Le rôle transverse des courants au travers d'équations -clef héritées de la théorie du potentiel

Alain Yger

Université de Bordeaux, Talence 33405, France
E-mail address: Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr

Résumé. Les notes du cours sont rédigées et actualisées au fur et à mesure du déroulement du cours. Tous les documents en rapport avec le cours sont disponibles lorsque cela est possible (avec les références indiquée dans la bibliographie de ces notes et qui se remplira au fil de l'avancement du cours) sur le site

`http://math.u-bordeaux.fr/~ayger/DEA2015`

Table des matières

CHAPITRE 1

Distributions et courants

1.1. Fonctions-tests et distributions dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

1.1.1. Définitions des objets

La force de l'analyse est que les objets qui lui sont inhérents sont des objets très « souples ». Les fonctions à valeurs réelles et de classe C^∞ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ peuvent être localisées arbitrairement. On dispose en effet d'un résultat essentiel, le *lemme de partition de l'unité*, que l'on énonce ainsi :

Proposition 1.1 (partitionnement de l'unité dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$). *Soit $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Il existe une collection dénombrable $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ à support compact de U dans $[0,1]$, telles que :*

- *pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe au moins un indice $\iota(k)\in I$ tel que l'on ait $\mathrm{supp}(\varphi_k)\subset U_{\iota(k)}$ [1] ;*
- *pour tout compact $K \subset\subset U$, il n'existe au plus qu'un nombre fini de fonctions φ_k dont le support rencontre K ;*
- *pour tout $x\in U$, on a*

$$1=\sum_{k\in\mathbb{N}}\varphi_k(x), \tag{1.1}$$

la somme figurant au membre de droite de (1.1) étant une somme au plus finie (seul un nombre fini de sommants sont non nuls).

La pièce maitresse sur laquelle repose la preuve de la proposition 1.1 est la fonction radiale

$$x\longmapsto\begin{cases}\exp\big(-1/(1-\|x\|^2)\big) \text{ si } \|x\|<1\\ 0 \text{ si } \|x\|\geq 1\,.\end{cases} \tag{1.2}$$

Pour une preuve, on pourra par exemple se reporter au lemme 1.5 de [**Ydist**].

La proposition 1.1 assure donc que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ et à support compact dans U est un espace vectoriel « souple » : étant donné par exemple un compact $K\subset\subset U$ (cette notation signifiera toujours « *K compact inclus dans U* ») et un ouvert V tel que $K\subset\subset V\subset U$, il est toujours possible de construire une « fonction-plateau » de classe C^∞, à support compact inclus dans V et à valeurs dans $[0,1]$, qui soit identiquement égale à 1 dans un voisinage ouvert de K dans V. Au contraire de cette « souplesse », le cadre algébrique est beaucoup plus « rigide » : les

1. Le support d'une fonction définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles est par définition le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la fonction se trouve être identiquement nulle.

fonctions holomorphes d'une variable (par exemple les fonctions polynomiales d'une variable complexe) dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ obéissent par exemple au *principe des zéros isolés* : si f est non identiquement nulle dans U, les zéros de f dans U constituent un ensemble de points isolés ; on ne saurait donc utiliser des objets aussi « rigides » pour construire des partitions de l'unité ; se placer dans le cadre C^∞ pour pouvoir le faire est impératif.

Plutôt que de définir une topologie sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à support compact dans U, nous allons nous contenter de fixer une *règle de convergence des suites.* Pour cela, on introduit l'exhaustion

$$\mathcal{D}(U,\mathbb{R}) = \bigcup_{K\subset\subset U} \mathcal{D}_K(U,\mathbb{R}),$$

où, si $K \subset\subset U$ désigne un compact de U, $\mathcal{D}_K(U,\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ constitué des fonctions C^∞ à support compact dans U dont le support est inclus dans K.

Définition 1.1 (règle de convergence des suites dans $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$). On dit qu'une suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ converge vers une limite φ dans $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ si et seulement si :

— d'une part il existe un compact K de U tel que, pour k suffisamment grand, toutes les fonctions φ_k vérifient $\operatorname{Supp}\varphi_k \subset K$;

— d'autre part

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to+\infty} N_{K,p}(\varphi_k - \varphi) = 0, \tag{1.3}$$

où l'on a posé, pour toute fonction à valeurs réelles ψ de classe C^∞ au voisinage de K,

$$N_{K,p}(\psi) = \sup_{\{\alpha\in\mathbb{N}^n\,;\,\sum_j \alpha_j\leq p\}} \Big(\sup_K \Big|\prod_1^n \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}[\psi]\Big|\Big). \tag{1.4}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la notion de *distribution* en invoquant le principe de dualité.

Définition 1.2 (distribution dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$). On appelle *distribution à valeurs réelles dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$* toute application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ « continue » au sens suivant : pour toute suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ convergeant suivant la règle de convergence des suites (définition 1.1) vers la fonction nulle, on a

$$\lim_{k\to\infty} \langle T,\varphi_k\rangle = 0.$$

(on utilise ici le crochet de dualité pour noter l'action de T sur une fonction-test).

Remarque 1.1. Chaque $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(U,\mathbb{R})$ hérite d'une topologie qu'il est possible de définir par une distance, à savoir

$$\delta_K(\varphi,\psi) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p}\frac{N_{K,p}(\varphi-\psi)}{1+N_{K,p}(\varphi-\psi)} \quad \forall\,\varphi,\psi \in \mathcal{D}_K(U,\mathbb{R}).$$

Mais la topologie la plus fine pour laquelle toutes les injections

$$i_K \;: \mathcal{D}_K(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(U)$$

sont continues (qui est la topologie [1] dont on voudrait équiper $\mathcal{D}(U)$) ne saurait être définie par une distance. Cependant, le fait qu'une application linéaire $T : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{R}$ soit continue (une fois cette topologie « finale » choisie sur $\mathcal{D}(U)$) se teste sur les suites. La définition que nous donnons pour une distribution avec la définition 1.2 est donc en fait celle d'une application linéaire continue de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $\mathcal{D}(U)$ est muni de la topologie finale mentionnée ci-dessus.

Il existe un critère quantitatif très utile pour caractériser, parmi les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, celles qui sont des distributions.

Proposition 1.2 (critère quantitatif et ordre d'une distribution). *Soit T une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. L'application T est une distribution à valeurs réelles dans U si et seulement si, pour tout $K \subset\subset U$, il existe une constante C_K et un entier $p_K \in \mathbb{N}$ (que l'on supposera par définition le plus petit possible, K étant fixé) tels que*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(U,\mathbb{R}),\ |\langle T,\varphi\rangle| \le C_K\, N_{K,p_K}(\varphi). \tag{1.5}$$

On dit que la distribution $T \in \mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ est d'ordre fini si et seulement si

$$\sup_{K\subset\subset U} p_K = \max_{K\subset\subset U} p_K = p \in \mathbb{N}.$$

On dit alors que la distribution est d'ordre $p = p_U$ sur U.

On trouvera une courte preuve de cette proposition (facile) dans [**Ydist**] (proposition 1.2).

Remarque 1.2. Il existe bien sûr des distributions d'ordre infini : par exemple la distribution

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$$

est d'ordre infini. Elle est par contre d'ordre fini N dans $]-\infty, N+1/2[$ (voilà un petit exercice).

1.1.2. Premiers exemples : fonctions localement intégrables et mesures (distributions d'ordre 0)

Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R})$ est une classe de fonction localement intégrable sur U, f définit naturellement une distribution à valeurs réelles (notée $[f]$, j'ai volontairement utilisé cette notation entre crochets ici pour bien différencier fonction f et distribution correspondante) sur U par

$$\langle [f],\varphi\rangle := \int_U f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{1.6}$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^n$. Cette distribution $[f]$ est une distribution d'ordre 0. Plus généralement, soient μ^+ et μ^- deux mesures positives sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(U)$ telles que $\mu^\pm(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset\subset U$ (on dit alors que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est une mesure de Radon réelle sur U).

1. On appelle cette construction de topologie *réalisation d'une topologie finale* car il s'agit d'équiper ce qui est l'espace but (ici $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$) pour une famille d'applications que l'on souhaite rendre toutes continues (ici les injections i_K pour $K \subset\subset U$).

On associe à une telle mesure de Radon réelle μ sur U une distribution $[\mu]$ sur U en posant

$$\langle [\mu], \varphi\rangle := \int_U f\, d\mu = \int_U f\, d\mu^+ - \int_U f\, d\mu^-$$

(le membre de droite a un sens car c'est la différence de deux quantités positives finies par hypothèses sur les mesures $\mu^{\pm}$). Cette distribution $[\mu]$ est encore une distribution d'ordre 0. En fait, le théorème de représentation de F. Riesz (voir par exemple [**Rud**] [1]) assure que toute distribution à valeurs réelles T d'ordre 0 sur U est nécessairement de la forme $T = [\mu]$ pour une certaine mesure de Radon réelle $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sur U. *Les distributions à valeurs réelles d'ordre* 0 *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *sont donc les distributions-mesures* $[\mu^+ - \mu^-]$ *sur* U. Un exemple majeur est celui de la mesure de Dirac δ_a qui définit une distribution à valeurs réelles sur U par :

$$\langle [\delta_a], \varphi\rangle = \varphi(a) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}).$$

On notera cette distribution $[\{a\}]$ au lieu de $[\delta_a]$ par la suite à cause des notations classiquement utilisées pour les 0-cycles en géométrie algébrique.

1.1.3. Dérivation des distributions

On touche dans cette section à la raison première pour laquelle les physiciens depuis Paul Dirac (autour de 1920-1930) ont intensivement exploité le concept de distribution.

Pour construire des distributions d'ordre supérieur, il existe un moyen très simple de procéder. On peut en effet « dériver » les distributions à un ordre arbitraire. Si $T \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ et que

$$P(D_x) = \sum_{\{\alpha\in\mathbb{N}^n\,;\, \sum_j \alpha_j \leq p\}} c_\alpha \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots \partial x_n^{\alpha_n}} := \sum_{\{\alpha\in\mathbb{N}^n\,;\, \sum_j \alpha_j \leq p\}} c_\alpha D_x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

est un opérateur différentiel à coefficients constants (ici réels) d'ordre exactement égal à p (c'est-à-dire qu'il existe au moins un coefficient c_α avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p$ tel que $c_\alpha \neq 0$), on définit naturellement une distribution notée $P(D_x)[T]$ en posant :

$$\big\langle P(D_x)[T], \varphi\big\rangle := \big\langle T, P(-D_x)[\varphi]\big\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Si T est une distribution-mesure $T = [\mu]$ (c'est-à-dire d'ordre 0), alors $P(D_x)[T]$ est bien sûr une distribution d'ordre p dans U. Plus généralement, si T est une distribution d'ordre p_T dans U, $P(D)[T]$ est d'ordre $p_T + \deg P = p_T + p$.

La définition (1.8) est justifiée par la formule d'intégration par parties. En effet, si l'on a $T = [f]$, où f est une fonction de classe C^p de U dans $\mathbb{R}$, alors, on déduit précisément de la formule d'intégration par parties (appliquée en chaque coordonnée successivement) que :

$$\big\langle \big\langle P(D_x)[[f]], \varphi\big\rangle = \big\langle [f], P(-D_x)[\varphi]\big\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}). \tag{1.9}$$

La définition (1.8) est donc parfaitement en accord avec la formule (1.9) dans le cas particulier où $T = [f]$ avec $f \in C^p(U, \mathbb{R})$.

1. Il s'agit du résultat qui fait le pont entre les approches ensemblistes (celle que classiquement on enseigne en Licence en France) et fonctionnelle de la théorie de la mesure.

Exemple 1.1 (la formule des sauts)**.** On pourra vérifier par exemple que la dérivée au sens des distributions de la distribution $[Y]$ associée à la fonction d'Heaviside

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 1/2 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

est la distribution-mesure $[\{0\}]$. En effet

$$\langle d[Y]/dt, \varphi \rangle = -\langle [Y], \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi(t)\, dt = \varphi(0) - \varphi(+\infty) = \varphi(0)$$

pour toute fonction-test dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette formule $d[Y]/dt = [\{0\}]$ est un cas particulier de la *formule des sauts* que nous retrouverons.

1.1.4. Convergence des suites de distributions

Notons $\mathcal{D}'(U, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des distributions à valeurs réelles sur U. Pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R})$, on dispose de la forme $\mathbb{R}$-linéaire :

$$L_\varphi \ : T \in \mathcal{D}'(U, \mathbb{R}) \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}.$$

On pourrait naturellement équiper $\mathcal{D}'(U, \mathbb{R})$ d'une topologie, celle qui soit cette fois la moins fine (c'est-à-dire dont la collection d'ouverts soit la moins riche) pour laquelle toutes les applications L_φ sont continues. Cette topologie [1] , comme d'ailleurs la topologie de $\mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ (que nous n'avons pas explicité) n'est pas non plus métrisable. On ne l'explicitera, mais on se contentera de donner une *règle de convergence des suites de distributions*.

Définition 1.3 (règle de convergence des suites dans $\mathcal{D}'(U, \mathbb{R})$). Une suite $(T_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ est dite converger (faiblement) au sens des distributions vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(U, \mathbb{R})$ si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}), \quad \lim_{k\to+\infty} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle. \tag{1.10}$$

La seule chose importante que nous retiendrons ici et qui relève de l'analyse fonctionnelle est l'avatar suivant du théorème de Banach-Steinhaus [2] :

Proposition 1.3 (le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}'(U, \mathbb{R})$ est séquentiellement complet). *Soit $(T_k)_{k\geq 0}$ une suite de distributions à valeurs réelles dans U telle que, pour toute fonction-test φ dans $\mathcal{D}(U, \mathbb{R})$, la suite $(\langle T_k, \varphi \rangle)_{k\geq 0}$ converge vers une limite finie $\langle L, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$. Alors l'application*

$$\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R}) \longmapsto \langle L, \varphi \rangle$$

est aussi une distribution à valeurs réelles dans U.

---

1. On l'appelle cette fois *topologie initiale* car c'est l'espace source d'une famille d'applications (ici les L_φ quand $\varphi \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R})$) qu'il s'agit d'équiper d'une topologie de manière à ce que toutes les applications en jeu deviennent continues (et non plus l'espace but).

2. ≪ *Si E est un $\mathbb{R}$-espace de Banach et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, toute famille $(L_\iota)_\iota$ de $\mathbb{R}$-formes linéaires telle que* $\sup |L_\iota(e)| < \infty$ *pour tout $e \in E$ est telle que l'on ait aussi la majoration uniforme* $\sup_\iota \|L_\iota\|_{E,F} < +\infty$ ≫ ($\| \ \|_{E,F}$ désigne ici la norme d'opérateur). Ce théorème repose sur le fait que les $\mathbb{R}$-espaces de Banach (comme d'ailleurs les $\mathbb{R}$-espaces de Fréchet) partagent la *propriété de Baire*.

C'est là un exercice d'analyse fonctionnelle, pas très difficile, mais un peu technique. On trouvera une preuve détaillée dans [**Ydist**] (proposition 2.1 *via* le lemme 2.2).

Une illustration importante de la convergence de suites de distributions est le procédé de *régularisation*. Si $T \in \mathcal{D}(U,\mathbb{R})$ et si $U' \subset U$ est un ouvert inclus dans U, on définit naturellement la *restriction* de T à U' comme la distribution $T_{|U'} \in \mathcal{D}(U',\mathbb{R})$ suivante :

$$T_{|U'} \ : \varphi \in \mathcal{D}(U',\mathbb{R}) \longmapsto \langle T, \varphi\rangle \tag{1.11}$$

où au second membre de (1.11) la fonction-test φ (qui est une fonction C^∞ à support compact dans $U' \subset U$) est considérée cette fois comme une fonction C^∞ à support compact dans le sur-ouvert U (ce qui est licite) et non plus dans U'. Si de plus on suppose U' relativement compact dans U ($\overline{U'} \subset\subset U$), on a $\eta = \operatorname{dist}(\overline{U'}, \mathbb{R}^n \setminus U) \in]0,+\infty]$. Il est facile de construire une fonction radiale $\rho \ : \mathbb{R}^n \mapsto [0,+\infty[$, C^∞ et à support compact égal à $\overline{B_n(0,1)}$, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$ (il suffit de quotienter par son intégrale sur $\mathbb{R}^n$ la fonction (1.2)). Si $x \in U'$, la fonction C^∞

$$\rho_{1/k,x} : \ y \in \mathbb{R}^n \longmapsto k^n\,\rho(k(y-x))$$

est à support dans U dès que $k \geq 1/\eta$; c'est d'ailleurs une fonction d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}^n$, que l'on peut alors considérer comme une fonction-test dans $\mathcal{D}(U,\mathbb{R})$. Cela a donc un sens de considérer la fonction

$$f_{T,k} \ : x \in U' \longmapsto \langle T, \rho_{1/k,x}\rangle.$$

On montre facilement par récurrence sur p [1] que cette fonction est de classe C^p dans U' pour tout $p \in \mathbb{N}$ et que pour tout opérateur différentiel $P(D_x)$ à coefficients constants de degré p de la forme (1.7) on a

$$P(D_x)[f_{T,k}](x) = \big\langle T, P(D_x)[\rho_{1/k,x}]\big\rangle \quad \forall\, x \in U'.$$

(on différencie « à droite par rapport au paramètre x sous le symbole action de la distribution »). On constate que l'on a

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U',\mathbb{R}), \quad \lim_{k\to+\infty} \big\langle [f_{T,k}], \varphi\big\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \tag{1.12}$$

autrement dit la restriction $T_{|U'}$ à U' s'approche au sens des distributions par la suite des distributions-fonctions (d'ailleurs C^∞) $([f_{T,k}])_{k\geq 0}$. C'est là le principe de la *régularisation des distributions* : une distribution peut être aussi singulière que l'on peut l'imaginer, mais, quoi qu'il en soit, on pourra toujours l'approcher au sens des distributions par une suite de distributions-fonctions aussi régulières que possible (en fait C^∞) ; cela s'avèrera en pratique, on le verra, très important.

1.1.5. La multiplication des distributions par des fonctions C^∞ et le problème de la division

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T une distribution à valeurs réelles dans U, $f \ : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, on définit une nouvelle distribution fT à valeurs réelles sur U en posant :

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U,\mathbb{R}). \tag{1.13}$$

1. Voir pour plus de détails la preuve de la proposition 2.2 dans [**Ydist**].

Nous allons maintenant exploiter des idées de nature purement algébrique pour jeter des premiers ponts entre les outils que sont les distributions et le problème de la division. La digression algébrique que nous proposons ici (et qui nous sera utile ultérieurement) est directement inspirée du texte de F. Ehlers (chapitre V de [**Bor**], & 1).

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, on rappelle que le domaine polynomial $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ est un *anneau commutatif nœthérien*, c'est-à-dire un anneau commutatif dans lequel *toute suite croissante d'idéaux est automatiquement stationnaire* ou bien encore, ce qui est équivalent, un anneau commutatif dans lequel *tout idéal est de type fini*. Si $\mathbb{A}$ est un anneau nœthérien, tout $\mathbb{A}$-module de type fini est encore nœthérien (pour les bases d'algèbre commutative, on renvoie ici au chapitre 1, ici plus précisément section 1.4, de [**Eis**]).

