site :
<http://www.scilab.org>
Voir en particulier le module lycées :
<http://www.scilab.org/fr/education/lycee>
- [Ymis] A. Yger, Mathématiques de base, Cours MISMI, 2007-2008.
<http://math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf>

Exercice I

1. Questions de cours.

(a) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Corrigé. Une suite $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier naturel N_ε tel que $p \geq N_\varepsilon, q \geq N_\varepsilon, (p, q) \in \mathbb{N}$, implique $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

(b) Énoncer le critère (ou théorème) de Cauchy pour les suites numériques.

Corrigé. Une suite de nombres complexes est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

2. Montrer que la suite $n \mapsto u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy (considérer $u_{2n} - u_n$).

Corrigé. On a $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$, chaque terme de la somme étant $\geq \frac{1}{2n}$. Elle ne vérifie donc pas le critère de Cauchy.

3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout entier n , $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n$ avec $q \in [0, 1[$. Montrer que cette suite converge.

Corrigé. Supposons que n et m sont deux entiers naturels tels que $m \geq n$. Alors, en écrivant $u_m - u_n = u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \dots + u_{n+1} - u_n$, il vient $|u_m - u_n| \leq \sum_{k=1}^{m-n} |u_{n+k} - u_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{m-n} q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{m-n} q^k = q^n \frac{1-q^{m-n+1}}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q}$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, puisque $q < 1$, il existe n tel que $\frac{q^n}{1-q} \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy donc converge.

Exercice II

1. Donner le développement limité à l'origine, à l'ordre n , de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{(\cos x) - (1-x^2/2)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En déduire la tangente, et la position par rapport à celle-ci, à l'origine, de la courbe d'équation $y = f(x)$.

Corrigé. Le développement limité de $\cos x$ à l'origine est $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Par suite, $\cos x - (1 - x^2/2) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$, et il vient $f(x) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k x^{2k-3}}{(2k)!} + x^{2n-2} \varepsilon(x)$. On a donc $f(x) = \frac{x}{4!} - \frac{x^3}{6!} + x^4 \varepsilon(x)$, ce qui montre que la droite d'équation $y = \frac{x}{4!}$ est tangente à la courbe à l'origine, et que, pour x assez petit, la courbe est au dessous de sa tangente si $x > 0$ et au dessus sinon.

2. Étudier les branches infinies de la courbe d'équation $y = (x-2)e^{1/x}$. On déterminera les éventuelles asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci.

Corrigé. Cette courbe a une branche infinie lorsque x tends vers $\pm\infty$ et lorsque x tends vers 0 par valeurs supérieures. Lorsque x tends vers 0, $x > 0$, y tends vers $-\infty$ et la courbe admet la demi-droite $x = 0$, $y < 0$, comme asymptote ; de plus la courbe se trouve à droite de son asymptote.

Étudions maintenant les branches lorsque x tends vers $\pm\infty$. Le développement limité de l'exponentielle donne $y = (x - 2) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) \right)$, avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$. On a donc $y = x - 1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)$. Ceci montre que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, et que la courbe est au dessous de l'asymptote si $x \rightarrow +\infty$ et au dessus sinon.

Exercice III

1. *Questions de cours.*

(a) Soit A une partie de \mathbb{R} et f une fonction de A dans \mathbb{C} . Que signifie « f est uniformément continue » ?

Corrigé. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, $(x, y) \in A \times A$, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

(b) Toute fonction continue f définie sur un intervalle de \mathbb{R} est-elle uniformément continue ? Justifier la réponse par un exemple, et énoncer un théorème donnant une condition suffisante pour l'uniforme continuité d'une telle fonction.

Corrigé. Non : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas uniformément continue sur cet intervalle. Un théorème du cours dit que toute fonction continue sur un **segment** est uniformément continue.

Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $[0, +\infty[$. Soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq 1$. Soit $x > 0$ fixé.

2. Vérifier qu'il existe un unique entier n_x tel que $\frac{x}{\delta} \leq n_x < \frac{x}{\delta} + 1$.

Corrigé. Tout intervalle semi-ouvert $]a, b]$ ou $[a, b[$ de longueur 1 contient exactement un entier.

3. En écrivant $f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{n_x-1} \left(f \left(\frac{(k+1)x}{n_x} \right) - f \left(\frac{kx}{n_x} \right) \right)$, montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \frac{x}{\delta} + 1$.

Corrigé. Comme $\left| \frac{(k+1)x}{n_x} - \frac{kx}{n_x} \right| = \frac{x}{n_x} \leq \delta$, on a $\left| f \left(\frac{(k+1)x}{n_x} \right) - f \left(\frac{kx}{n_x} \right) \right| \leq 1$, et la formule donne $|f(x) - f(0)| \leq n_x \leq \frac{x}{\delta} + 1$.

4. En déduire qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|f(x)| \leq ax + b$.

Corrigé. La question précédente donne $|f(x)| \leq \frac{x}{\delta} + 1 + |f(0)|$, et on peut prendre $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = 1 + |f(0)|$.

5. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Corrigé. Non car elle ne vérifie pas la conclusion de la question précédente (comparaison exponentielle et polynôme).

6. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est-elle uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Corrigé. La dérivée de cette fonction est $\frac{1}{1+x}$. Elle est donc majorée par 1 sur $[0, +\infty[$. Le théorème des accroissements finis donne alors, pour $(x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, $|\ln(1+x) - \ln(1+y)| \leq |x - y|$ ce qui montre que $x \mapsto \ln(1+x)$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice IV

1. *Questions de cours.* Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a, b]$.