Supposons[1] $\mathbb{K}$ de caractéristique 0 (c'est la seule restriction, mais elle est essentielle ici). On peut aussi introduire un paramètre λ transcendant sur $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ et l'algèbre de Weyl (non commutative)

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n} = \mathbb{K}(\lambda) \left\langle X_1, ..., X_n, \partial/\partial X_1, ..., \partial/\partial X_n \right\rangle \ ;$$

les relations de commutativité gérant les calculs dans cette algèbre sont ici

$$[X_j, X_k] = [\partial/\partial X_j, \partial/\partial X_k] = [X_j, \partial/\partial X_k] = 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq j < k \leq n$$

et

$$[\partial/\partial X_j, X_j] = 1, \quad j = 1, ..., n.$$

On peut considérer, si $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, le $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n}$-module

$$N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} = \mathbb{K}(\lambda)[X_1, ..., X_n, 1/P] \otimes P^\lambda \,.$$

Ici P^λ doit être entendu de manière formelle, et l'action (à gauche) de $\partial/\partial X_j$ sur $(1/P)^m P^\lambda$ doit être comprise suivant les règles du calcul différentiel classique (*chain rule* ou règle de Leibniz) comme

$$\frac{\partial}{\partial X_j} [(1/P)^m \otimes P^\lambda] := (\lambda - m)(1/P)^{m+1} \frac{\partial P}{\partial X_j} \otimes P^\lambda.$$

Le $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n}$-module $N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}$ contient comme sous-module le module

$$M_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} := \mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n} \otimes P^\lambda$$

et donc la suite décroissante (pour l'inclusion) de sous-modules

$$M^0_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} = M_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} \supset M^1_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} \supset \cdots \supset M^j_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} := \mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n} \cdot P^j \otimes P^\lambda \supset \dots$$

En considérant les $\mathbb{K}(\lambda)$-espaces vectoriels

$$\Gamma_j := \Big\{ qP^{-j} \otimes P^\lambda \,;\, q \in \mathbb{K}(\lambda)[X_1, ..., X_n],\, \deg_X q \leq (\deg P + 1) j \Big\},\ j = 0, 1, ...,$$

on définit une filtration

$$\Gamma_{-1} = \{0\} \subset \Gamma_0 \subset \cdots \subset \Gamma_j \subset \cdots \subset N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P},$$

1. Je n'ai pas traité ce qui suit en cours, m'étant contenté d'énoncer le théorème de I. Bernstein (théorème 1.1). Toute cette partie (juqu'à l'énoncé du théorème) suppose quelques bases d'algèbre commutative (par exemple les chapitres 1 de [**Eis**] ou [**Har**]). La démarche est en tout cas ici exclusivement algébrique, comme l'est le résultat d'ailleurs. J'y reviendrai probablement ultérieurement.

du module de type fini $N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}$, ce qui signifie que les Γ_j exhaustent ensemblistement ce module et que $F_j \cdot \Gamma_k \subset \Gamma_{j+k}$ pour tout j,k dans $\mathbb{N}$ si

$$F_j := \big\{q \in \mathbb{K}(\lambda)([X_1, ..., X_n, \partial/\partial X_1, ..., \partial/\partial X_n]\,; \deg q \leq j\big\}, \quad j \in \mathbb{N}$$

(les F_j, $j \in \mathbb{N}$, sont des $\mathbb{K}(\lambda)$-espaces vectoriels de dimension finie qui définissent ce que l'on appelle la *filtration de Bernstein* de l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n}$). On observe qu'asymptotiquement (en fonction de k, lorsque k est grand)

$$\dim \Gamma_k \equiv \text{constante} \times k^n.$$

Ceci signifie que le $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda,n)}$-module $N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}$ est *holonome*, c'est-̀a dire de dimension [1] égale à n. Tous les sous-modules de $N_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}$ sont donc holonomes et la suite des dimensions des sous-modules $M^j_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}$ est une suite d'entiers strictement positifs décroissante, donc stationnaire. La suite des sous-modules $(M^j_{\mathbb{K}(\lambda),n,P})_{j\geq 0}$ ne saurait donc être strictement décroissante et il existe un entier j_0 tel que

$$M^{j_0}_{\mathbb{K}(\lambda),n,P} = M^{j_0+1}_{\mathbb{K}(\lambda),n,P}.$$

On déduit [2] de cela la résultat suivant, dû à I. Bernstein [**Bern**] :

Theorème 1.1 (relation et polynôme de Bernstein). *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique* 0 *et P un polynôme appartenant à $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. Il existe un opérateur différentiel*

$$\mathscr{Q}(\lambda, X, \partial/\partial X) = \mathscr{Q}(\lambda, X_1, ..., X_n, \partial/\partial X_1, ..., \partial/\partial X_n)$$

à coefficients dans $\mathbb{K}[\lambda, X_1, ..., X_n]$, un polynôme $b \in \mathbb{K}[\lambda]$, tels que, formellement, on ait l'identité algébrique

$$\mathscr{Q}(\lambda, X, \partial/\partial X)\,[P \otimes P^\lambda] = b(\lambda) \otimes P^\lambda. \tag{1.14}$$

Le générateur unitaire de l'idéal de $\mathbb{K}[\lambda]$ constitué de tous les polynômes b impliqués au membre de droite d'une relation du type (1.14) *s'appelle polynôme de Bernstein de P, tandis que la relation* (1.14) *dans lequel un tel générateur minimal b est impliqué s'appelle équation de Bernstein.*

Exemple 1.2 (un exemple trivial). Si $n = 1$ et $P(X) = X$, la relation

$$(d/dX)[P^{\lambda+1}] = (\lambda + 1)\, P^\lambda$$

est un cas particulier évident de formule de Bernstein (1.14) ; ici $b(\lambda) = \lambda + 1$. La recherche de polynômes de Bernstein b_P, même pour des polynômes P simples, est très

1. Pour définir la dimension d'un $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n}$-module de type fini N, on prend justement une filtration $(\tilde{\Gamma}_j)_{j\geq -1}$ de ce module qui soit une ≪ bonne filtration ≫, c'est-à-dire telle que, pour k au delà d'un seuil k_0, on ait $F_j \cdot \tilde{\Gamma}_k = \tilde{\Gamma}_k$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas, il existe une fonction polynomiale en k, de la forme

$$k \mapsto \chi(N, \tilde{\Gamma}, k) = \frac{m}{d!} k^d + c_1 k^{d-1} + \cdots$$

(dite *fonction de Hilbert*, voir aussi le chapitre 1 de [**Har**]) telle que $\dim \tilde{\Gamma}_k = \chi(N, \tilde{\Gamma}, k)$ pour $k >> 0$; alors les entiers d et m ne dépendent que de N ; le premier est dit *dimension* de N et il est dans ce cas toujours au moins égal à n (c'est ce que l'on appelle l'*inégalité de Bernstein*) tandis que le second est un entier strictement positif dit *multiplicité* du $\mathbb{A}_{\mathbb{K}(\lambda),n}$-module N. Dans le cas extrême $d = n$ (c'est justement le cas ici) le module N est dit *holonome*.

2. Vous pouvez ici reprendre le fil de ce que j'ai fait en cours.

difficile car on ne connait malheureusement à ce jour [1] aucun procédé algorithmique y conduisant.

Remarque 1.3 (relation de Bernstein multivariée)**.** En fait, on trouvera par exemple dans [**Licht**] (avec essentiellement la même démonstration, tout aussi malheureusement non effective) une version multivariée plus générale : si $P_1, ..., P_m$ sont éléments de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ et $\lambda_1, ..., \lambda_m$ m paramètres transcendants algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$, il existe m opérateurs différentiels $\mathscr{Q}_j(\lambda, X, \partial/\partial X)$, $j = 1, ..., m$, à coefficients dans $\mathbb{K}[\lambda_1, .., \lambda_m, X_1, ..., X_n]$, un polynôme $b \in \mathbb{K}[\lambda_1, ..., \lambda_m]$ tels que, formellement, on ait l'identité algébrique

$$\mathscr{Q}_j(\lambda_1, ..., \lambda_m, X, \partial/\partial X)\,[P_j \otimes P_1^{\lambda_1} \cdots P_m^{\lambda_m}] = b(\lambda_1, ..., \lambda_m) \otimes P_1^{\lambda_1} \cdots P_m^{\lambda_m}. \tag{1.15}$$

Un générateur de l'idéal principal de $\mathbb{K}[\lambda]$ constitué de tous les polynômes b impliqués au membre de droite d'une relation du type (1.14) s'appelle polynôme de Bernstein de $(P_1, ..., P_m)$, tandis que la relation (1.14) dans lequel un tel générateur minimal b est impliqué s'appelle équation de Bernstein relative à $(P_1, ..., P_m)$.

Armés du théorème de Bernstein [**Bern**], on peut énoncer le résultat suivant :

Proposition 1.4 (inverse d'une fonction polynomiale au sens des distributions [2]). *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Il existe deux distributions $T_{P,\mathrm{reel}}$ et $T_{P,\mathrm{imag}}$ à valeurs réelles dans $\mathbb{R}^n$ telles que*

$$P(x_1, ..., x_n)(T_{P,\mathrm{reel}} + iT_{P,\mathrm{imag}}) = [1]. \tag{1.16}$$

De plus, ces deux distributions s'expriment explicitement en termes de la relation de Bernstein (1.14) *($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) correspondant au polynôme à coefficients réels*

$$\mathbf{P}(X_1, ..., X_n) = P(X_1, ..., X_n)\bar{P}(X_1, ..., X_n).$$

Démonstration. La fonction polynomiale $x \mapsto \mathbf{P}(x)$ est une fonction polynomiale positive à coefficients réels [3]. On introduit un paramètre complexe λ que pour l'instant on suppose de partie réelle très grande, en tout cas strictement plus grande que 1. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda-1}(x)\, \bar{P}(x)\, \varphi(x)\, dx$$

est une intégrale convergente au sens de Lebesgue. On va exploiter ici la relation de Bernstein (1.14) pour $\mathbf{P}$, écrite ici avec $\lambda - 1$ à la la place de λ, c'est-à-dire

$$\mathscr{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda - 1, X, \partial/\partial X)[\mathbf{P}^{\lambda-1}] = b(\lambda - 1) \otimes \mathbf{P}^{\lambda-1}.$$

Grâce à cette relation purement formelle (et algébrique) et à la formule d'intégration par parties (qui, elle, est une formule relevant de l'analyse [4]), on observe qu'avec le

1. Sauf cas très particuliers, par exemple celui où P est homogène une fois que l'on pondéré les variables coordonnées (on dit alors que P est *quasi-homogène*).

2. Ce résultat est dû à Laurent Schwartz [**Schw**], mais la preuve originelle était basée sur des arguments d'analyse fonctionnelle ; ici, on propose une explicitation (si tant est que l'on puisse considérer la relation formelle de Bernstein (1.14) comme explicite) de $T_{P,\mathrm{reel}}+iT_{P,\mathrm{imag}}$. C'est surtout sur la méthode utilisée (prolongement analytique des fonctions méromorphes) qu'il est important de mettre l'accent. L'aspect ≪ algébrique ≫ de la preuve est ici à souligner.

3. On note ici le rôle capital de la conjugaison complexe pour récupérer pareille propriété de positivité, on y reviendra.

4. C'est ici qu'il convient de ne pas oublier que φ est à support compact.

choix de λ que l'on a fait, on a

(1.17)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda-1}(x)\,\bar{P}(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{b_{\mathbf{P}}(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda}(x)\,\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda-1, x, -\partial/\partial x)[\bar{P}\varphi](x)\,dx.$$

Quitte à faire un changement de variables linéaire dans $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que $\mathbf{P}$ (qui est de degré total $2\deg P$) est de la forme

$$\mathbf{P}(X) = a_0 X_n^{2\deg P} + \sum_{j=1}^{2\deg P} a_j(X_2, ..., X_{n-1})\, X_n^{2\deg P - j}$$

avec $a_0 > 0$ et $\deg a_j \leq j$ pour $j = 1, ..., 2\deg P$. En utilisant le théorème de Fubini et par exemple l'inégalité de Hölder (pour $2\deg P$ fonctions en prenant pour exposants $p_1 = \cdots = p_{2\deg P} = 2\deg P$), on voit que la fonction $|\mathbf{P}|^{-\epsilon}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ dès que $\epsilon < 1/(2\deg P)$. Il résulte alors du théorème de Morera (voir par exemple le chapitre 2 de [**?**]) que la fonction

$$\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda}(x)\,\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda-1, x, -\partial/\partial x)[\bar{P}\varphi](x)\,dx$$

est holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}\lambda > -1/(2\deg P)\}$ et que son développement de Taylor au voisinage de l'origine est

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} &\mathbf{P}^{\lambda}(x)\,\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda-1, x, -\partial/\partial x)[\bar{P}\varphi](x)\,dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^n} (\log \mathbf{P}(x))^k\,\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda-1, x, -\partial/\partial x)[\bar{P}\varphi](x)\,dx.\end{aligned}$$

La fonction

$$F_\varphi\ :\lambda \mapsto \frac{1}{b_{\mathbf{P}}(\lambda-1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^{\lambda}(x)\,\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}(\lambda-1, x, -\partial/\partial x)[\bar{P}\varphi](x)\,dx$$

est donc méromorphe au voisinage de l'origine. Son coefficient de Laurent $a_0(F_\varphi\,;0)$ dans le développement à l'origine (coefficient du terme en λ^0) s'exprime sous la forme

$$\langle T_{\mathrm{reel}}, \varphi\rangle + i\langle T_{\mathrm{imag}}, \varphi\rangle,$$

où les deux distributions à valeurs réelles dans $\mathbb{R}^n$ que sont T_{reel} et T_{imag} sont tout-à-fait explicites (au niveau de leur action sur une fonction test) une fois que l'on dispose de l'équation de Bernstein (1.14) pour $\mathbf{P}$. Ce sont d'ailleurs des distributions d'ordre au plus égal au degré total en $(\partial/\partial X_1, ..., \partial/\partial X_n)$ de l'opérateur différentiel $\mathcal{Q}_{\mathbf{P}}$ impliqué au membre de gauche de (1.14). On verra aussi plus loin que le fait de disposer d'une représentation relativement explicite de l'action de ces distributions sur les fonctions-test nous permettra de les ranger dans la classe des *distributions tempérées*. La formule (1.16) s'obtient en évaluant les deux membres de (1.17) en $\lambda = 0$ lorsque φ est remplacée par $P\,\varphi$. □

1.2. Distributions sur les variétés

1.2.1. Les variétés $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

On profite de cette section pour rappeler, dans le cadre des univers « plats » que sont $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, les notions fondamentales de la géométrie différentielle : *champs de* *vecteurs* et *formes différentielles*, *fibrés tangent et cotangent*, ainsi que leurs puissances extérieures.

Considérons tout d'abord le cas de $\mathbb{R}^n$. En un point $x \in \mathbb{R}^n$, on définit *l'espace tangent* $T_x(\mathbb{R}^n)$ *à* $\mathbb{R}^n$ *au point* x de trois manières [1].

— La première manière relève d'un point de vue « fonctionnel ». Elle consiste à considérer l'anneau local des germes [2] de fonctions C^∞ à valeurs réelles au point x, noté $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)$ et à identifier $T_x(\mathbb{R}^n)$ comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des $\mathbb{R}$-*dérivations* de cet anneau, c'est-à-dire des applications $\mathbb{R}$-linéaires D de $\mathcal{E}_x(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}$ se pliant à la règle de Leibniz rapportée à x, soit

$$D[fg] = f(x)D[g] + g(x)D[f]. \tag{1.18}$$

Une base de $T_x(\mathbb{R}^n)$ (si l'on adopte ce point de vue) est donnée par les dérivations :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_x \ : f \in \mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, ..., n.$$

Pour alléger les notations, on omettra (sauf si nécessaire) la notation x en indice de $(\partial/\partial x_j)$. C'est ce point de vue que nous adopterons le plus souvent.

— Pour la seconde incarnation (elle aussi « fonctionnelle ») de $T_x(\mathbb{R}^n)$, on introduit l'idéal maximal $\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)$ de l'anneau local $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)$. Le quotient

$$\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)/(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2$$

a naturellement une structure de $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$-espace vectoriel. On peut alors identifier le $\mathbb{R}$-espace des $\mathbb{R}$-dérivations de $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\big(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)/(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2\big)^*$: un élément de ce dual peut être en effet considéré comme une forme $\mathbb{R}$-linéaire L sur $\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)$ nulle sur le $\mathbb{R}$-sous espace $(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2$; en posant $D_L(a+m) = L(m)$ (lorsque $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)$), on associe à L naturellement une dérivation D_L de $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)$; dans l'autre sens, en restreignant une dérivation D à $\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)$, on lui associe un élément du dual de $\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)/(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2$.

— Le troisième point de vue est, lui, ensembliste et plus « géométrique » car « visuel » : on équipe l'ensemble des paires (I, γ) (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $\gamma\ : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ avec de plus $\gamma(0) = x$) de la relation d'équivalence $(I_1, \gamma_1) \sim (I_2, \gamma_2)$ si et seulement si $(d\gamma_1)_0 = (d\gamma_2)_0$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel quotient $C_x(\mathbb{R}^n)$ ainsi obtenu est la troisième incarnation de $T_x(\mathbb{R}^n)$. On retrouve là le point de vue consistant à voir les éléments de $T_x(\mathbb{R}^n)$ comme les « vecteurs tangents à $\mathbb{R}^n$ au point x », ce qui est la vision classique en géométrie différentielle ou en mathématiques appliquées (EDP). Pour relier ce

---

1. C'est là la présentation de Bourbaki, un peu axiomatique certes, mais dont il est important de disposer pour manier ces concepts autant en géométrie différentielle qu'en géométrie algébrique ou théorie des nombres. Avoir un point de vue « fonctionnel » autant qu'« ensembliste » s'avèrera important.

2. On rappelle qu'un élément de cet anneau est une classe d'équivalence de l'ensemble des paires (V, f) (V voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$) par la relation d'équivalence : $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ si et seulement si les restrictions de f_1 et f_2 à $V_1 \cap V_2$ coincident.

point de vue aux deux précédents, on se base sur le fait que la forme bilinéaire

$$(\text{classe de } (I,\gamma), \dot{m}) \in C_x(\mathbb{R}^n) \times \frac{\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)}{(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2} \longmapsto (d(m \circ \gamma))_0$$

est non dégénérée.

Le dual $(T_x(\mathbb{R}^n))^*$ (donc le $\mathbb{R}$-espace vectoriel quotient $\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n)/((\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^2$ si l'on adopte le second point de vue pour incarner $T_x(\mathbb{R}^n)$) est appelé *espace cotangent à* $\mathbb{R}^n$ *au point* x. Une base de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(T_x(\mathbb{R}^n))^*$ est donnée (si l'on adopte cette fois le troisième point de vue, c'est-à-dire le point de vue géométrique, pour incarner $T_x(\mathbb{R}^n)$) par les $\mathbb{R}$-formes linéaires :

$$(dx_j)_x \ : (\text{classe de } (I,\gamma) \longmapsto (d(x_j \circ \gamma))_0(1) = (x_j \circ \gamma)'(0), \qquad j = 1, ..., n.$$

Ici encore, on omettra l'indice x dans la notation $(dx_j)_x$ sauf si nécessaire. La base $(dx_1, ..., dx_n)$ ainsi obtenue est la base duale de la base $(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)$.

La souplesse du cadre C^∞ est un atout majeur, mais le prix à payer est que profiter de cette souplesse nous fait perdre la rigidité (et le concept de finitude) inhérents au cadre algébrique. L'anneau local $\mathscr{E}_x(\mathbb{R}^n)$ n'est en effet pas nœthérien : l'idéal $\bigcap_{k\geq 1}(\mathfrak{M}_x(\mathbb{R}^n))^k$ ne saurait être en effet de type fini. S'il l'était, avec un système de générateurs $f_1, ..., f_M$ de cardinal minimal, on pourrait, avec la formule de Taylor avec reste intégral, écrire

$$f_1 = \sum_{j=1}^n x_j u_j = \sum_{j=1}^n x_j \Big(\sum_{k=1}^M h_{j,k} f_k\Big) = \sum_{k=1}^M \Big(\sum_{j=1}^n h_{j,k} x_j\Big) f_k$$

et l'on en déduirait $f_1 \in (f_2, ..., f_M)$, ce qui contredirait la minimalité de M.

Envisageons maintenant le cas de $\mathbb{C}^n$. La première raison qui fait que les choses diffèrent dans ce cadre (outre bien sûr le fait que $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ ensemblistement, donc que la dimension réelle soit cette fois paire) est que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, au contraire de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif algébriquement clos, le *théorème des zéros de Hilbert* assure par exemple une *correspondance bijective entre les idéaux radiciels (c'est-à-dire tels que* $I = \sqrt{I}$*) de* $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ *et les sous-ensembles algébriques de* $\mathbb{K}^n$ = $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{K}[X_1, ..., X_n])$, c'est-à-dire les sous-ensembles de $\mathbb{K}^n$ définis comme lieux de zéros d'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$. Pareille correspondance bijective n'est plus assurée lorsque $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{R}$) n'est plus algébriquement clos.