(a) Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$?

Corrigé. Cette fonction est continue sur $[a, b]$.

(b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ soit dérivable en un point x_0 . Que vaut alors cette dérivée ?

Corrigé. Cette fonction est dérivable en x_0 si f est continue en ce point et sa dérivée vaut $f(x_0)$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+ =]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$.

L'objectif de l'exercice est d'étudier la fonction F que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. Étudier le signe, la continuité et la dérivabilité de la fonction F .

Corrigé. Si $x \geq 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \geq 0$ sur $[1, x]$ et $F(x) \geq 0$. Si $0 < x < 1$, $\frac{\ln t}{1+t} \leq 0$ sur $[x, 1]$ et $F(x) = -\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t} dt \geq 0$. Comme $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, F est dérivable sur cet intervalle.

3. *Que vaut $F'(x)$?*

Corrigé. $F'(x) = \frac{\ln x}{1+x}$.

4. (a) *Question de cours. Énoncer, pour une fonction h , la formule de Taylor-Young en un point x_0 à l'ordre $p+1$, en précisant les hypothèses sur h .*

Corrigé. Soit h une fonction de classe \mathcal{C}^p définie sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. On suppose que $f^{(p)}$ est dérivable au point x_0 . Alors, pour $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + (x-x_0)^{p+1} \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(b) *Donner le développement limité à l'ordre 3 de F au point 1.*

Corrigé. Un calcul direct donne $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$, $F''(1) = 1/2$ et $F^{(3)}(1) = -1$. Le développement limité est donc

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^3}{6} + (x-1)^3 \varepsilon(x).$$

5. Soit $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$, $t > 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = (\ln x)(\ln(1+x)) - \int_1^x \varphi(t) dt.$$

Corrigé. Immédiat avec $u = \ln x$ et $v = \ln(1+x)$.

6. *En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.*

Corrigé. Lorsque $x \rightarrow 0$, $\ln(1+x)$ est équivalent à x , et, par suite $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)(\ln(1+x)) = 0$. Pour la même raison, la fonction φ se prolonge par continuité au segment $[0, 1]$, ce qui implique que $x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$ est continue sur $[0, 1]$ (Première question de cours). Ainsi F se prolonge en 0 par $F(0) = -\int_0^1 \varphi(t) dt$.

7. *En utilisant un changement de variables montrer que, pour $x > 0$, $F(1/x) = \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) \ln u du$.*

Corrigé. Il suffit de poser $t = \frac{1}{u}$ dans $F(1/x) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt$: $F(1/x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$.

8. *En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\ln^2 x} = 1/2$.*

Corrigé. Le résultat de la question précédente s'écrit $F(x) = -F(1/x) + \int_1^x \frac{\ln u}{u} du = -F(1/x) + \frac{1}{2} (\ln x)^2$, d'où le résultat en vertu de la question 5.

9. On pose $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) *En utilisant le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ montrer que*

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k(x) + \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} dt.$$

Corrigé. Le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ est $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$, d'où la formule.

(b) *En calculant $I_k(x)$, en déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \int_0^1 t^{n+1} \ln(1/t) dt$.*

Corrigé. En intégrant par parties, il vient $I_k(x) = \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$, d'où

$$F(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} dt,$$

ce qui donne le résultat puisque $\left| \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} \right| \leq t^{n+1} \ln(1/t)$.

(c) Conclure que $F(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_1^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Corrigé. La fonction $t \mapsto t \ln t$ se prolonge par continuité au segment $[0, 1]$. Par un théorème du cours elle y est donc bornée par une constante $M > 0$. La question précédente donne donc $\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1}$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| = 0$.

Exercice V

1. Question de cours.

(a) Donner la définition d'une subdivision d'un segment $[a, b]$ et, pour une fonction f définie sur $[a, b]$, d'une somme de Riemann de f associée à cette subdivision.

Corrigé. On appelle subdivision du segment $[a, b]$ une suite finie $\mathcal{S} = (a_i)_{i=0}^n$ de points de $[a, b]$ telle que $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$. On appelle somme de Riemann de f associée à la subdivision \mathcal{S} toute somme de la forme $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(a_{i+1} - a_i)$ où $z_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

(b) Énoncer le théorème reliant les sommes de Riemann d'une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$ et son intégrale.

Corrigé. Le théorème dit que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision \mathcal{S} de pas $\leq \delta$, toute somme de Riemann σ de f associée à \mathcal{S} vérifie $\left| \sigma - \int_{[a,b]} f \right| \leq \varepsilon$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ en en déduire que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}.$$

Corrigé. La formule des accroissements finis donne $\ln(1+x) = x \frac{1}{1+c}$ avec $c \in]0, x[$ ce qui donne $\ln(1+x) \leq x$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+c)^2}$ avec $c \in]0, x[$ d'où on tire $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

On obtient alors les inégalités demandées en appliquant cette inégalité aux points $x = \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$ et en additionnant les inégalités obtenues.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \int_0^1 x(1-x) dx$.

Corrigé. En effet, $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$ et il suffit d'appliquer le théorème sur les sommes de Riemann.

4. En admettant que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \pi/8$, en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{2(n-2)}}{n^2} \right) \dots \left(1 + \frac{\sqrt{(n-2)2}}{n^2} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{(n-1)}}{n^2} \right) = e^{\pi/8}.$$

Corrigé. En effet, la question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \pi/8$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = 0$, et la question 2. donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right) = \pi/8$, et il suffit alors de prendre l'exponentielle de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} \right)$.

FIN