Au point $z = (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n) \sim (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$ de $\mathbb{C}^n \sim \mathbb{R}^{2n}$, on peut attacher le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ noté $T_{x,y}(\mathbb{R}^{2n})$ et défini donc comme

$$T_{x,y}(\mathbb{R}^{2n}) = \bigoplus_{j=1}^n \Big(\mathbb{R}\,\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{x,y} \oplus \mathbb{R}\,\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{x,y}\Big).$$

En complexifiant ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on obtient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension cette fois $4n$:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{x,y}(\mathbb{R}^{2n}) = \bigoplus_{j=1}^n \Big(\mathbb{C}\,\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{x,y} \oplus_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{x,y}\Big).$$

À ce stade, il convient d'introduire la notion de *fonction holomorphe en* n *variables* $z_1, ..., z_n$.

DÉFINITION 1.4 (fonction holomorphe en n variables). On appelle fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ toute fonction f de U dans $\mathbb{C}$ qui :

— d'une part est localement intégrable [1] sur U (ce qui équivaut à dire que f définit une distribution à valeurs complexes $[f] = T_{\text{reel}} + iT_{\text{imag}}$ dans U) ;

— d'autre part est telle que, pour chaque indice $j = 1, ..., n$, pour chaque $(n-1)$-uplet $(a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n)$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$, la fonction d'une variable complexe

$$z \mapsto f(a_1, ..., a_{j-1}, z, a_{j+1}, ..., a_n)$$

est holomorphe [2] dans l'ouvert $U_a \subset \mathbb{C}$ (qui peut bien sûr être vide, auquel cas bien sûr il n'y a rien à vérifier) défini par

$$U_a := \{z \in \mathbb{C} \,;\, (a_1, ..., a_{j-1}, z, a_{j+1}, ..., a_n) \in U\}.$$

Exemple 1.3. Les fonctions polynomiales à coefficients complexes en n variables complexes sont holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ (on dit aussi *entières*). Les fonctions rationnelles sont holomorphes dans le complémentaire de leur lieu polaire, c'est-à-dire le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$ défini comme le lieu des zéros du dénominateur.

On peut définir l'*anneau local* $\mathcal{O}_z(\mathbb{C}^n)$ *des germes de fonctions holomorphes en un point* $z = x + iy$ *de* $\mathbb{C}^n$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des dérivations du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}_z(\mathbb{C}^n)$, c'est-à-dire des applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathcal{O}_z(\mathbb{C}^n)$ dans $\mathbb{C}$ se pliant à la règle de Leibniz (1.18) (avec maintenant z à la place de x). On obtient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, dont le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et n'est rien d'autre, ensemblistement, que

$$\bigoplus_{j=1}^{n} (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_{(x,y)},$$

---

1. En fait la fonction aura sous ces hypothèses un représentant continu modulo les fonctions nulles presque partout et c'est ce représentant continu (qui sera même ici C^∞) que nous considèrerons comme la fonction f.

2. Une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une fonction continue de U dans $\mathbb{C}$ telle que $\int_{\partial\tau} f(\zeta)\, d\zeta = 0$ pour tout triangle fermé ≪ plein ≫ inclus dans U ; si l'on considére f comme une application de U dans $\mathbb{R}^2$, ceci équivaut aussi à dire que f est différentiable (au sens réel) en tout point (x, y) et que sa différentielle $(df)_{(x,y)}$ est une similitude directe, ou encore que $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y \equiv 0$ dans U (on note que l'opérateur impliqué ici est un opérateur complexe, ce qui force à envisager les fonctions holomorphes comme étant à valeurs complexes et non plus réelles). Une fonction $f\ : U \to \mathbb{C}$ coincide au sens des distributions avec une fonction holomorphe dans U si et seulement si f est localement intégrable dans U et telle que la distribution $[f]$ satisfait $(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)([f]) = 0$ au sens des distributions dans U. Les fonctions holomorphes dans un ouvert U sont aussi les fonctions analytiques au sens complexe dans cet ouvert, c'est-à-dire les fonctions se développant sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f; z_0)\, (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, \text{distance}(z_0, \partial U))$$

où le rayon de convergence de la série entière $\sum_k a_k(f; z_0) X^k$ est au moins égal à la distance $d(z_0, \partial U) \in]0, +\infty]$).

où
$$\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_{(x,y)} := \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{(x,y)} - i\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{(x,y)}\Big), \quad j = 1, ..., n.$$
On note ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n (qui a aussi une structure sous-jacente de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$)
$$T_z^{(1,0)}(\mathbb{C}^n) := \bigoplus_{j=1}^{n} (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_{(x,y)}.$$
On l'appelle *espace tangent holomorphe en z à $\mathbb{C}^n$*. Il y a une autre interprétation de l'espace tangent holomorphe en z à $\mathbb{C}^n$, plus « visuelle » que ne l'est l'interprétation en termes de dérivations. On peut considèrer l'ensemble des couples $(\mathbb{D}, \Gamma)$ où $\mathbb{D}$ est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ contenant l'origine et $\Gamma\ : w \in \mathbb{D} \to \Gamma(w) \in \mathbb{C}^n$ est une application holomorphe (ce qui veut dire que toutes les coordonnées sont holomorphes) de Δ dans $\mathbb{C}^n$ telle que $\Gamma(0) = z$. On équipe l'ensemble de ces paires de la relation d'équivalence
$$(\mathbb{D}_1, \Gamma_1) \sim (\mathbb{D}_2, \Gamma_2) \Longleftrightarrow \frac{\partial \Gamma_1}{\partial w}(0) = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial w}(0).$$
On obtient un $\mathbb{C}$-espace vectoriel fournissant une seconde incarnation du $\mathbb{C}$-espace vectoriel tangent holomorphe $T_z^{(1,0)}(\mathbb{C}^n)$.

On introduit également le conjugué de ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel, que l'on appelle l'*espace tangent antiholomorphe en z à $\mathbb{C}^n$* et qui est ainsi défini par
$$T_z^{(0,1)}(\mathbb{C}^n) := \overline{T_z^{(1,0)}(\mathbb{C}^n)} = \bigoplus_{j=1}^{n} (\mathbb{R} + i\mathbb{R}) \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)_{(x,y)},$$
où
$$\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)_{(x,y)} := \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_{(x,y)} + i\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_{(x,y)}\Big), \quad j = 1, ..., n.$$
On a ainsi :
$$T_{(x,y)}(\mathbb{R}^{2n}) = T_{x+iy}^{(1,0)}(\mathbb{C}^n) \oplus_{\mathbb{R}} T_{x+iy}^{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$$
mais $T_{x+iy}^{(1,0)}(\mathbb{C}^n)$ et $T_{x+iy}^{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$ ont chacun une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, ces deux structures étant conjuguées.

À tout point x de $\mathbb{R}^n$, nous sommes ainsi en mesure d'associer deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $T_x(\mathbb{R}^n)$ et $T_x^*(\mathbb{R}^n)$ duaux l'un avec l'autre, le $\mathbb{R}$-espace tangent en x à $\mathbb{R}^n$ et le $\mathbb{R}$-espace cotangent en x à $\mathbb{R}^n$. À tout point de $z = x+iy \in \mathbb{C}^n \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, on peut associer de même les deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension $4n$ duaux l'un est l'autre qui sont les $\mathbb{R}$-espaces sous-jacents aux $\mathbb{C}$-espaces $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T_{(x,y)}(\mathbb{R}^{2n})$ et $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} T^*_{(x,y)}(\mathbb{R}^{2n})$. Chacun de ces deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension $4n$ se scinde en la somme directe de deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension $2n$ que l'on peut équiper chacun naturellement d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, le second $\mathbb{C}$-espace étant dans les deux cas le conjugué du premier.

Pour clôre cette sous-section, décrivons deux manières de « retrouver » le cadre $\mathbb{C}_z^n$ lorsque nous nous trouvons dans le cadre $\mathbb{R}_x^n$:

— la manière la plus directe d'opérer est introduire une seconde copie de $\mathbb{R}^n$, où les coordonnées sont cette fois $y = (y_1, ..., y_n)$ (indépendantes des coordonnéees $(x_1, ..., x_n)$) et de retrouver alors $\mathbb{C}^n$ comme

$$\mathbb{C}^n_z = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \ ;$$

notons que la projection $z = x + iy \to x$ (permettant le ≪ retour ≫ au cadre réel) est une application ouverte[1] mais n'est pas une application propre au sens topologique du terme (l'image réciproque d'un compact non vide n'est jamais compacte) ;

— la seconde manière consiste non pas à introduire $\mathbb{C}^n$, mais seulement un ouvert de $\mathbb{C}^n$, à savoir le tore $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{T}^n(\mathbb{C})$, où $\mathbb{T}^n = \mathrm{Spec}\,\big(\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]\big)$; il existe une application surjective de $(\mathbb{C}^*)^n$ dans $\mathbb{R}^n$ (c'est encore une submersion) qui jouera un rôle particulièrement important pour nous ultérieurement, l'application

$$\mathrm{Log}\ : z \in (\mathbb{C}^*)^n \longmapsto (\log |z_1|, ..., \log |z_n|) \ ; \tag{1.19}$$

cette fois, cette application est une application propre car l'image réciproque d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points $(e^{x_1 + i\theta_1}, ..., e^{x_n + i\theta_n})$ avec $(\theta_1, ..., \theta_n)$ dans $(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n$; l'application $-\mathrm{Log}$ est appelée *application de tropicalisation*[2] de la variété algébrique affine $\mathrm{Spec}\,\big(\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]\big)$.

1.2.2. Variétés différentielles, variétés analytiques complexes

On rappelle dans cette sous-section les concepts de *variété différentielle* et de *variété analytique complexe*.

Définition 1.5 (variété différentielle[3] de dimension n). Une *variété différentielle* $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n consiste en la donnée :

— d'un espace topologique séparé $\mathscr{X}$ qu'il est possible d'écrire comme l'union d'une famille dénombrable d'ouverts relativement compacts ;

— d'un atlas $\mathscr{A}$ constitué d'une famille de couples $(\mathscr{U}_\iota, \varphi_\iota)$, où $\mathscr{U}_\iota$ est un ouvert de $\mathscr{X}$ et $\varphi_\iota\ : \mathscr{U}_\iota \longleftrightarrow U_\iota$ est un homéomorphisme entre $\mathscr{U}_\iota$ et un ouvert U_ι de $\mathbb{R}^n$ de manière à ce que les $(\mathscr{U}_\iota)_\iota$ recouvrent $\mathscr{X}$ et que de plus, chaque fois que $\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1} \neq \emptyset$ pour deux indices ι_0 et ι_1, l'application

$$\big(\varphi_{\iota_1} \circ \varphi_{\iota_0}^{-1}\big)_{|\varphi_{\iota_0}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})} \tag{1.20}$$

réalise un C^∞-difféomorphisme entre les deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ que sont les ouverts $\varphi_{\iota_0}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})$ et $\varphi_{\iota_1}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})$.

---

1. C'est une submersion en termes géométriques, ce qui signifie que sa différentielle (au sens réel) au point $(x, y) \simeq z = x + iy$ est surjective.

2. Le calcul *tropical* (ou encore *min-plus*) dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est le ≪ calcul ≫ où les opérations d'addition et de multiplication entre deux éléments sont respectivement remplacées par la prise de minimum et l'addition : $a \boxplus b := \min(a, b)$, $a \boxtimes b := a + b$.

3. On dit indifféremment ≪ différentiable ≫. Attention cependant au mot ≪ *variety* ≫ dans la terminologie anglo-saxonne ; c'est ici le terme ≪ *differential manifold* ≫ qu'il convient d'utiliser ; on traduirait ≪ *variety* ≫ en français par ≪ *variété différentiable pouvant présenter des singularités* ≫. Le ≪ *cusp* ≫ réel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^3 - y^2 = 0\}$ ou complexe $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ z^3 - w^2 = 0\}$ ne porte pas de structure de variété différentiable du fait du point singulier $\{(0, 0)\}$: c'est une ≪ *variety* ≫ au sens anglo-saxon, ce n'est pas une ≪ *variété différentielle* ≫ au sens français.

Si $x \in \mathscr{X}$, le $\mathbb{R}$-espace tangent à $\mathscr{X}$ au point x est défini comme le $\mathbb{R}$-espace des dérivations de l'anneau $\mathscr{E}_x(\mathscr{X})$. L'anneau $\mathscr{E}_x(\mathscr{X})$ est ici l'anneau (en même temps que le le $\mathbb{R}$-espace vectoriel) des germes en x des applications f définies dans un voisinage arbitrairement petit $\mathscr{V}_x$ de x dans $\mathscr{X}$ et C^∞ dans ce voisinage (ce qui signifie que $f \circ \varphi_\iota^{-1}$ est C^∞ dans $\varphi_\iota(\mathscr{V}_x)$ dès que $\mathscr{V}_x \subset \mathscr{U}_\iota$).

Exemple 1.4 (la sphère unité $\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** La sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec son atlas à deux cartes

$$\big(\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}} \setminus (0,...,0,1), \pi^+\big), \quad \big(\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}} \setminus (0,...,0,-1), \pi^-\big),$$

où $\pi^\pm$ désignent les projections stéréographiques depuis respectivement les deux « pôles » que sont les points $(0,...,0,1)$ et $(0,...,0,-1)$, est une variété différentielle de dimension n (c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$). Du point de vue topologique cette variété différentielle $\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}}$ réalise une compactification d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$.

De manière tout à fait similaire, on a, dans le cadre cette fois complexe :

Définition 1.6 (variété analytique complexe de dimension n). Une *variété analytique complexe* $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n consiste en la donnée :

- d'un espace topologique séparé $\mathscr{X}$ qu'il est possible d'écrire comme l'union d'une famille dénombrable d'ouverts relativement compacts ;
- d'un atlas $\mathscr{A}$ constitué d'une famille de couples $(\mathscr{U}_\iota, \varphi_\iota)$, où $\mathscr{U}_\iota$ est un ouvert de $\mathscr{X}$ et $\varphi_\iota : \mathscr{U}_\iota \longleftrightarrow U_\iota$ est un homéomorphisme entre $\mathscr{U}_\iota$ et un ouvert U_ι de $\mathbb{C}^n$ de manière à ce que les $(\mathscr{U}_\iota)_\iota$ recouvrent $\mathscr{X}$ et que de plus, chaque fois que $\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1} \neq \emptyset$, l'application

$$\big(\varphi_{\iota_1} \circ \varphi_{\iota_0}^{-1}\big)_{|\varphi_{\iota_0}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})} \tag{1.21}$$

  réalise une application biholomorphe[1] entre les deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ que sont les ouverts $\varphi_{\iota_0}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})$ et $\varphi_{\iota_1}(\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1})$.

On peut naturellement attacher à une variété analytique complexe de dimension n une *structure de variété différentielle de dimension* $2n$ *sous-jacente* : il suffit pour cela de considérer les ouverts U_ι comme des ouverts de $\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n$ et de ne retenir que le caractère C^∞ des biholomorphismes réalisés par les applications (1.21) ; on notera $\mathscr{X}_{sjac}$ cette variété différentielle sous-jacente.

On peut dans ce nouveau contexte définir le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_z(\mathscr{X}_{\rm sjac})$ (avec son $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent de dimension $4n$) et son scindage

$$\mathbb{C} \otimes T_z(\mathscr{X}_{\rm sjac}) = T_z^{(1,0)}(\mathscr{X}) \oplus_{\mathbb{R}} \overline{T_z^{(1,0)}(\mathscr{X})} = T_z^{(1,0)}(\mathscr{X}) \oplus_{\mathbb{R}} T_z^{(0,1)}(\mathscr{X}),$$

les deux espaces figurant dans le scindage héritant d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ; le premier est le $\mathbb{C}$-espace tangent holomorphe à $\mathscr{X}$ en z, le second le $\mathbb{C}$-espace tangent antiholomorphe à $\mathscr{X}$ en z.

Exemple 1.5 (l'espace projectif complexe)**.** L'espace projectif complexe est défini ensemblistement comme le quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,...,0)\}}{\mathbb{C}^*} \tag{1.22}$$

1. Il suffit ici de dire « holomorphe et de jacobien ne s'annulant pas » si l'on invoque le théorème d'inversion locale ; en effet cette application est automatiquement bijective par construction même.

(où le quotient par le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ signifie que l'on quotiente par la relation d'équivalence traduite par la $\mathbb{C}$-colinéarité de deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^{n+1}$). Le principe de la *perspective* attaché au concept d'espace projectif repose sur les deux observations suivantes :

— l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ est l'union de $\mathbb{C}^{n+1}$ et de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, considéré alors comme l'*hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ (cet hyperplan est une sous-variété analytique complexe de dimension n de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$) ;

— étant donné un point $(z_0, ..., z_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\} \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, l'adhérence dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ de $\{t(z_0, ..., z_n)\,;\, t \in \mathbb{C}^*\}$ intersecte l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en un seul point, qui se trouve être la classe de $(z_0, ..., z_n)$ dans le quotient (1.22), classe que l'on note $[z_0 : \ldots : z_n]$.

On dispose pour cette variété analytique complexe compacte $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'un atlas à $n+1$ cartes, à savoir les

$$\mathcal{U}_j = \{[z_0 : \cdots : z_n]\,;\, z_j \neq 0\} \overset{\varphi_j}{\longleftrightarrow} (z_{j+1}/z_j, ..., z_n/z_j, z_1/z_j, ..., z_{j-1}/z_j) \in U_j = \mathbb{C}^n$$

pour $j = 0, ..., n$. Les morphismes (1.21) de changement de carte ont ici la particularité d'être monomiaux. On notera donc $[z_0 : \ldots : z_n]$ les points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et on appellera $(z_0, ..., z_n)$ les *coordonnées homogènes* du point $[z_0 : \ldots : z_n]$. Notons que le vecteur des coordonnées homogènes $(z_0, ..., z_n)$ d'un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est uniquement déterminé à la multiplication par un élément de $\mathbb{C}^*$ près. La variété différentielle réelle de dimension $2n$ sous-jacente à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le quotient de la sphère unité $\mathbb{S}^{2n+1}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ par la relation d'équivalence

$$\begin{aligned} &\big(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\big) \sim \big(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}, ..., x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\big) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \text{ t.q } \quad x_j^{(2)} + iy_j^{(2)} = e^{i\theta}(x_j^{(2)} + iy_j^{(2)}) \quad \forall\, j = 0, ..., n. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Dans le cas particulier $n = 1$, la variété sous-jacente à la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la sphère unité $\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^3$ (dite *sphère de Riemann*).

Remarque 1.4. On peut conduire la construction de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ à partir de n'importe quel corps commutatif. On obtient la variété algébrique $\mathscr{X} = X(\mathbb{K}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, où

$$X = \mathrm{Spec}(\mathrm{Proj}(\mathbb{K}[X_0, ..., X_n])).$$

Cependant, les choses ne sont pas toujours si agréables du point de vue ensembliste lorsque $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$: le plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s'identifie au quotient du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ de $\mathbb{C}$ dans lequel on identifie deux points du cercle unité chaque fois qu'ils sont diamétralement opposés ; c'est donc le disque unité ouvert et un ruban de Möbius collés « bord-à-bord » et ce n'est donc pas une variété différentiable orientable. On peut aussi voir $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des triômes $aX^2 + bX + c$ où les coefficients sont tels que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, les vecteurs de ces coefficients étant identifiés lorsque colinéaires : le cas $b^2 - 4ac < 0$ s'indentifie au demi-plan $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ (une des deux racines du trinôme et une seule y figure), donc au disque unité ouvert $D(0, 1)$, le cas $b^2 - 4ac \geq 0$ s'identifie à un ruban de Möbius (deux racines réelles que l'on est incapable de trier en ne connaissant que les coefficients). Il y a là une autre différence de taille avec $\mathbb{C}$: la variété différentielle sous-jacente à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est, elle, toujours orientable.

DÉFINITION 1.7 (surface de Riemann). Une variété analytique complexe de dimension 1 est dite *surface de Riemann.*

Exemple 1.6. La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ (où $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ désigne un réseau de $\mathbb{C}$) sont des surfaces de Riemann ; dans le premier cas la variété différentielle réelle sous-jacente est la sphère $\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}}$ tandis que dans le second cas, il s'agit du quotient de $\mathbb{R}^2$ par le sous-groupe $\mathbb{Z}(u_1, v_1) \oplus \mathbb{Z}(u_2, v_2)$ si $\omega_j = u_j + iv_j$ $(j = 1, 2)$, c'est-à-dire d'un tore.

1.2.3. Distributions sur une variété différentielle ou une variété analytique complexe

Dans cette sous-section, on notera $\mathbb{K}$ indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ une variété différentielle de dimension n ou une variété analytique complexe de dimension n (il n'y a pas lieu ici de distinguer les deux cas).

Si $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathscr{X}$, on note $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $\mathbb{R}$ dont le support est un compact de $\mathscr{U}$. Comme l'est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ainsi que l'atteste la proposition 1.1), le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est très riche.

La règle de convergence des suites de $\mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ lorsque U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (donnée à la définition (1.1)) se transpose immdiatement au cadre des suites de $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$, où $\mathscr{U}$ désigne maintenant un ouvert d'une variété différentielle ou analytique complexe de dimension n.

DÉFINITION 1.8 (distributions à valeurs dans $\mathbb{K}$ dans un ouvert $\mathscr{U}$ d'une variété différentielle ou analytique complexe). Soit $\mathscr{U}$ un ouvert d'une variété différentielle ou analytique complexe $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n. On appelle *distribution dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans* $\mathbb{K}$ toute application $\mathbb{R}$-linéaire T de $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{K}$ telle que, pour toute suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ convergeant vers la fonction nulle au sens du principe de convergence des suites (1.1) transposé ici au cadre des variétés, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T, \varphi_k\rangle = 0.$$

Remarque 1.5. De fait une distribution T dans $\mathscr{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire continue du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (considéré ici comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel), la topologie de $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ étant la topologie la plus fine pour laquelle toutes les injections $i_K \ : \mathcal{D}_K(\mathscr{U}, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ sont continues. Ici la topologie sur $\mathcal{D}_K(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est la topologie de la convergence uniforme sur le compact $K \subset\subset \mathscr{U}$ des fonctions et de toutes leurs dérivées, ces calculs de dérivées étant effectués dans les ouverts U_ι de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ une fois les fonctions composées à droite avec les fonctions φ_ι^{-1} provenant de l'atlas $\mathscr{A}$.

On peut aussi voir l'espace des distributions dans un ouvert $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) comme le dual du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{K})$ ($\mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On le note $\mathscr{D}'(\mathscr{U}, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des distributions dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1.7 (distributions tempérées dans $\mathbb{R}^n$)**.** Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ induit une distribution $T_{\mathscr{U}^+}$ sur l'ouvert $\mathscr{U}^+ := \mathbb{S}^n_{\mathbb{R}} \setminus \{(0, ..., 0, 1)\}$ par

$$\langle T_{\mathscr{U}^+}, \varphi\rangle := \big\langle T, \varphi \circ (\pi^+)^{-1}\big\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathscr{U}, \mathbb{C}).$$

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est *tempérée* (ou encore ≪ sphérique ≫) si et seulement si la distribution $T_{\mathscr{U}^+}$ est la restriction à l'ouvert $\mathscr{U}^+$ d'une distribution $T_{\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{D}(\mathbb{S}^n_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$. Les distributions à valeurs complexes qui sont tempérées dans $\mathbb{R}^n$ forment le $\mathbb{R}$-sous-espace [1] $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Il existe un critère quantitatif très utile pour tester si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est tempérée : une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est tempérée si et seulement si il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{\{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \leq p\}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big[(1+\|x\|)^p \Big|\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)\Big|\Big] \tag{1.24}$$

(pour une preuve de cette équivalence, on pourra consulter la preuve de la proposition 4.3 de [**Ydist**]). Si $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, la distribution $T_{P,\mathrm{reel}} + iT_{P,\mathrm{imag}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ construite à la proposition 1.4 est ainsi tempérée car elle satisfait au critère quantitatif (1.24). On verra plus loin que la transformation de Fourier réalise un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des distributions tempérées $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{S}'((\mathbb{R}^n)^*, \mathbb{C})$ des distributions tempérées dans l'espace dual $(\mathbb{R}^n)^*$; cet isomorphisme échange la distribution tempérée opérateur-différentiel $P(D)([\{(0, ..., 0)\}])$ (où $P(D)$ désigne un opérateur différentiel à coefficients constants) avec la distribution tempérée-fonction $[P(-i\omega_1, ..., -i\omega_n)]$ (et par conséquent la distribution-fonction $[P(x_1, ..., x_n)]$ avec la distribution opérateur-différentiel $P(i\partial/\partial\omega_1, ..., i\partial/\partial\omega_n)([\{(0, ..., 0)\}])$).

1.3. Algèbre linéaire ≪ en famille ≫ sur une variété

1.3.1. Fibrés réels ou complexes sur une variété différentielle

Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ une variété différentielle de dimension (réelle) n ou une variété analytique complexe de dimension (complexe) n. Si r est un entier strictement positif $\mathscr{X} \times \mathbb{R}^r$ ou $\mathscr{X} \times \mathbb{C}^r$ héritent d'une structure de variété différentielle respectivement de dimension $n+r$ ou $n+2r$; si $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ est une variété analytique complexe, $\mathcal{X} \times \mathbb{C}^r$ hérite d'une structure de variété analytique complexe de dimension $n + r$.

On peut représenter ensemblistement ces ensembles comme

$$\bigcup_{x\in\mathscr{X}} (\{x\}\times\mathbb{R}^r) = \bigcup_{x\in\mathscr{X}} E_{\mathbb{R},x}, \ \bigcup_{x\in\mathscr{X}} (\{x\}\times\mathbb{C}^r) = \bigcup_{x\in\mathscr{X}} E_{\mathbb{C},x}, \ \bigcup_{z\in\mathscr{X}} (\{z\}\times\mathbb{C}^r) = \bigcup_{z\in\mathscr{X}} E_{\mathbb{C},z}.$$

Se donner une fonction $f\ : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^r$ ou une fonction $f\ : \mathscr{X} \to \mathbb{C}^r$ revient à se donner, au dessus de chaque point $x \in \mathscr{X}$, un point $e = (x, \xi)$ de la ≪ fibre ≫ $\{x\} \times \mathbb{R}^r$ ou $\{x\} \times \mathbb{C}^r$, ou bien $\{z\} \times \mathbb{C}^r$ (suivant le contexte).

Pour pouvoir faire de l'algèbre linéaire ≪ en famille ≫ sur une variété différentielle, nous allons introduire les notions de *fibré réel localement trivial de rang* r et de *fibré complexe localement trivial de rang* r au dessus de $\mathscr{X}$. Cela signifie basiquement que nous allons nous affranchir du fait que la fibre $E_{\mathbb{R},x}$ ou $E_{\mathbb{C},x}$, $E_{\mathbb{C},z}$ se trouvait dans les cas précédents de la forme très particulière $E_{\mathbb{R},x} = \{x\} \times \mathbb{R}^r$ ou $E_{\mathbb{C},x} = \{x\} \times \mathbb{C}^r$, $\{z\} \times \mathbb{C}^r$ (tout en préservant cependant ce modèle localement quitte à ≪ redresser ≫ la situation par un C^∞ difféormorphime pour précisément s'y ramener).

1. Contrairement à ce que l'on pense souvent, le qualificatif $\mathscr{S}$ n'est pas là en référence à Laurent Schwartz qui l'a introduit, mais en relation avec le fait qu'il s'agisse en quelque sorte du $\mathbb{C}$-sous-espace des distributions ≪ sphériques ≫.

Ultérieurement dans le cours, la « base » $\mathscr{X}$ (support d'indexation des fibres) pourra être un espace analytique complexe (variété analytique complexe où l'on tolère la présence de singularités, comme le *cusp* $z^3 - w^2 = 0$ paramétré par $z = t^2$, $w = t^3$), voire même un objet hors du champ de la géométrie complexe, par exemple un espace analytique au sens de Berkovich sur un corps valué $\mathbb{K}$. Les fibres E_x ou E_z pourront être alors des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec des choix de $\mathbb{K}$ autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ avec sa valeur absolue ultramétrique p-adique $|\ |_p$ ou la clôture intégrale de ce corps, le corps des séries de Puiseux en une variable à coefficients complexes ou dans un corps de nombres, etc.). Il faudra dans ce cas remplacer les notions de fonction C^∞ ou de fonction holomorphe avec lesquelles on travaille ici avec celle de fonction régulière (au sens *section du faisceau structurant* de l'espace de base $\mathscr{X}$ au dessus duquel on prétend travailler).

Pour « mesurer » les objets, il sera aussi important par la suite d'équiper chaque fibre E_x ou E_z d'une métrique (riemannienne ou hermitienne suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la métrique sur E_x ou E_z dépendant de manière cohérente (C^∞ ou continue) du point de base. Si $\mathbb{K}$ est un corps équipé d'une valeur absolue non-archimédienne, c'est cette valeur absolue que l'on pourra utiliser pour « mesurer » les éléments ξ de chaque fibre E_x.

Restons pour l'instant dans le cadre des variétés différentielles de dimension (réelle) n de dimension (réelle) n. Suivant que le corps $\mathbb{K}$ sur lequel les fibres E_x sont des espaces vectoriels est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous avons les deux définitions suivantes :

Définition 1.9 (fibré réel localement trivial de rang r au dessus d'une variété différentielle). Du point de vue ensembliste, se donner *un fibré réel localement trivial de rang r au dessus d'une variété différentielle $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n* revient à se donner, pour chaque $x \in \mathscr{X}$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{R},x}$ de dimension r de manière à ce que :

— d'une part, l'ensemble
$$E_{\mathbb{R}} := \bigcup_{x \in \mathscr{X}} (\{x\} \times E_{\mathbb{R},x})$$
porte une structure de variété différentielle de dimension $n + r$, la projection $\pi\ : (x, \xi) \mapsto x$ étant naturellement continue ;

— d'autre part, pour tout $x \in \mathscr{X}$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}_x$ de x ainsi qu'un *difféomorphisme C^∞ de trivialisation*[1] $\theta_x\ : \pi^{-1}(\mathscr{U}_x) \subset E_{\mathbb{R}} \longleftrightarrow \mathscr{U}_x \times \mathbb{R}^r$ de manière à ce que
$$\forall e \in \pi^{-1}(\mathscr{U}_x), \quad \pi_{|\pi^{-1}(\mathscr{U}_x)}(e) = \mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(\theta_x(e))$$
où
$$\mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(y, v) = y \quad \forall y \in \mathscr{U}_x,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^r$$
et, pour chaque $y \in \mathscr{U}_x$, $(\theta_x)_{|\{y\} \times E_{\mathbb{R},y}}$ réalise un $\mathbb{R}$-isomorphisme entre la fibre $\{y\} \times E_{\mathbb{R},y}$ et $\{y\} \times \mathbb{R}^r$.

1. Il faudrait placer ici le dessin que j'ai fait en cours et n'ai pu reproduire encore ici.

On dit alors que $E_{\mathbb{R}} \overset{\pi}{\to} \mathscr{X}$ [1] *est un fibré réel localement trivial de rang* r *au dessus de la variété différentielle* $\mathscr{X}$.

DÉFINITION 1.10 (fibré complexe localement trivial de rang r au dessus d'une variété différentielle). Du point de vue ensembliste, *se donner un fibré complexe localement trivial de rang* r *au dessus d'une variété différentielle* $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ *de dimension* n revient à se donner, pour chaque $x \in \mathscr{X}$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{C},x}$ de dimension r de manière à ce que :

— d'une part, l'ensemble

$$E_{\mathbb{C}} := \bigcup_{x \in \mathscr{X}} (\{x\} \times E_{\mathbb{C},x})$$

porte une structure de variété différentielle de dimension $n + 2r$, la projection $\pi\ : (x, \xi) \mapsto x$ étant naturellement continue ;

— d'autre part, pour tout $x \in \mathscr{X}$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}_x$ de x ainsi qu'un *difféomorphisme* C^∞ *de trivialisation* $\theta_x\ : \pi^{-1}(\mathscr{U}_x) \subset E_{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \mathscr{U}_x \times \mathbb{C}^r$ de manière à ce que

$$\forall e \in \pi^{-1}(\mathscr{U}_x), \quad \pi_{|\pi^{-1}(\mathscr{U}_x)}(e) = \mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(\theta_x(e))$$

où

$$\mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(y, v) = y \quad \forall y \in \mathscr{U}_x,\ \forall\, v \in \mathbb{C}^r$$

et, pour chaque $y \in \mathscr{U}_x$, $(\theta_x)_{|\{y\} \times E_{\mathbb{C},y}}$ réalise un $\mathbb{C}$-isomorphisme entre la fibre $\{y\} \times E_{\mathbb{C},y}$ et $\{y\} \times \mathbb{C}^r$.

On dit alors que $E_{\mathbb{C}} \overset{\pi}{\to} \mathscr{X}$ *est un fibré complexe localement trivial de rang* r *au dessus de la variété différentielle* $\mathscr{X}$.

Étant donné un fibré $E_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ (réel ou complexe, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de rang r au dessus de $\mathscr{X}$, on appelle *section* C^∞ *de* $E_{\mathbb{K}}$ *dans un ouvert* $\mathscr{U}$ *de* $\mathscr{X}$ toute application s de classe C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $E_{\mathbb{K}}$ ($E_{\mathbb{K}}$ étant équipé ici de sa structure différentielle) telle que, pour tout $x \in \mathscr{U}$, $s(x) \in E_{\mathbb{K},x}$. On note $C^\infty(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des sections C^∞ de $E_{\mathbb{K}}$ dans l'ouvert $\mathscr{U}$ et $\mathcal{D}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ le $\mathbb{K}$-sous-espace de $C^\infty(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ dont les éléments sont les sections de $E_{\mathbb{K}}$ qui sont C^∞ et à support compact dans l'ouvert $\mathscr{U}$. On peut introduire plus généralement le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^k(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ des sections de $\mathscr{U}$ dans $E_{\mathbb{K}}$ qui sont de classe C^k ($k = 0, 1, ...$).

Si θ_x désigne le morphisme de trivialisation de $E_{\mathbb{K}}$ au dessus d'un voisinage $\mathscr{U}_x$ d'un point x (voir les définitions 1.9 ou 1.10), les applications

$$x \in \mathscr{U}_x \mapsto \theta_x^{-1}(x, e_j)$$

(où $\{e_1, ..., e_r\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^r$) forment ce que l'on appelle un *repère* [2] pour le fibré $E_{\mathbb{K}}$ au dessus de $\mathscr{U}_x$. Dans ce repère, toute section s de classe C^∞ du fibré $E_{\mathbb{K}}$ dans un ouvert $\mathscr{U}$ contenant $\mathscr{U}_x$ s'exprime dans $\mathscr{U}_x$ sous la forme

$$s(x) = \sum_{j=1}^{r} s_{\mathscr{U}_x, j}(x)\, e_j(x) = \sum_{j=1}^{r} s_j(x)\, e_j(x),$$

1. Il est souvent important de spécifier la projection π en même temps que la donnée du fibré $E_{\mathbb{R}}$.

2. Le terme anglo-saxon est *frame*.

où les fonctions $x \mapsto s_{\mathscr{U}_x,j}(x)$ $(j = 1,...,r)$ sont des fonctions C^∞ de $\mathscr{U}_x$ (considéré comme ouvert de la variété différentielle $\mathscr{X}$) à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$.

1.3.2. Fibrés holomorphes de rang fini au dessus d'une variété analytique complexe

Si $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ est une variété analytique complexe de dimension n, on peut introduire, dans la classe des $\mathbb{C}$-fibrés de rang r au dessus de la variété différentielle sous-jacente $(\mathscr{X}_{\mathrm{sjac}}, \mathcal{A})$ (de dimension $2n$) une sous-classe d'« êtres rigides » qui nous sera bien utile, celle des *fibrés holomorphes de rang* r.

Définition 1.11 (fibré holomorphe de rang r au dessus d'une variété analytique complexe). Du point de vue ensembliste, *se donner un fibré holomorphe de rang r au dessus d'une variété analytique complexe $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n* revient à se donner, pour chaque $z \in \mathscr{X}$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{C},z}$ de dimension r de manière à ce que :

— d'une part, l'ensemble

$$E_{\mathbb{C}} := \bigcup_{z\in\mathscr{X}} (\{z\} \times E_{\mathbb{C},z})$$

porte une structure de variété analytique complexe de dimension $n + r$, la projection $\pi\ : (z, \xi) \mapsto z$ étant une application holomorphe [1] ;

— d'autre part, pour tout $z \in \mathscr{X}$, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}_z$ de z ainsi qu'un *morphisme biholomorphe* [2] *de trivialisation* $\theta_z\ : \pi^{-1}(\mathscr{U}_z) \subset E_{\mathbb{C}} \longleftrightarrow \mathscr{U}_z \times \mathbb{C}^z$ de manière à ce que

$$\forall e \in \pi^{-1}(\mathscr{U}_z), \quad \pi_{|\pi^{-1}(\mathscr{U}_z)}(e) = \mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(\theta_z(e))$$

où

$$\mathrm{proj}_{\mathscr{X}}(w, v) = w \quad \forall w \in \mathscr{U}_z,\ \forall\, v \in \mathbb{C}^r$$

et, pour chaque $w \in \mathscr{U}_z$, $(\theta_z)_{|\{w\}\times E_{\mathbb{C},w}}$ réalise un $\mathbb{C}$-isomorphisme entre la fibre $\{w\} \times E_{\mathbb{C},w}$ et $\{w\} \times \mathbb{C}^r$.

On dit alors que $E_{\mathbb{C}} \stackrel{\pi}{\to} \mathscr{X}$ est un fibré holomorphe de rang r au dessus de la variété différentielle $\mathscr{X}$.

Si $E_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ est un fibré holomorphe, il existe, pour chaque $z \in \mathscr{X}$ un voisinage $\mathscr{U}_z$ de z dans lequel on dispose d'un repère $\{w \mapsto e_1(w), ..., w \mapsto e_r(w)\}$ constitué de *sections holomorphes* du fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}}$ dans l'ouvert $\mathscr{U}_z$.

---

1. Ceci signifie qu'en composant π avec l'inverse d'une carte locale Φ_ι pour $E_{\mathbb{C}}$ à droite, puis avec une carte locale $\varphi_{\iota'}$ (pour $\mathscr{X}$ cette fois) à gauche, on obtient une collection d'applications holomorphes.

2. Même remarque que précédemment : ceci signifie holomorphe après composition à gauche et à droite avec les cartes locales ou leurs inverses. Il faut aussi noter que si on se limite au contexte de la géométrie algébrique, les seules applications biholomorphes qui entrent en jeu ici sont les applications rationnelles considérées hors de leur lieu polaire, d'inverse une fraction rationnelle considérée hors de son lieu polaire.

1.3.3. Construction de fibrés réels ou complexes localement triviaux de rang r à partir de cocycles

Se donner un fibré localement trivial (réel ou complexe) de rang r au dessus d'une variété différentielle $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n revient à se donner un recouvrement $\mathscr{X} = \bigcup_\iota \widetilde{\mathscr{U}_\iota}$ de $\mathscr{X}$ et, pour chaque paire d'indices (ι_0, ι_1), une application de classe C^∞

$$c_{\iota_0,\iota_1} : \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$$

de manière à ce que soit vérifiée la *condition de cocycle* [1] :

$$\forall\, \iota_0, \iota_1, \iota_2, \quad [c_{\iota_0,\iota_1} \circ c_{\iota_1,\iota_2}](x) = c_{\iota_0,\iota_2}(x) \quad \forall\, x \in \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_2}}. \tag{1.25}$$

Une fois en effet que l'on dispose de ce *cocycle à valeurs dans* $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$, on construit le fibré $E_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ au dessus de $\mathscr{X}$ qui lui correspond en considérant dans un premier temps l'union disjointe

$$\bigsqcup_\iota (\widetilde{\mathscr{U}_\iota} \times \mathbb{K}^r)$$

puis en quotientant ensuite cette union disjointe par la relation d'équivalence qui consiste à identifier les couples (x, v) et $(x, c_{\iota_0,\iota_1}(x).v)$ pour toute paire d'indices (ι_0, ι_1) et tout point x de $\widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}}$.

Lorsque le fibré $E_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ est un fibré holomorphe au dessus d'une variété analytique complexe de dimension n, la donnée de $E_{\mathbb{C}}$ est équivalente à celle d'un cocycle

$$(\mathscr{U}_\iota)_\iota, \quad (c_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$$

où les applications c_{ι_0,ι_1} ne sont plus seulement C^∞ mais cette fois, pour chaque paire d'indices (ι_0, ι_1), holomorphes [2] de $\mathscr{U}_{\iota_0} \cap \mathscr{U}_{\iota_1}$ dans l'ouvert de $\mathbb{C}^{r^2}$ correspondant au groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{C}, r)$ des matrices inversibles de taille $[r, r]$.

Exemple 1.8 (le fibré *tautologique* sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)**.** Nous présenterons dans la section suivante les exemples classiques des fibrés tangent et cotangent au dessus d'une variété différentielle, puis des fibrés tangents holomorphe et anti-holomorphe, cotangent holomorphe et anti-holomorphe au dessus d'une variété analytique complexe. Donnons pour l'instant ici l'exemple d'un fibré holomorphe de rang 1 (on dit aussi un ≪ fibré en droites ≫) au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, celui du *fibré tautologique*. On rappelle que la variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété analytique complexe de dimension n définie comme le quotient géométrique de l'ouvert affine $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ...0)\}$ par le groupe $\mathbb{C}^*$, la relation d'équivalence traduisant la co-linéarité des vecteurs (voir l'exemple 1.5). Au point $z = [z_0 : \ldots : z_n]$ de coordonnées homogènes $(z_0, ..., z_n)$, on attache la $\mathbb{C}$-droite vectorielle $E_z = \mathbb{C} \cdot (z_0, ..., z_n) = \{(\lambda z_0, ..., \lambda z_n)\,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}$. On équipe $\bigcup_{z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \{z\} \times E_z$ d'une structure de fibré. Ce fibré s'obtient en se basant sur la construction abstraite précédente à partir du recouvrement par les ouverts $\mathscr{U}_j = \{[z_0 : \ldots : z_n]\,;\, z_j \neq 0\}$.

---

1. On observera (en prenant $\iota_0 = \iota_1 = \iota_2$) que $c_{\iota,\iota} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^r}$ pour tout ι, puis en prenant $\iota_0 = \iota_2$ et ι_1 libre que $c_{\iota_0,\iota_1} = c^{-1}_{\iota_1,\iota_0}$.

2. Si l'on pense au cadre de la géométrie algébrique, il faut remplacer ≪ holomorphe ≫ par ≪ rationnelle considérée hors du lieu polaire ≫. Ceci vaut dans toutes les constructions ci-dessous, lorsque les objets maniés seront des objets relevant d'un point de vue ≪ rigide ≫, par exemple comme ici les fibrés holomorphes sur une variété analytique complexe.

Soit j_0, j_1 une paire d'indices. Soit s_j la coordonnée locale sur E_z lorsque $z \in U_j$. On a, si $z \in U_{j_0}$:

$$E_z = \{\big(t_{j_0} z_0/z_{j_0}, ..., t_{j_0}, ..., t_{j_0}\, z_n/z_{j_0}\big)\,;\, t_{j_0} \in \mathbb{C}\}.$$

Si $z \in U_{j_1}$ avec $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$, on a

$$E_z = \{\big(t_{j_1}/z_{j_1}, ..., t_{j_1} z_{j_0}/z_{j_1}, ..., t_{j_1}, ..., t_{j_1} z_n/z_{j_1}\big)\,;\, t_{j_1} \in \mathbb{C}\}.$$

Les coordonnées locales t_{j_0} et t_{j_1} sont donc reliées par

$$t_{j_0} = t_{j_1}\,\frac{z_{j_0}}{z_{j_1}}.$$

On a donc

$$t_{j_1} = t_{j_0}\,\frac{z_{j_1}}{z_{j_0}}.$$

Le cocycle est donc donné par

$$g_{j_0,j_1}([z]) = z_{j_1}/z_{j_0} \quad : U_{j_0,j_1} \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

pour tout couple $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$. Ce fibré est aussi noté $\mathcal{O}(-1)$ car c'est le dual du fibré dont les sections holomorphes sont les polynômes homogènes de degré 1.

1.3.4. Opérations algébriques sur les fibrés réels ou complexes localement triviaux

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $E_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ est un fibré réel ou complexe localement trivial de rang r au dessus de $\mathscr{X}$ on peut associer à $E_{\mathbb{K}}$ d'après la sous-section 1.3.3 un *cocycle* à valeurs dans $\mathrm{GL}(r,\mathbb{K})$ subordonné à un recouvrement $(\widetilde{\mathscr{U}_\iota})_\iota$ suffisamment fin de $\mathscr{X}$. On note ce cocycle $(c^{E_{\mathbb{K}}}_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1} = c^{E_{\mathbb{K}}}$ en sous-entendant ici le recouvrement de $\mathscr{X}$ à partir duquel ce cocycle est construit.

Soient maintenant deux fibrés $E_{\mathbb{K},1} \xrightarrow{\pi_1} \mathscr{X}$ et $E_{\mathbb{K},2} \xrightarrow{\pi_2} \mathscr{X}$ localement triviaux de rangs respectifs r_1 et r_2 au dessus de $\mathscr{X}$. On peut construire à partir des deux recouvrements $(\widetilde{\mathscr{U}_\iota}^{E_{\mathbb{K},j}})_\iota$ $(j = 1,2)$ adaptés aux cocycles $c^{E_{\mathbb{K},1}}$ et $c^{E_{\mathbb{K},2}}$ un recouvrement plus fin de manière à ce que les deux cocycles $c^{E_{\mathbb{K},j}}$ $(j = 1,2)$ soient tous deux adaptés à ce nouveau recouvrement.

La construction abstraite d'un fibré localement trivial de rang r à partir d'un recouvrement de $\mathscr{X}$ et d'un cocycle adapté à valeurs dans $\mathrm{GL}(r,\mathbb{K})$ va nous permettre de conduire un certain nombre de constructions algébriques relevant de l'algèbre linéaire.

1. *La somme $E_{\mathbb{K},1} \oplus_{\mathbb{K}} E_{\mathbb{K},2}$ de deux $\mathbb{K}$-fibrés localement triviaux.*

On suppose que $E_{\mathbb{K},1}$ et $E_{\mathbb{K},2}$ sont deux $\mathbb{K}$-fibrés localement triviaux de rang respectifs r_1 et r_2. On combine les deux cocycles $c^{E_{\mathbb{K},1}}$ et $c^{E_{\mathbb{K},2}}$ attachés au même recouvrement $(\widetilde{\mathscr{U}_\iota})_\iota$ en le cocycle $(C_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$, où, pour toute paire d'indices (ι_0,ι_1) :

$$C_{\iota_0,\iota_1} \quad : x \in \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \longmapsto \begin{bmatrix} c^{E_{\mathbb{K},1}}_{\iota_0,\iota_1}(x) & 0 \\ 0 & c^{E_{\mathbb{K},2}}_{\iota_0,\iota_1}(x) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}, r_1 + r_2).$$

À partir de ce cocycle (à valeurs cette fois dans $\mathrm{GL}(r_1 + r_2, \mathbb{K})$), on construit comme dans la sous-section 1.3.3 le fibré $\mathbb{K}$-fibré $E_{\mathbb{K},1} \oplus_{\mathbb{K}} E_{\mathbb{K},2}$ (localement trivial et de rang $r_1 + r_2$).

2. *Le produit tensoriel $E_{\mathbb{K},1} \otimes_{\mathbb{K}} E_{\mathbb{K},2}$ de deux $\mathbb{K}$-fibrés localement triviaux.*

On suppose encore que $E_{\mathbb{K},1}$ et $E_{\mathbb{K},2}$ sont deux $\mathbb{K}$-fibrés localement triviaux de rang respectifs r_1 et r_2. On combine les deux cocycles $c^{E_{\mathbb{K},1}}$ et $c^{E_{\mathbb{K},2}}$ attachés au même recouvrement $(\widetilde{\mathscr{U}_\iota})_\iota$ en le cocycle $(C_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$, où, pour toute paire d'indices (ι_0, ι_1) :

$$\begin{aligned}&C_{\iota_0,\iota_1} \ : x \in \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \longmapsto \\ &\Big[e_j \otimes e_k \longmapsto (c^{E_{\mathbb{K},1}}_{\iota_0,\iota_1}(x) \cdot e_j) \otimes (c^{E_{\mathbb{K},2}}_{\iota_0,\iota_1}(x) \cdot e_k)\Big]_{\substack{1\leq j\leq r_1\\ 1\leq k\leq r_2}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_1^{r_1} \otimes \mathbb{K}_2^{r_2}, \mathbb{K}_1^{r_1} \otimes \mathbb{K}_2^{r_2}).\end{aligned}$$

Il s'agit ici d'un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}(r_1r_2, \mathbb{K})$ auquel on associe grâce à la construction abstraite de la sous-section 1.3.3 un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial de rang r_1r_2 dit *produit tensoriel* $E_{\mathbb{K},1} \otimes_{\mathbb{K}} E_{\mathbb{K},2}$.

3. *Puissances extérieures* $\bigwedge^\rho E_{\mathbb{K}}$ *$(1 \leq \rho \leq r)$ d'un fibré localement trivial de rang r.*

Soit $E_{\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial de rang r au dessus de $\mathscr{X}$ et $1 \leq \rho \leq r$. On associe au cocycle $c^{E_{\mathbb{K}}}$ attaché à $E_{\mathbb{K}}$ le cocycle $(C_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$:

$$\begin{aligned}&C_{\iota_0,\iota_1} \ : x \in \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \longmapsto \\ &\Big[\sum_{\{J\subset\{1,\dots,r\}\,;\,\#J=\rho\}} \lambda_J \bigwedge_{\ell=1}^{\rho} e_{j_\ell} \longmapsto \sum_J \lambda_J \bigwedge_{\ell=1}^{\rho} c^{E_{\mathbb{K}}}_{\iota_0,\iota_1}(x) \cdot e_{j_\ell}\Big] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\Big(\bigwedge^{\rho} \mathbb{K}^r, \bigwedge^{\rho} \mathbb{K}^r\Big).\end{aligned}$$

Le $\mathbb{K}$-fibré localement trivial associé à ce cocycle suivant la construction de la sous-section 1.3.3 est un fibré localement trivial de rang $\binom{r}{\rho}$ noté $\bigwedge^\rho E_{\mathbb{K}}$ et appelé *puissance extérieure de* $E_{\mathbb{K}}$ *à l'ordre* ρ. Lorsque $\rho = r$, c'est un fibré de rang 1 appelé *fibré déterminant de* $E_{\mathbb{K}}$ et noté $\det E_{\mathbb{K}}$.

4. *Dual d'un fibré localement trivial de rang r.*

Soit $E_{\mathbb{K}} \xrightarrow{\pi} \mathscr{X}$ un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial de rang r et $c^{E_{\mathbb{K}}}$ un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ adapté à $E_{\mathbb{K}}$ et au recouvrement $(\widetilde{\mathscr{U}_\iota})_\iota$. On appelle *fibré dual* de $E_{\mathbb{K}}$ le $\mathbb{K}$-fibré de même rang r que $E_{\mathbb{K}}$ construit comme à la section 1.3.3 à partir du cocycle $(c^{E_{\mathbb{K}}})^*$ où

$$c_{\iota_0,\iota_1} \ : \ x \in \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_0}} \cap \widetilde{\mathscr{U}_{\iota_1}} \longmapsto {}^t[c_{\iota_0,\iota_1}(x)]^{-1} \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K}).$$

5. *Fibré* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K},1}, E_{\mathbb{K},2})$.

Il existe un isomorphisme entre $\mathbb{K}^{r_2} \otimes (\mathbb{K}^{r_1})^*$ et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{r_1}, \mathbb{K}^{r_2})$ car tout $\mathbb{K}$-homomorphisme de $\mathbb{K}^{r_1}$ dans $\mathbb{K}^{r_2}$ est représenté par sa matrice à r_1-colonnes et r_2 lignes dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^{r_1}$ et $\mathbb{K}^{r_2}$ respectivement à la source et au but. Si $E_{\mathbb{K},1}$ et $E_{\mathbb{K},2}$ sont deux $\mathbb{K}$-fibrés localement triviaux de rangs respectifs r_1 et r_2, on note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K},1}, E_{\mathbb{K},2})$ le $\mathbb{K}$-fibré localement trivial $E_{\mathbb{K},2} \otimes_{\mathbb{K}} E^*_{\mathbb{K},1}$; c'est un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial de rang r_1r_2.

Toutes les opérations ci-dessus peuvent être considérées entre fibrés holomorphes au-dessus d'une variété analytique complexe. Si E_1 et E_2 sont deux tels fibrés holomorphes, les cocycles associés le sont, ainsi que les cocycles permettant de construire $E_1 \oplus_{\mathbb{C}} E_2$, $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$, $\bigwedge^\rho E_1$, E_1^*, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$. Tous les fibrés construits ainsi seront donc aux aussi holomorphes dès que E_1 et E_2 le sont.

1.3.5. Fibré tangent et cotangent, formes différentielles

Les deux exemples majeurs de fibrés réels localement triviaux et de rang n sur une variété différentielle $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n sont le fibré tangent $T(\mathscr{X})$ et le fibré cotangent $T^*(\mathscr{X})$.

Le morphisme de trivialisation impliqué dans la structure de fibré tangent sur l'ensemble $\bigcup_{x\in\mathscr{X}} \{x\}\times T_x(\mathscr{X})$ [1] s'obtient en trivialisant $\bigcup_{x\in\mathscr{U}_\iota} (\{x\}\times T_x(\mathscr{X}))$ ainsi : étant donné $y \in \mathscr{U}_\iota$ et la classe de tangence $\dot\gamma$ de (I,γ) dans $T_y(\mathscr{X})$, on associe à $(y,\dot\gamma)$ le couple formé de $\varphi_\iota(y)$ et de la classe de tangence de $(I, \varphi_\iota\circ\gamma)$ en $\varphi_\iota(y)$. On notera

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial x_{\iota,1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_{\iota,n}}\Big\} = \Big\{\frac{\partial}{\partial \varphi_{\iota,1}}, ..., \frac{\partial}{\partial \varphi_{\iota,n}}\Big\}$$

le repère associé à cette trivialisation dans l'ouvert U_ι, étant entendu qu'il faut comprendre ici $x_1, ..., x_n$ comme les fonctions coordonnées de $x \mapsto \varphi_\iota(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire les coordonnées locales). Le repère dual est noté

$$\{dx_{\iota,1}, ..., dx_{\iota,n}\} = \{d\varphi_{\iota,1}, ..., d\varphi_{\iota,n}\} = \Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial x_{\iota,1}}\Big)^*, ..., \Big(\frac{\partial}{\partial x_{\iota,n}}\Big)^*\Big\}$$

et constitue donc un repère pour le fibré cotangent $T(\mathscr{X})$ dans l'ouvert de carte U_ι. On omettra par la suite l'indice de carte ι dans l'expression des coordonnées locales $x_{\iota,j}$, $j = 1, ..., n$ [2].

Définition 1.12 (k-formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ une variété différentielle de dimension n et $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{X}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Une *k-forme différentielle réelle dans l'ouvert $\mathscr{U}$* est par définition une section C^∞ dans $\mathscr{U}$ du fibré $\bigwedge^k T^*(\mathscr{X})$ (on convient que $\bigwedge^0 T^*(\mathscr{X}) = \mathscr{X}\times\mathbb{R}$), tandis qu'une *$k$-forme différentielle complexe dans l'ouvert $\mathscr{U}$* est une section C^∞ dans $\mathscr{U}$ du fibré $\big(\bigwedge^k T^*(\mathscr{X})\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, que l'on peut considérer comme un fibré complexe localement trivial de rang $\binom{n}{k}$ au dessus de $\mathscr{X}$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des k-formes réelles dans $\mathscr{U}$ est noté $C^{k,\infty}(\mathscr{U},\mathbb{R})$, tandis que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des k-formes complexes dans $\mathscr{U}$ est noté $C^{k,\infty}(\mathscr{U},\mathbb{C})$. On note $\mathcal{D}^k(\mathscr{U},\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel des k-formes réelles (ou complexes suivant que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) à support compact dans $\mathscr{U}$. Plus généralement, si $E_{\mathbb{K}}$ est un $\mathbb{K}$-fibré au dessus de $\mathscr{X}$, une k-forme différentielle dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ est une section dans $\mathscr{U}$ du fibré $\big(\bigwedge^k T^*(\mathscr{X})\big)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{K})\otimes_{\mathbb{K}} E_{\mathbb{K}}$. Les k-formes différentielles dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ et à support compact forment le $\mathbb{K}$-sous-espace $\mathcal{D}^k(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^{k,\infty}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ des k-formes différentielles dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$.

Si $\{x_1, ..., x_n\}$ désigne un système de coordonnées locales pour $\mathscr{X}$ dans un ouvert de carte $\mathscr{U}_x$ au voisinage d'un point $x\in\mathscr{X}$, on peut exprimer une k-forme différentielle à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) dans l'ouvert $\mathscr{U}_x$ sous la forme

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \omega_I\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

1. Il faut aussi construire l'atlas donnant la structure de variété différentielle de dimension $2n$ sur cet ensemble, ce que nous ne ferons pas ici.

2. Ici s'arrête le cours semaine 5. La suite des notes n'a pas encore été corrigée ou complétée. Ce sera le prochain cours.

où les ω_I sont des fonctions C^∞ dans $\mathscr{U}_x$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit une application $\mathbb{K}$-linéaire de $C^{\infty,k}(\mathscr{U},\mathbb{K})$ dans $C^{\infty,k+1}(\mathscr{U},\mathbb{K})$ en posant dans l'ouvert de carte $\mathscr{U}_x$:

$$d\Big[\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \omega_I\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\Big] := \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}[\omega_I]\; dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Cette construction se globalise dans $\mathscr{U}$ si l'on invoque le lemme de partition de l'unité (proposition 1.1). On définit ainsi une suite de $\mathbb{K}$-applications linéaires

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow C^\infty(\mathscr{U},\mathbb{K}) := C^{\infty,0}(\mathscr{U},\mathbb{K}) \xrightarrow{d} C^{\infty,1}(\mathscr{U},\mathbb{K}) \xrightarrow{d} \dots \\ &\dots \xrightarrow{d} C^{\infty,n-1}(\mathscr{U},\mathbb{K}) \xrightarrow{d} C^{\infty,n}(\mathscr{U},\mathbb{K}) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

où l'image d'une application est chaque fois incluse dans le noyau de la suivante puisque l'on a à tous les crans $d\circ d = 0$. Ce complexe (1.26) est dit *complexe de de Rham* (ici de l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$). Les groupes abéliens

$$H^k(\mathscr{U},\mathbb{K}) := \frac{\{\omega\in C^{k,\infty}(\mathscr{U},\mathbb{K})\,;\, d\omega=0\}}{d\big(C^{\infty,k-1}(\mathscr{U},\mathbb{K})\big)} = \frac{\mathscr{Z}^k(\mathscr{U},\mathbb{K})}{\mathscr{B}^k(\mathscr{U},\mathbb{K})},\quad k=0,...,n,$$

(on oublie la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour ne retenir que la structure de groupe abélien et on utilise la lettre calligraphique $\mathscr{Z}$ pour ≪ cycle ≫, la lettre calligraphique $\mathscr{B}$ pour ≪ bord ≫) sont les *groupes de cohomologie* de l'ouvert $\mathscr{U}$ (ici à valeurs dans $\mathbb{K}$) ; ils ≪ quantifient ≫ le défaut d'exactitude du complexe de de Rham (1.26). On a toujours $H^0(\mathscr{U},\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n_\mathscr{U}}$, où $n_\mathscr{U}$ est le nombre de composantes connexes de l'ouvert $\mathscr{U}$.

Remarque 1.6 (le cas des variétés différentielles compactes)**.** Lorsque $\mathscr{X}$ est compacte, les groupes de cohomologie de de Rham $H^k(\mathscr{X},\mathbb{R})$ sont les groupes additifs sous-jacents à des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. La suite des dimensions $\mathrm{rang}_\mathbb{R} H^k(\mathscr{X},\mathbb{R})$, $k=0,...,n$, est alors la suite des *nombres de Betti* de la varété différentielle compacte $\mathscr{X}$.

Remarque 1.7 (la cohomologie de de Rham ≪ duale ≫ de l'homologie singulière différentiable)**.** L'intégration des k-formes différentielles ω sur $\mathscr{X}$ sur une k-chaîne $\sum_\iota c_\iota\theta_\iota$ (Δ_k simplexe élémentaire fermé de $\mathbb{R}^k$, θ_ι C^∞ différentiable d'un voisinage de Δ_k dans $\mathscr{X}$, $c_\iota\in\mathbb{R}$) :

$$\int_{\sum_\iota c_\iota\theta_\iota}\omega = \sum_\iota\int_{\Delta_k}\theta_\iota^*[\omega]$$

induit une dualité entre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H_k(\mathscr{X},\mathbb{R})$ *d'homologie singulière différentiable* et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H^k(\mathscr{X},\mathbb{R})$, d'où la terminologie ≪ groupes de cohomologie ≫.

Si $\mathscr{X}$ est une variété analytique complexe de dimension n, on a, pour tout entier k entre 0 et $2n$,

$$\Big(\bigwedge^k T^*(\mathscr{X}_{\mathrm{sjac}})\Big)\otimes_\mathbb{R}\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k}\bigwedge^p[T^{(1,0)}(\mathscr{X})]^*\wedge\bigwedge^q[T^{(0,1)}(\mathscr{X})]^*.$$

Le fibré $T^{(1,0)}(\mathscr{X})$ est ici le fibré tangent holomorphe (c'est d'ailleurs un fibré holomorphe de rang n) et son dual (qui est aussi un fibré holomorphe de rang n est le *fibré cotangent holomorphe*. Les fibrés $T^{(0,1)}(\mathscr{X})$ et $[T^{(0,1)}(\mathscr{X})]^*$ sont par contre des fibrés *anti-holomorphes*, correspondant à des cocycles anti-holomorphes ; on les considèrera ici comme des $\mathbb{C}$-fibrés au dessus de la variété sous-jacente de dimension $2n$ qu'est $\mathscr{X}_{\rm sjac}$.

Si $0 \leq k \leq 2n$ et si p et q sont deux entiers positifs tous les deux inférieurs ou égaux à n et tels que $p+q=k$, on dit qu'une $k=(p+q)$-forme différentielle ω à valeurs complexes dans l'ouvert $\mathscr{U}$ de la variété différentielle sous-jacente $\mathscr{X}_{\rm sjac}$ est une (p,q)-forme (à valeurs dans $\mathbb{C}$) si c'est une section dans $\mathscr{U}$ du fibré

$$\bigwedge^p [T^{(1,0)}(\mathscr{X})]^* \wedge \bigwedge^q [T^{(0,1)}(\mathscr{X})]^*.$$

Ceci signifie que ω s'exprime en coordonnées locales $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ dans un voisinage $\mathscr{U}_z$ d'un point z de $\mathscr{X}$ sous la forme

$$\omega = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n\\ 1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n}} \omega_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les fonctions $\omega_{I,J}$ sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes dans $\mathscr{U}_z$ et

$$dz_I := \bigwedge_{\ell=1}^{p} dz_{i_\ell}, \quad d\bar{z}_J := \bigwedge_{\ell=1}^{q} d\bar{z}_{j_\ell}\ (dz_{i_\ell} := dx_{i_\ell}+idy_{i_\ell},\ d\bar{z}_{j_\ell} := dx_{j_\ell}-idy_{j_\ell},\ j=1,...,n).$$

On note $C^{\infty,p,q}(\mathscr{U},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des (p,q)-formes dans l'ouvert $\mathscr{U}$. L'opérateur de de Rham $d\ : C^k(\mathscr{U},\mathbb{C}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathscr{U},\mathbb{C})$ se scinde sous la forme de la somme de deux opérateurs

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

tels que

$$\begin{aligned} \partial\ &: C^{\infty,p,q}(\mathscr{U},\mathbb{C}) \longrightarrow C^{\infty,p+1,q}(\mathscr{U},\mathbb{C}) \\ \bar{\partial}\ &: C^{\infty,p,q}(\mathscr{U},\mathbb{C}) \longrightarrow C^{\infty,p,q+1}(\mathscr{U},\mathbb{C}) \end{aligned}$$

et la relation $d\circ d = 0$ implique les trois relations :

$$\partial\circ\partial = \partial^2 = 0,\ \bar{\partial}\circ\bar{\partial} = \bar{\partial}^2 = 0,\ \partial\circ\bar{\partial} = \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial = -\bar{\partial}\circ\partial. \tag{1.27}$$

Notons que le chapitre liminaire (chapitre 0) de l'excellent livre de P. Griffiths et J. Harris ([**GH**], une référence incontournable pour toutes ces questions) complète cette présentation rapide.

Si $E_{\mathbb{C}}$ est un fibré *holomorphe* de rang r sur la variété analytique complexe $\mathscr{X}$ de dimension n, l'action de l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire

$$\bar{\partial}\ : C^{\infty,p,q}(\mathscr{U},\mathbb{C}) \longrightarrow C^{\infty,p,q+1}(\mathscr{U},\mathbb{C}), \qquad (0\leq p,q\leq n)$$

lorsque $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathscr{X}$ s'étend en une action

$$\bar{\partial}\ : C^{\infty,p,q}(\mathscr{U},E_{\mathbb{C}}) \longrightarrow C^{\infty,p,q+1}(\mathscr{U},E_{\mathbb{C}}),\ 0\leq p,q\leq n$$

et l'on dispose alors du *complexe de Dolbeault* :

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow C^{\infty,p,0}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,p,1}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\bar\partial} \dots \\
&\dots \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,p,n-1}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\bar\partial} C^{\infty,p,n}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}}) \longrightarrow 0, \quad 0 \le p \le n.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Les groupes

$$H^{p,q}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}}) := \frac{\{\omega \in C^{\infty,p,q}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}})\,;\, \bar\partial\omega = 0\}}{\bar\partial[C^{\infty,p,q-1}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{C}})]}, \quad 0 \le p, q \le n,$$

où l'on oublie la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour ne retenir que la structure de groupe abélien sont dits *groupes de cohomologie de Dolbeault de $\mathscr{U}$ à valeurs dans le fibré $E_{\mathbb{C}}$*.

1.4. Courants sur une variété différentielle ou analytique complexe

Nous disposons maintenant de tout le matériel nécessaire pour introduire l'objet central de ce cours, à savoir la notion de courant sur une variété différentielle ou une variété analytique complexe. Le support $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ sur lequel nous construirons de tels objets s'élargira ensuite au fil du cours (espaces analytiques au sens complexe, variétés algébriques singulières, espaces analytiques au sens de Berkovich).

1.4.1. Définition et structure : le cas des variétés différentielles

DÉFINITION 1.13 (courants de degré m sur un ouvert d'une variété différentielle de dimension n et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)). Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ une variété différentielle de dimension n et $E_{\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-fibré localement trivial de rang r au dessus de $\mathscr{X}$. Soit m un entier entre 0 et n. On appelle *courant de degré m à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ dans un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$* ou *courant de dimension $n-m$ à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ dans un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$* toute forme $\mathbb{K}$-linéaire T sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^{n-m}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}}^*)$ telle que, pour toute suite $(\varphi_k)_{k\ge 0}$ de $\mathcal{D}^{n-m}(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}}^*)$ convergeant vers la $(n-m)$-forme différentielle nulle au sens du principe de convergence des suites de fonctions-test 1.1 (étendu au $\mathbb{K}$-espace vectoriel des $(n-m)$-formes différentielles C^∞ à support compact et à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}^*$), on ait

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T, \varphi_k\rangle = 0.$$

On notera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des courants de degré m dans $\mathscr{U}$ et à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ comme $'\mathscr{D}^m(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$.

Remarque 1.8 (le cas particulier des courants à valeurs réelles ou complexes)**.** Dans le cas particulier où $E_{\mathbb{K}} = \mathscr{X} \times \mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les éléments de $'\mathscr{D}^m(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ sont dits *courants de degré m ou de dimension $n-m$ à valeurs réelles dans $\mathscr{U}$* lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *courants de degré m ou de dimension $n-m$ à valeurs complexes dans $\mathscr{U}$* lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous nous limiterons par la suite au cas des *variétés différentielles orientables.*

DÉFINITION 1.14 (orientabilité d'une variété différentielle). Une variété différentielle $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n est dite *orientable* si et seulement si il existe une section globale du fibré déterminant $\bigwedge^n T^*(\mathscr{X})$ qui ne s'annule en aucun point de $\mathscr{X}$. Choisir une telle section globale s'appelle choisir *une n forme volume dV sur $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$* : il est alors possible de fixer en tout point des coordonnées locales de manière cohérente, ce de manière à ce que, dans chaque ouvert de carte $\mathscr{U}_\iota$,

$$dx_{\iota,1} \wedge \cdots \wedge dx_{\iota,n} = \theta_\iota(x)\, dV_{|\mathscr{U}_\iota},$$

où θ_ι est une fonction C^∞ strictement positive.

Exemple 1.9.

— Toute sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$ se trouve naturellement orientable. C'est le cas des sous-variétés différentielles de dimension $N-1$ (hypersurfaces lisses) : en un point x d'une telle hypersurface lisse, on dispose en effet de deux orientations possibles pour la normale au $\mathbb{R}$-espace tangent, induisant chacune une orientation de l'espace tangent suivant par exemple la règle d'Ampère (une orientation sur $\mathbb{R}^N$ ayant été définie préalablement). On poursuit ensuite en montrant que les hypersurfaces lisses d'une variété différentiable orientable sont orientables, etc.

— Toute variété différentielle de dimension $2n$ sous-jacente à une variété analytique complexe de dimension n est orientable : en effet, si $f = (f_1, ..., f_n)$ est une application biholomorphe entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n_{x+iy}$, le jacobien de l'application

$$(x, y) \longmapsto (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$$

est égal à

$$\Big|\det\Big(\Big[\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\Big]_{1\leq j,k\leq n}\Big)\Big|^2 > 0.$$

Pour énoncer un résultat concernant la structure des courants, nous nous plaçons dans le cas particulier où $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ et $E_{\mathbb{K}} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier entre 0 et n. On définit un crochet de dualité (c'est-à-dire une application bilinéaire non dégénérée) entre :

— d'une part le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des $(n-m)$-formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{K}$, C^∞ et à support compact dans U, c'est-à-dire les objets

$$\varphi = \sum_{1\leq i'_1<\cdots<i'_{n-m}\leq n} \varphi_{I'}\, dx_{I'}$$

où $dx_{I'} := dx_{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i'_{n-m}}$ et $\varphi_{I'}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$, C^∞ et à support compact dans U ;

— d'autre part le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des objets de la forme

$$T = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n} T_I\, dx_I,$$

où T_I est pour chaque multi-index I de longueur m un élément de $\mathcal{D}'(U, \mathbb{K})$.

Ce crochet de dualité est le suivant :

$$\Big\langle \sum_{\#I=m} T_I\, dx_I \,,\, \sum_{\#I'=n-m} \varphi_{I'}\, dx_{I'} \Big\rangle = \sum_{\#I=m} \pm_{I;I^c} \langle T_I, \varphi_{I^c}\rangle \tag{1.29}$$

où $I^c = \{1, ..., n\}\setminus I$, le signe $\pm_{I;I^c}$ étant imposé par $dx_I \wedge dx_{I^c} = \pm_{I;I^c}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. La définition de ce crochet de dualité est en phase avec le principe de l'intégration des

n-formes différentielles continues dans l'adhérence d'un ouvert relativement compact $\mathscr{U}'$ de $\mathscr{U}$, principe suivant lequel

$$\int_{\mathscr{U}'} A(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{\overline{\mathscr{U}'}} A(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n := \int_{\overline{\mathscr{U}'}} A(x)\, dx,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^n$. Ce crochet de dualité permet d'identifier le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des m-courants dans U à valeurs dans $\mathbb{K}$ au $\mathbb{K}$-espace vectoriel des objets de la forme $\sum_{\# I=m} T_I\, dz_I$, où les T_I sont des éléments de $\mathcal{D}'(U,\mathbb{K})$.

Ce modèle se transpose au cadre des variétés différentielles sur lesquelles on dispose de la possibilité d'intégrer les fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ et à support compact, c'est-à-dire précisément les *variétés différentielles orientables*.

Si $(\mathscr{X},\mathscr{A})$ est une variété différentielle orientable de dimension n, on peut choisir une n forme volume dV et des coordonnées locales $\{x_1,...,x_n\}$ de manière cohérente en fonction du choix de cette forme volume ($dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \theta_\iota\, dV$ avec $\theta_\iota > 0$ dans chaque carte locale $(\mathscr{U}_\iota, \varphi_\iota)$). Soit aussi $E_{\mathbb{K}}$ un $\mathbb{K}$-fibré au dessus de $\mathscr{X}$. Soit $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{X}$ et $x \in \mathscr{U}$. Il existe un voisinage $\mathscr{U}_x$ de x dans $\mathscr{X}$ où l'on dispose à la fois de coordonnées locales $\{x_1,...,x_n\}$ (choisies de manière cohérente) et d'un repère $\{e_1,...,e_r\}$ pour le $\mathbb{K}$-fibré $E_{\mathbb{K}}$. Une $(n-m)$-forme différentielle C^∞, à support compact dans $\mathscr{U}_x$ et à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}^*$ se représente sous la forme

$$\varphi = \sum_{l=1}^{r} \Big(\sum_{1 \le i'_1 < \cdots < i'_{n-m} \le n} \varphi_{I',\ell}\, dx_{I'} \Big) \otimes e_l^*,$$

où $dx_{I'} = dx_{i'_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i'_{n-m}}$ et les $\varphi_{I',\ell}$ sont des fonctions C^∞ à support compact dans $\mathscr{U}_x$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si l'on utilise le principe de dualité introduit précédemment dans le cadre $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$, on voit qu'un courant T de degré d dans $\mathscr{U} \supset \mathscr{U}_x$ et à valeurs dans $E_{\mathbb{K}}$ se représente dans $\mathscr{U}_x$ sous la forme

$$T = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} T_{\mathscr{U}_x, I, \ell}\, dx_I \Big) \otimes e_\ell$$

où $dx_I := dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$, et $T_{\mathscr{U}_x,I,\ell}$ est, pour chaque $\ell = 1,...,r$, pour chaque multi-indice $(i_1,...,i_m) \in \{1,...,n\}^m$ avec entrées distinctes, une distribution à valeurs dans $\mathbb{K}$ dans l'ouvert $\mathscr{U}_x$. L'action de T sur la forme-test φ s'exprime dans ce cas comme

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{\# I=m} \pm_{I;I^c} \langle T_{\mathscr{U}_x,I,\ell}, \varphi_{I^c,\ell} \rangle$$

où $I^c = \{1,...,n\} \setminus I$ (les indices étant toujours rangés dans l'ordre croissant)

$$dx_I \wedge dx_{I^c} = \pm_{I,I^c}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

En utilisant ensuite le partitionnement de l'unité, on peut voir ainsi un élément de ${}'\mathcal{D}^m(\mathscr{U}, E_{\mathbb{K}})$ *comme une m-forme différentielle à valeurs dans le fibré $E_{\mathbb{K}}$ et à coefficients cette fois distributions dans $\mathscr{U}$.* Ce sera ce point de vue que nous utiliserons par la suite constamment.

1.4.2. Définition et structure : le cas des variétés analytiques complexes

Dans le cadre analytique complexe, nous allons profiter du scindage du fibré $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T^*(\mathscr{X}_{\rm adj})$ en le fibré cotangent holomorphe $[T^{(1,0)}(\mathscr{X})]^*$ et le fibré tangent antiholomorphe $[T^{0,1}(\mathscr{X})]^*$ pour définir de manière identique à ce qui a été fait à la section précédente la notion de (p,q)-courant $(0 \leq p, q \leq n)$. Nous n'envisagerons ici que les courants à valeurs dans un $\mathbb{C}$-fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}} = E$ et non dans un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial $E_{\mathbb{C}}$ arbitraire car nous envisagerons de faire agir l'opérateur $\bar{\partial}$ sur un tel (p,q)-courant pour le transformer en $(p,q+1)$-courant (toujours à valeurs dans le même fibré holomorphe E).

Définition 1.15 ((p,q)-courants sur un ouvert d'une variété analytique complexe de dimension n et à valeurs dans un fibré holomorphe E). Soit $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ une variété analytique complexe de dimension n et E un fibré holomorphe de rang r au dessus de la variété analytique complexe $\mathscr{X}$. Soient p et q deux entiers entre 0 et n. On appelle *courant de bi-degré* (p,q) *à valeurs dans* E ou *courant de bi-dimension* $(n-p, n-q)$ *à valeurs dans* E dans un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$ toute forme $\mathbb{C}$-linéaire T sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^{(n-p,n-q)}(\mathscr{U}, E^*)$ telle que, pour toute suite $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ de $\mathcal{D}^{(n-p,n-q)}(\mathscr{U}, E^*)$ convergeant vers la $(n-p, n-q)$-forme différentielle nulle au sens du principe de convergence des suites de fonctions-test 1.1 (étendu au $\mathbb{K}$-espace vectoriel des $(n-p, n-q)$-formes différentielles C^∞ à support compact et à valeurs dans E^*), on ait

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T, \varphi_k \rangle = 0.$$

On notera le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des courants de bi-degré (p,q) dans $\mathscr{U}$ et à valeurs dans E comme $'\mathscr{D}^{p,q}(\mathscr{U}, E)$. Lorsque $E = \mathscr{X} \times \mathbb{C}$, *le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $'\mathcal{D}^{p,q}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$ *est appelé simplement* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel des* (p,q)*-courants dans l'ouvert* $\mathscr{U}$ *de* $\mathscr{X}$.

On exploite maintenant le fait qu'une variété analytique complexe est orientable pour définir la structure d'un (p,q)-courant dans $\mathscr{U}$ à valeurs dans E en termes de distributions dans $\mathscr{U}$.

On choisit pour cela sur la variété différentielle sous-jacente $\mathscr{X}_{sjac}$ des coordonnées locales $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ de manière cohérente, en accord avec le choix de cette $2n$ forme volume dV, c'est-à-dire de manière à ce que

$$dx_{\iota,1} \wedge dy_{\iota,1} \wedge \cdots \wedge dx_{\iota,n} \wedge dy_{\iota,n} = \theta_\iota \, dV_{|\mathscr{U}_\iota}$$

(avec $\theta_\iota > 0$) dans chaque ouvert de carte $(\mathscr{U}_\iota, \varphi_\iota)$. Si z est un point de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_z$ un voisinage de z dans $\mathscr{U}$ dans lequel on dispose de coordonnées locales $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ et d'un repère $\{e_1, ..., e_r\}$ constitué de sections holomorphes pour le fibré holomorphe E. Toute $(n-p, n-q)$-forme C^∞ à support compact dans $\mathscr{U}_z$ et à valeurs dans E^* se représente dans $\mathscr{U}_z$ sous la forme

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{\substack{1\leq i'_1<\cdots<i'_{n-p}\leq n \\ 1\leq j'_1<\cdots<j'_{n-q}\leq n}} \varphi_{I',J',\ell} \, dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'} \Big) \otimes e^*_\ell.$$

Un courant T de bidegré (p,q) dans $\mathscr{U} \supset \mathscr{U}_z$ et à valeurs dans E se représente, lui, dans l'ouvert $\mathscr{U}_z$ sous la forme :

$$T = \sum_{\ell=1}^{r} \Big(\sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n}} T_{\mathscr{U}_z,I,J,\ell}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J \Big) \otimes e_\ell.$$

L'action de T sur la forme-test φ se trouve alors définie par

$$\langle T, \varphi\rangle = (2i)^n \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{\#I=p,\#J=q} \pm_{\{I,J\};\{I^c,J^c\}} \big\langle T_{\mathscr{U}_z,I,J,\ell}, \varphi_{I^c,J^c,\ell}\big\rangle$$

où

$$\begin{aligned} &dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge dz_{I^c} \wedge d\bar{z}_{J^c} = \pm_{\{I,J\};\{I^c,J^c\}} (d\bar{z}_1 \wedge dz_1) \wedge \cdots \wedge (d\bar{z}_n \wedge dz_n) \\ &= (2i)^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n. \end{aligned}$$

En utilisant ensuite le partitionnement de l'unité, on peut voir ainsi un élément de $'\mathcal{D}^{p,q}(\mathscr{U}, E)$ *comme une* (p,q)*-forme différentielle à valeurs dans le fibré* E *et à coefficients cette fois distributions dans* $\mathscr{U}$. Ce sera ici encore ce point de vue que nous utiliserons par la suite constamment.

1.4.3. Complexes de de Rham et de Dolbeault et courants

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et

$$\Delta_m := \{\xi \in \mathbb{R}^m\,;\, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., m\,;\, \xi_1 + \cdots + \xi_m \leq 1\}$$

le simplexe construit à partir du repère canonique $\{0; e_1, ..., e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Chacune des $(m-1)$-dimensionnelles faces (on les appelle *facettes*) de ce simplexe hérite d'une orientation induite par l'orientation canonique de $\mathbb{R}^m$ de la manière suivante : un repère direct sur chacune de ces faces doit former lorsqu'on lui adjoint la normale extérieure, un repère direct de $\mathbb{R}^m$. Le théorème fondamental de l'analyse assure que si ω est une $(m-1)$-forme différentielle dans un voisinage ouvert de Δ_m, on a la *formule de Stokes* (version élémentaire [1], pour un simplexe) :

$$\int_{\partial\Delta_m} \omega = \int_{\Delta_m} d\omega. \tag{1.31}$$

L'intégration à droite de $d\omega = A(\xi)\, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$ est définie par

$$\int_{\Delta_m} d\omega = \int_{\Delta_m} A(\xi)\, d\xi$$

1. Dans sa version plus générale, la formule de Stokes sur une variété différentielle $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ de dimension n *orientable* (cette clause est indispensable pour que l'intégration des n-formes différentielles sur les ouverts relativement compacts soit définie sans ambiguité) s'énonce ainsi : si $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ est un ouvert relativement compact dont la frontière est C^1 par morceaux et si ω est une $(n-1)$-forme de classe C^1 au voisinage de $\overline{\mathscr{U}}$, on a

$$\int_{\partial\mathscr{U}} \omega = \int_{\overline{\mathscr{U}}} d\omega. \tag{1.30}$$

L'orientation sur le bord de $\mathscr{U}$ est induite par l'orientation sur $\mathscr{X}$, donc sur $\mathscr{U}$, par la règle du bonhomme d'Ampère. On utilisera pour l'instant cette formule de Stokes générale uniquement dans le cas particulier où ω est C^∞ et à support compact dans $\mathscr{U}$. Cette formule de Stokes générale est capitale en mathématiques appliquées. C'est la transposition au cadre ≪ géométrique ≫ du théorème fondamental de l'analyse.

tandis que l'intégration de la $(m-1)$-forme ω sur la facette τ paramétrée par

$$(\eta_1, ..., \eta_{m-1}) \in \Delta_{m-1} \longmapsto \varphi_\tau(\eta)$$

conformément son orientation est donnée (si $\pi_\tau^*[\omega] = a_\tau(\eta)\, d\eta_1 \wedge \cdots \wedge d\eta_m$) par

$$\int_\tau \omega = \int_{\Delta_{m-1}} \varphi_\tau^*[\omega] = \int_{\Delta_{m-1}} a_\tau(\eta)\, d\eta_1 \wedge \cdots \wedge d\eta_{m-1} = \int_{\Delta_{m-1}} a_\tau(\eta)\, d\eta.$$

Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est une variété différentielle orientable, sur laquelle on choisit une forme volume dV, l'intégration des n formes différentielles à support compact correspond à l'action du 0-courant $[1]$. On a

$$\langle [1], \varphi \rangle = \int_{\mathscr{X}} \varphi \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}^n(\mathscr{X}, \mathbb{C}).$$

En utilisant le partitionnement de l'unité (proposition 1.1), il résulte de la formule de Stokes (1.31) dans le cas $m = n$ que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-1}(\mathscr{X}, \mathbb{C}), \qquad \langle [1], d\omega \rangle = \int_{\mathcal{X}} d\omega = 0. \tag{1.32}$$

Si $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est une variété analytique complexe de dimension n, on a donc :

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-1,n}(\mathscr{X}, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathcal{X}} \partial\omega = 0 \\ &\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n,n-1}(\mathscr{X}, \mathbb{C}), \quad \int_{\mathcal{X}} \bar{\partial}\omega = 0. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ces formules nous conduisent, si l'on veut respecter (comme lors de la définition de l'action de la dérivation sur les distributions) le principe de l'intégration par parties (lorsque les distributions-coefficients intervenant dans l'expression des courants comme formes différentielles à coefficients distributions sont des distributions-fonctions C^∞) à l'introduction de la différentiation des courants au sens suivant.

Définition 1.16 (action des opérateurs $d, \partial, \bar{\partial}$ sur un courant à valeurs réelles ou complexes). Soit $\mathscr{U}$ un ouvert d'une variété différentielle de dimension n et T un courant dans ${}'\mathcal{D}^m(\mathscr{U}, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On définit le courant dT appartenant à ${}'\mathcal{D}^{m+1}(\mathscr{U}, \mathbb{K})$ en posant :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{n-m-1}(\mathscr{U}, \mathbb{K}), \quad \langle dT, \varphi \rangle = (-1)^{m+1} \langle T, d\varphi \rangle. \tag{1.34}$$

Si $\mathscr{U}$ est un ouvert d'une variété analytique complexe de dimension n, on définit les $\mathbb{C}$-homomorphismes

$$\begin{aligned} \partial \ &: \ {}'\mathcal{D}^{(p,q)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{(p+1,q)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \\ \bar{\partial} \ &: \ {}'\mathcal{D}^{(p,q)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{(p,q+1)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} \langle \partial T, \varphi \rangle &= (-1)^{p+q+1} \langle T, \partial\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{(n-p-1,n-q)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \\ \langle \bar{\partial} T, \varphi \rangle &= (-1)^{p+q+1} \langle T, \bar{\partial}\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{(n-p,n-q-1)}(\mathscr{U}, \mathbb{C}) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Remarque 1.9. Si $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ est une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré holomorphe de rang r au dessus de $\mathscr{X}$ et T un élément de $'\mathcal{D}^{(p,q)}(\mathscr{U}, E)$, voici comment on définit un courant $\bar{\partial}T$ appartenant à $'\mathcal{D}^{(p,q+1)}(\mathscr{U}, E)$. On exprime T dans un ouvert $\mathscr{U}_z \subset \mathscr{U}$ où l'on dispose d'un repère $\{e_1, ..., e_r\}$ pour E sous la forme

$$T = \sum_{\ell=1}^{r} T_{\mathscr{U}_z,\ell} \otimes e_\ell$$

où les $T_{\mathscr{U}_z,\ell}$ sont des éléments de $'\mathcal{D}^{(p,q)}(\mathscr{U}_z, \mathbb{C})$. Le courant $\bar{\partial}T$ se représente dans ce même ouvert $\mathscr{U}_z$ comme

$$\bar{\partial}T = \sum_{\ell=1}^{r} \bar{\partial}\, [T_{\mathscr{U}_z,\ell}] \otimes e_\ell$$

(puisque les sections e_ℓ sont holomorphes). Ces représentations locales dans les divers ouverts $\mathscr{U}_z$ se globalisent en un courant $\bar{\partial}T$ appartenant à $'\mathcal{D}^{(p,q+1)}(\mathscr{U}, E)$.

1.4.4. Le concept de positivité

Le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ s'exprime sous la forme

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Le carré de la norme euclidienne, quantité positive qu'il est facile d'attacher à un vecteur $(x_1, ..., x_n)$ de manière algébrique est ainsi

$$\|x\|_2^2 := \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \langle x, x\rangle.$$

Dans $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire hermitien est

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j.$$

Le carré de la norme euclidienne d'un vecteur $(z_1, ..., z_n)$ s'exprime cette fois sous la forme

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j$$

i.e. comme une forme linéaire en $(z_1, ..., z_n)$ à coefficients « antiholomorphes » (donc en un certain sens « indépendants » des z_j) $\bar{z}_1, ..., \bar{z}_n$. Il sera par la suite important d'exploiter cette particularité de $\mathbb{C}^n$ et la possibilité de disposer dans ce cadre de variables « fantômes » pour former des expressions positives telles $\|z\|^2$ à partir d'objets algébriques (par exemple un jeu de fonctions polynomiales des variables « holomorphes » $z_1, ..., z_n$). C'est ici un atout de taille pour le cadre complexe $\mathbb{C}^n$ par rapport au cadre réel $\mathbb{R}^n$ (outre le fait que $\mathbb{C}$ soit algébriquement clos au contraire de $\mathbb{R}$).

On introduit pour cela des concepts de positivité pour les (p, p)-formes.

DÉFINITION 1.17 ((p,p)-formes *fortement positives* ou simplement *positives* dans un ouvert d'une variété analytique complexe). Soit $\mathscr{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{X}$. Une (p,p)-forme $(1 \leq p \leq n)$ ω à valeurs complexes[1] est dite *fortement positive* dans $\mathscr{U}$ si et seulement si elle s'exprime en coordonnées locales au voisinage de tout point z de $\mathscr{U}$ sous la forme d'une somme de forme différentielles

$$\theta_\iota \bigwedge_{j=1}^{p} (i\, d\ell_{\iota,j} \wedge d\bar{\ell}_{\iota,j})$$

où chaque $\ell_{\iota,j}$ est une forme linéaire à coefficients complexes des dz_j et ω_ι est une fonction positive ou nulle. Elle est dite *positive* dans $\mathscr{U}$ si, pour tout $z \in \mathscr{U}$, pour toute forme linéaire ℓ à coefficients complexes des $(dz_j)_z$,

$$\omega(z) \wedge \bigwedge_{j=1}^{p} (i\, d\ell_j \wedge d\bar{\ell}_j) = \gamma_{z,\ell}\, (dx_1)_z \wedge (dy_1)_z \wedge \cdots \wedge (dx_n)_z \wedge (dy_n)_z$$

avec $\gamma_{z,\ell} \geq 0$.

Exemple 1.10 (quelques exemples)**.**

— La forme

$$\omega_{n,p} := \big((i/2)\,(\partial \circ \bar{\partial})\,[\|z\|^2]\big)^p = \Big(\sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j\Big)^p \quad (1 \leq p \leq n)$$

est une (p,p)-forme positive dans $\mathbb{C}^n$. Notons que $(\omega_{n,1})^{\wedge n}/n!$ est la forme volume usuelle $dx_1 \wedge dy_j \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

— Si ω est une $(1,1)$-forme s'exprimant en coordonnées locales sous la forme

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} i\, h_{j,k}(z)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

dire que ω est positive dans $\mathscr{U} \subset \mathscr{X}$ revient à dire que l'application bilinéaire

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_z, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_z\Big) \longmapsto \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{j,k}(z)\, \xi_j \bar{\xi}_k$$

définit en chaque point z de $\mathscr{U}$ (la dépendance en z étant C^∞) une métrique hermitienne semi-positive sur la fibre $T_z^{(1,0)}(\mathscr{X})$ du fibré tangent holomorphe à $\mathscr{X}$ au point z. On dit alors que l'on a ainsi associé à une telle $(1,1)$-forme positive ω une *métrique hermitienne semi-positive* dans l'ouvert $\mathscr{U}$.

— Dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la $(1,1)$-forme

$$\omega_{\mathrm{FS}} := \frac{i}{2\pi} (\partial \circ \bar{\partial})[\log(|z_0|^2 + \dots |z_n|^2)] \tag{1.36}$$

jouera un rôle très important. Notons ici que la fonction

$$[z_0 : \ldots : z_n] \longmapsto \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)$$

1. C'est-à-dire une section dans $\mathscr{U}$ du fibré $(\bigwedge^p [T^{(1,0)}(\mathscr{X})]^* \wedge \bigwedge^p [T^{(0,1)}(\mathscr{X})]^*) \otimes \mathbb{C}$.

n'est pas une fonction convenablement définie globalement dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: il convient de l'exprimer dans chaque ouvert $\mathscr{U}_j \simeq \mathbb{C}^n$, $j = 0, ..., n$, en coordonnées affines dans cet ouvert, par exemple dans l'ouvert

$$\mathscr{U}_0 = \{[z_0 : \ldots : z_n]\,;\, z_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n_{\zeta_1,\ldots,\zeta_n} \qquad (\zeta_j = z_j/z_0,\ j = 1, ..., n)$$

par

$$(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \longmapsto \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)\,(\partial \circ \bar\partial)\,[\log(1 + |\zeta_1|^2 + \cdots + |\zeta_n|^2)].$$

Comme

$$(\partial \circ \bar\partial)\,[\log |f|^2] = (\partial \circ \bar\partial)\,[\log(f\,\bar f)]$$

si f est une fonction holomorphe et ne s'annulant pas dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, les diverses définitions de la $(1,1)$-forme différentielle (1.36) se recollent de carte en carte pour donner une $(1,1)$-forme globalement définie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cette $(1,1)$-forme est une forme positive dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et la métrique hermitienne qui lui correspond est une métrique hermitienne positive sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dite *métrique de Fubini-Study.* La forme $(\omega_{\mathrm{FS}})^{\wedge n}$ est une forme volume sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ et on a la formule

$$\int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} (\omega_{\mathrm{FS}})^n = 1.$$

Ceci explique la présence de la constante transcendante π dans l'expression de ω_{FS}. On notera d^c (pour $d^{\text{conjugué}}$) l'opérateur

$$d^c = \frac{1}{4i\pi}(\partial - \bar\partial), \tag{1.37}$$

sachant que

$$d = \partial + \bar\partial,$$

d'où la formule plus « compacte »

$$\omega_{\mathrm{FS}} = dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2) \qquad ([z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})).$$

On définit par dualité les notions de (p,p)-*courant positif* et de (p,p)-*courant fortement positif.*

DÉFINITION 1.18. Soit $\mathscr{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{X}$. Un courant $T \in {}'\mathcal{D}^{(p,p)}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$ est dit *positif* dans $\mathscr{U}$ si $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$ pour toute $(n-p, n-p)$-forme test $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-p,n-p)}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$ telle que φ soit fortement positive dans $\mathscr{U}$. Un tel courant T est dit *fortement positif* si et seulement $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$ pour toute $(n-p, n-p)$-forme test $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-p,n-p)}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$ telle que φ soit positive dans $\mathscr{U}$.

On a la propriété très importante suivante :

PROPOSITION 1.5 (les courants positifs sont à coefficients-mesures). *Si T est un (p,p)-courant positif dans un ouvert $\mathscr{U}$ d'une variété analytique complexe, T s'exprime en coordonnées locales au voisinage de tout point z de $\mathscr{U}$ sous la forme*

$$T = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n}} T_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar z_J, \tag{1.38}$$

les coefficients distributions $T_{I,J}$ sont en fait des distributions-mesures. Plus précisément :

- *pour chaque multi-indice L de longueur p avec entrée dans $\{1,...,n\}$, $i^{p^2}T_{L,L}$ est une mesure de Radon positive μ_L ;*
- *les mesures de Radon complexes $T_{I,J}$ et $T_{J,I}$ sont des mesures conjuguées ;*
- *les mesures μ_L « contrôlent » les mesures $T_{I,J}$ au sens suivant : si $\lambda_1,...,\lambda_n$ sont des réels positifs ou nuls et si λ_L désigne le produit des λ_j pour $j \in L$ lorsque L est un sous-ensemble de cardinal p de $\{1,...,n\}$:*

$$\lambda_I \lambda_J |T^{I,J}|_{\mathscr{K}} \leq 2^{n-p} \sum_{I\cap J \subset L \subset I \cup J} \lambda_L^2 \, \mu_L(\mathscr{K}) \tag{1.39}$$

pour tout compact $\mathscr{K}$ de l'ouvert de carte dans lequel T se représente sous la forme (1.38).

Démonstration. On raisonne dans un ouvert de carte $\mathscr{U}$ où les fonctions notées $z_1 = x_1 + iy_1, ..., z_n = x_n + iy_n$ sont des coordonnées complexes locales. Vérifions d'abord par exemple que si $L = \{1,...,p\}$, $T_{L,L} = i^{p^2}\mu_L$, où μ_L est une mesure de Radon positive (en ré-indexant les variables locales, on peut toujours se ramener à ce cas). En testant T sur une $(n-p)$-forme $\theta \bigwedge_{k=1}^{n-p}(i\, dz_{p+k} \wedge d\bar{z}_{p+k})$ (où θ est une fonction positive appartenant dans $\mathcal{D}(\mathscr{U},\mathbb{R})$), on doit par hypothèses trouver

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \Big\langle T_{L,L}\, dz_L \wedge d\bar{z}_L, \theta \bigwedge_{k=1}^{n-p} (idz_{p+k} \wedge d\bar{z}_{p+k}\Big\rangle = \\ &= \Big\langle i^{p^2}\, T_{L,L} \bigwedge_{j=1}^{p} (idz_j \wedge d\bar{z}_j)\,,\, \theta \bigwedge_{k=1}^{n-p} (idz_{p+k} \wedge d\bar{z}_{p+k}\Big\rangle = \\ &= \big\langle i^{p^2} T_{L,L}, \theta(x_1,y_1,...,x_n,y_n)\big\rangle \geq 0\end{aligned} \tag{1.40}$$

Comme $\theta \leq \|\theta\|_\infty \, \theta_{\mathscr{K}}$, où $\theta_{\mathscr{K}} \in \mathcal{D}(\mathscr{U},[0,1])$ est une fonction positive identiquement égale à 1 au voisinage du support compact $\mathscr{K}$ de θ (il existe de telles fonctions d'après la proposition 1.1), la positivité de la distribution $i^{p^2}T_{L,L}$ (le test de cette distribution sur une fonction positive fournit un nombre positif) assure que pour tout compact $\mathscr{K} \subset\subset \mathscr{U}$, il existe une constante $C_{\mathscr{K}} > 0$ telle que

$$|\big\langle i^{p^2} T_{L,L}, \theta\big\rangle| \leq C_{\mathscr{K}} \|\theta\|_\infty \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}_{\mathscr{K}}(\mathscr{U},\mathbb{C}).$$

Ceci implique que $T_{L,L}$ est d'ordre 0 et est donc une distribution-mesure (voir la section 1.1.2). La positivité implique que cette mesure (*a priori* mesure de Radon complexe) est en fait une mesure de Radon réelle positive.

Le fait que toutes les distributions $T_{I,J}$ soient des distributions-mesures (complexes cette fois, mais toujours de Radon) résulte du fait que si l'on note

$$dV = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

la forme volume dans l'ouvert de carte $\mathscr{U}$, on peut écrire

$$T^{I,J}\, dV = \sum_{\varpi = (\varpi_1,...,\varpi_{n-p}) \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{n-p}} \epsilon_\varpi T \wedge \gamma_\varpi \tag{1.41}$$

avec, pour tout $\varpi \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{n-p}$,

$$\gamma_\varpi := \bigwedge_{\ell=1}^{n-p} \Big(\frac{i}{4}(dz_{i_\ell^c} + i^{\varpi_\ell} dz_{j_\ell^c}) \wedge (d\bar{z}_{i_\ell^c} - i^{\varpi_\ell} d\bar{z}_{j_\ell^c})\Big)$$

où on a noté $I^c := \{1,...,n\} \setminus I = \{i_1^c,...,i_{n-p}^c\}$, $J^c := \{1,...,n\} \setminus J = \{j_1^c,...,j_{n-p}^c\}$.

On déduit du développement (1.41) que pour toute fonction test $\theta \in \mathcal{D}(\mathscr{U},\mathbb{C})$ on a l'inégalité :

$$(1.42)\qquad \begin{aligned} |\langle T_{I,J},\theta\rangle| &\leq \Big|\Big\langle T \wedge \bigwedge_{\ell=1}^{n-p} \big(idz_{i_\ell^c} \wedge d\bar{z}_{i_\ell^c} + idz_{j\ell^c} \wedge d\bar{z}_{j_\ell^c}\big)\,,\,\theta\Big\rangle\Big| \\ &\leq 2^{n-p} \sum_{L\supset I\cap J} \int_{\mathscr{U}} |\theta|\, d\mu_{L,L}. \end{aligned}$$

Il suffit en effet pour aboutir à la dernière inégalité de développer le produit extérieur des $n-p$-formes qui apparait multiplié par T au membre de droite de la première ligne sous forme d'une somme d'au plus 2^{n-p} termes du type $i^{(n-p)^2} dz_{L^c} \wedge d\bar{z}_{L^c}$ avec $\#L^c = n-p$ et $L^c \subset I^c \cup J^c$ (donc $L \supset I \cap J$ en prenant les complémentaires). Pour en déduire les inégalités (1.39) impliquant les $\lambda_j \geq 0$, on effectue le changement de coordonnées locales $(z_1,...,z_n) \leftrightarrow (\lambda_1 z_1,...,\lambda_n z_n)$ lorsque les λ_j sont tous strictement positifs, puis on passe à la limite pour assurer la validité des inégalités lorsque les λ_j sont positifs ou nuls en mettant à 0 les λ_ℓ tels que $\ell \notin I \cup J$.

Qu'enfin les mesures de Radon complexes $T_{I,J}$ et $T_{J,I}$ soient conjuguées vient du fait que $\langle T,\varphi\rangle \geq 0$ (donc réel) si φ est une forme positive ; en conjuguant, on obtient bien $T_{I,J} = \bar{T}_{J,I}$ lorsque I et J sont des multi-indices de longueur p extraits tous deux de $\{1,...,n\}$. $\square$

1.5. Exemples de courants en relation avec géométrie ou algèbre

1.5.1. Le cadre des ouverts de $\mathbb{C}$

Notre premier exemple sera un exemple en relation avec le cadre « rigide » de l'algèbre. Les fonctions polynomiales ou rationnelles d'une variable complexe dans un ouvert de $\mathbb{C}$ constituent en effet des exemples de fonctions holomorphes ou méromorphes.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$; si $f\ : U \to \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe dans U, c'est-à-dire continue de U dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et en même temps holomorphe dans l'ouvert $f^{-1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{[0:1]\})$, la fonction $\log|f|^2$ est définit une fonction localement intégrable dans U, donc une distribution dans U, ou encore un courant de bi-degré $(0,0)$ dans cet ouvert :

$$(1.43)\quad [\log|f|^2]\ : \varphi = \psi\, d\bar{z} \wedge dz \in \mathcal{D}^{(1,1)}(U,\mathbb{C}) \longmapsto \int_U \psi\, d\bar{z}\wedge dz = 2i \int_U \psi(z)\, dxdy$$

D'autre part, l'application

$$\varphi \in \mathcal{D}(U,\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{\alpha\in f^{-1}(0)} \mu_\alpha \varphi(\alpha) - \sum_{\beta\in f^{-1}(\infty)} \nu_\beta\, \varphi(\beta)$$

(μ_α désignant la multiplicité de α comme zéro de f, ν_β l'ordre de β comme pôle de f) peut être considérée comme l'action d'un $(1,1)$-courant, à savoir le courant

$$\begin{aligned}[\mathrm{div}(f)] &:= \Big(\sum_{\alpha\in f^{-1}(0)} \mu_\alpha[\delta_\alpha] - \sum_{\beta\in f^{-1}(\infty)} \nu_\beta[\delta_\beta]\Big)\, dx\wedge dy \\ &= \Big(\sum_{\alpha\in f^{-1}(0)} \mu_\alpha[\delta_\alpha] - \sum_{\beta\in f^{-1}(\infty)} \nu_\beta[\delta_\beta]\Big)\, \frac{d\bar z\wedge dz}{2i}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

Une conséquence de la formule de Stokes dans $\mathbb{C}$ est la proposition suivante, reliant les deux courants (1.43) et (1.44).

Proposition 1.6 (formule de Lelong-Poincaré dans un domaine de $\mathbb{C}$). *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (on dit aussi un domaine) et $f\ : U\to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe dans U. On a, au sens des courants dans U,*

$$dd^c[-\log|f|^2] + [\mathrm{div}(f)] = 0, \tag{1.45}$$

où[1]

$$dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\circ\bar\partial.$$

Démonstration. On observe tout d'abord que si U' est un ouvert de U dans lequel f n'a ni zéro ni pôle, la fonction $\log|f|^2$ est une fonction C^∞ dans U' et l'on a, dans U', au sens des formes différentielles[2] :

$$\partial[\bar\partial\log|f|^2] = \partial[\bar\partial\log(f\bar f)] = \partial[\bar\partial\bar f/\bar f] = 0.$$

Pour vérifier la formule (1.45), il suffit donc de sse placer dans un disque ouvert $D=D(\alpha,\eta)$ ou $D=D(\beta,\eta)$ ne contenant que α (respectivement β) comme seul zéro (respectivement pôle) de f. On peut même supposer, en utilisant le développement en série de Taylor (respectivement de Laurent) de f au voisinage de α (respectivement de β) que $f(z)=z^{\mu_\alpha}$ (respectivement $f(z)=z^{-\nu_\beta}$) dans D. Prouver la formule se ramène donc à prouver

$$-dd^c[\log|z|^2] + [\delta_0]\, dx\wedge dy = 0$$

au sens des courants dans $\mathbb{C}$. On écrit alors, si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{C},\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle \log|z|^2, dd^c\varphi\rangle &= \frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(\int_{\{|z|\geq\epsilon\}}\log|z|^2\,\partial[\bar\partial\varphi]\Big)\\ &= -\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(\int_{\gamma_\epsilon}\log|z|^2\,\bar\partial\varphi(z) + \int_{\{|z|\geq\epsilon\}}\frac{dz}{z}\wedge\bar\partial\varphi(z)\Big)\\ &= -\frac{i}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(\int_{\{|z|\geq\epsilon\}}\frac{dz}{z}\wedge\bar\partial\varphi(z)\Big)\end{aligned}$$

---

1. On rappelle qu'il faut interpréter la notation dd^c comme $d\circ d^{\text{conjugué}}$: en effet si $d=\partial+\bar\partial$, on pose par convention $d^c=(-i)(4\pi)(\partial-\bar\partial)$ (voir (1.37)), soit $dd^c = (-i/(4\pi))\times 2\bar\partial\circ\partial = (i/(2\pi))\,\partial\circ\bar\partial$.

2. Ce ≪ scindage ≫ $|f|^2 = f\times\bar f$ exploité ici est intrinsèquement lié à la structure complexe. Lorsque nous aurons plus tard affaire à des expressions impliquant $|f|_v^2$, où f sera cette fois une section d'un $\mathbb{K}$-fibré en droites ($\mathbb{K}$ étant un corps commutatif équipé d'une valeur absolue $|\ |$ non archimédienne) au dessus d'un $\mathbb{K}$-espace analytique de Berkovich (ce fibré étant équipé d'une valeur absolue v prolongeant la valeur absolue $|\ |$ sur $\mathbb{K}$), il nous sera impossible de disposer d'un pareil scindage, ce qui nous contraindra, on le verra, à introduire de nouveaux objets ≪ courantiels ≫ afin de parer à pareille difficulté.

si $\gamma_\epsilon \ : t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}$ (on utilise ici la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que le fait que $\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \log \epsilon = 0$). En appliquant une seconde fois la formule de Stokes, on observe que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(z)\, dz}{z} = \int_{\{|z| \geq \epsilon\}} \frac{dz}{z} \wedge \bar{\partial}\varphi(z).$$

On a donc

$$\langle \log |z|^2, dd^c\varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\varphi(z)\, dz}{z} \Big) = \varphi(0).$$

La formule (1.45) est ainsi établie. □

Supposons que f soit maintenant une fonction holomorphe et non identiquement nulle dans le domaine U. Les zéros de cette fonction sont donc des points isolés α, chacun d'eux étant affecté d'une multiplicité μ_α. Nous allons associer à f un $(0,1)$ courant de la manière suivante. Soit λ un paramètre complexe supposé pour l'instant de partie réelle strictement supérieure à $1/2$. La fonction

$$z \in U \longmapsto \frac{|f|^{2\lambda}}{f}$$

est une fonction localement bornée dans U, donc définissant une distribution T_λ (c'est-à-dire un $(0,0)$-courant) dans U par :

$$T^{f,\lambda} = \big[|f|^{2\lambda}/f\big] : \varphi = \psi\, d\bar{z} \wedge dz \longmapsto \langle T^{f,\lambda}, \varphi \rangle = 2i \int_U \frac{|f|^{2\lambda}}{f}\, \psi(z)\, dxdy.$$

On a la proposition suivante :

Proposition 1.7 (courant valeur principale et courant résiduel). *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour toute fonction forme test $\varphi \in \mathcal{D}^{(1,1)}(U, \mathbb{C})$, l'application*

$$\lambda \in \{\lambda\,;\, \mathrm{Re}\,\lambda > 1/2\} \longmapsto \langle T^{f,\lambda}, \varphi \rangle := \langle |f|^{2\lambda}/f, \varphi \rangle \tag{1.46}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ dont l'ensemble des pôles éventuels est contenu dans $\mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0[$. De plus, le développement de Taylor du prolongement méromorphe de l'application (1.46) *au voisinage de l'origine s'exprime sous la forme*

$$\big\langle T^{f,\lambda}, \varphi \big\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f;\varphi;0)\, \lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} \langle T_k^f, \varphi \rangle\, \lambda^k, \tag{1.47}$$

où $T_0^f, T_1^f, ...$ sont des courants de degré $(0,0)$ dans U. Le courant $T^{f,0}$ vérifie

$$fT^{f,0} = [1],$$

où $[1]$ désigne le courant de bi-degré $(0,0)$ défini par la fonction constante égale à 1. Le courant $\bar{\partial}T^{f,0}/(2i\pi)$ est un courant de bi-degré $(0,1)$, noté $\bar{\partial}(1/f)$, possédant les deux propriétés suivantes :

— *on dispose de la « factorisation » suivante (au sens des courants) :*

$$[\mathrm{div}(f)] = \bar{\partial}(1/f) \wedge df \ ; \tag{1.48}$$

— *pour toute fonction h holomorphe dans U, il y équivalence entre le fait que h appartienne à l'idéal principal (f) de l'anneau $H(U)$ des fonctions holomorphes dans U et la relation « courantielle » :*

$$h\,\bar\partial(1/f)=0 \tag{1.49}$$

(au sens des courants dans U).

Le courant $T^{f,0}$ est appelé courant valeur principale $[1/f]$ dans U, tandis que le courant $\bar\partial(1/f)$ est appelé courant résiduel associé à la fonction holomorphe f dans U.

Démonstration. En utilisant le lemme de partition de l'unité (proposition 1.1), on peut se ramener à supposer que

— soit f ne s'annule pas dans U (premier cas) :

— soit U est un disque ouvert $D(\alpha,\eta)$ de centre un zéro α de f et de rayon assez petit pour que dans ce disque on puisse représenter f sous la forme

$$f(z)=u_\alpha(z)\,z^{\mu_\alpha},$$

où u_α est une fonction holomorphe inversible dans $H(U)$ (c'est-à-dire ne s'annulant pas dans U) et μ_α désigne la multiplicité de α comme zéro de f (deuxième cas).

Dans le premier cas, la fonction de λ

$$\begin{aligned}\lambda\in\{\lambda\,;\,\mathrm{Re}\,\lambda>1/2\}\longmapsto\langle T^{f,\lambda},\varphi\rangle&=\int_U\frac{|f|^{2\lambda}}{f}\,\varphi(z)=2i\int_U\frac{|f|^{2\lambda}}{f}\,\psi(z)\,dxdy\\&=2i\int_U\exp(\lambda\log|f|^2)\,\frac{\psi(z)}{f(z)}\,dxdy=2i\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_U(\log|f|^2)^k\,\frac{\psi(z)}{f(z)}\,dxdy\Big)\,\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

se prolonge en une fonction entière (dont le développement de Taylor à l'origine est donné ci-dessus). Le courant $T^{f,0}=[1/f]$ vérifie bien $f\,T^{f,0}=[1]$ dans U et l'on a bien sûr $\bar\partial T^{f,0}=0=[\emptyset]=[\mathrm{div}(f)]$ (au sens des courants dans U) dans ce cas. Les deux propriétés exigées de $\bar\partial(1/f)=0=[\mathrm{div}(f)]$ sont donc bien satisfaites dans ce premier cas car l'idéal engendré par f dans $H(U)$ est l'anneau $H(U)$ tout entier (f est supposée ici ne pas s'annuler dans U).

Dans le second cas, on exploite les relations formelles

$$\frac{\partial^{N+\mu_\alpha}}{\partial\bar z^{N+\mu_\alpha}}[\bar z^{\mu_\alpha\lambda+N+\mu_\alpha}]=\Big(\prod_{k=1}^{N+\mu_\alpha}(\mu_\alpha\,\lambda+k)\Big)\,\bar z^{\mu_\alpha\lambda},\quad N=0,1,2,...$$

et l'on utilise la formule d'intégration par parties (c'est-à-dire le théorème de Stokes) pour exprimer :

$$\begin{aligned}&\int_U\frac{|u_\alpha|^{2\lambda}}{u_\alpha}\,\frac{|z|^{2\mu_\alpha\lambda}}{z^{\mu_\alpha}}\,\psi(z)\,dxdy\\&=\frac{(-1)^{N+\mu_\alpha}}{\prod\limits_{k=1}^{N+\mu_\alpha}(\mu_\alpha\lambda+k)}\int_U|z|^{2\mu_\alpha\lambda}\,\frac{\bar z^{N+\mu_\alpha}}{z^{\mu_\alpha}}\,\frac{\partial^{N+\mu_\alpha}}{\partial\bar z^{N+\mu_\alpha}}\Big[\frac{|u_\alpha|^{2\lambda}\psi}{u_\alpha}\Big](z)\,dxdy.\end{aligned}\tag{1.50}$$

En choisissant N arbitrairement grand et en invoquant le théorème relatif aux intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre complexe, on voit que l'application (1.46) se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, à pôles (éventuels) inclus dans

$$\{-k/\mu_\alpha\,;\,k\in\mathbb{N}^*\}.$$

Par exemple, ce prolongement s'exprime dans $\{\mathrm{Re}\,\lambda>-1/\mu_\alpha\}$ comme

$$\langle T^{f,\lambda},\varphi\rangle = 2i\frac{(-1)^{N+\mu_\alpha}}{\prod\limits_{k=1}^{N+\mu_\alpha}(\mu_\alpha\lambda+k)}\int_U |z|^{2\mu_\alpha\lambda}(\bar z/z)^{\mu_\alpha}\frac{\partial^{N+\mu_\alpha}}{\partial\bar z^{N+\mu_\alpha}}\Big[\frac{|u_\alpha|^{2\lambda}\psi}{u_\alpha}\Big](z)\,dxdy$$

(il suffit en effet dans ce cas d'utiliser la relation (1.50) avec $N=0$). L'action de la distribution $T^{f,0}$ sur la forme $\varphi=\psi d\bar z\wedge dz$ s'exprime donc dans ce second cas :

$$\langle T^{f,0},\varphi\rangle = 2i\frac{(-1)^{N+\mu_\alpha}}{\mu_\alpha!}\int_U (\bar z/z)^{\mu_\alpha}\,\frac{1}{u_\alpha(z)}\,\frac{\partial^{N+\mu_\alpha}\psi}{\partial\bar z^{N+\mu_\alpha}}(z)\,dxdy.$$

Les autres coefficients de Taylor $a_k(f;\varphi;0)$ $(k=1,2,...)$ impliqués dans le développement (1.47) au voisinage de l'origine de la fonction $\lambda\mapsto\langle T^{f,\lambda},\varphi\rangle$ (qui est holomorphe dans le demi-plan $\{\lambda\,;\,\mathrm{Re}\,\lambda>-1/\mu_\alpha\}$) ont des expressions plus complexes, mais s'expriment chacun comme l'action d'une certaine distribution T_k^f sur la $(1,1)$-forme-test φ. La construction de $T^{f,0}$ montre que $f\,T^{f,0}=[1]$. En prenant l'action de l'opérateur $\bar\partial$ sur les deux membres de cette relation, on trouve $f\,\bar\partial T^{f,0}=0$. Il en résulte bien (toujours dans ce second cas) :

$$\forall\, h\in H(U)\,,\quad h\,\bar\partial(1/f)=0$$

au sens des courants dans U, ce qui correspond à l'implication directe dans la seconde propriété exigée du courant $\bar\partial(1/f)$. D'autre part, pour toute forme-test dans $\mathcal{D}^{(1,0)}(U,\mathbb{C})$,

$$\big\langle\bar\partial(1/f),\varphi\big\rangle = \Big[\frac{\lambda}{2i\pi}\int_U |f|^{2\lambda}\,\frac{\bar\partial\bar f}{\bar f}\wedge\frac{\varphi}{f}\Big]_{\lambda=0}$$

(la notation $[\ ]_{\lambda=0}$ ci-dessus signifie que l'on suit le prolongement méromorphe en λ et que l'on prend ensuite la valeur en $\lambda=0$ de ce prolongement qui se trouve être holomorphe dans le demi-plan $\{\lambda\,;\,\mathrm{Re}\,\lambda>-1/\mu_\alpha\}$). Si $\varphi=\psi\,df$, il vient donc

$$\begin{aligned}\big\langle\bar\partial(1/f),\psi\,df\big\rangle &= \Big[\frac{\lambda}{2i\pi}\int_U \psi|f|^{2\lambda}\,\frac{\bar\partial\bar f}{\bar f}\wedge\frac{df}{f}\Big]_{\lambda=0} = \\ &= \Big[\int_U \psi\frac{dd^c|f|^{2\lambda}}{\lambda}\Big]_{\lambda=0} = \Big[\int_U \frac{|f|^{2\lambda}}{\lambda}\,dd^c\psi\Big]_{\lambda=0} = \big\langle[\mathrm{div}(f)],\psi\big\rangle\end{aligned}$$

d'après la proposition 1.6. Ceci prouve encore dans ce second cas la formule (1.48) (au sens des courants dans U). Il reste à prouver l'implication réciproque dans la seconde propriété exigée de $\bar\partial(1/f)$, à savoir que si $h\in H(U)$ vérifie $h\,\bar\partial(1/f)=0$ au sens des courants dans U, alors h appartient à l'idéal principal engendré par f, ce qui revient à dire ici que $\nu_\alpha(h)$ (la valuation de h dans l'anneau local $\mathcal{O}_\alpha$) est supérieure ou égale à μ_α. Pour cela, voici comment on procède : on peut associer à toute fonction ψ de classe C^∞ dans U la partie « holomorphe » de son développement de Taylor (exprimé en termes de $z-\alpha$ et $\bar z-\bar\alpha$) en α :

$$T_\alpha[\psi]=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\psi;\alpha)\,(X-\alpha)^k\in\mathbb{C}[[X-\alpha]]\ ;$$

il s'agit ici d'une série formelle en $X - \alpha$ car il n'y a aucune raison pour que le rayon de convergence soit strictement positif puisque ψ est seulement C^∞ et non nécessairement analytique comme fonction de deux variables réelles au voisinage de $(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Im}\alpha)$. On a

$$a_k(\psi;\alpha) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \psi}{\partial z^k}(\alpha) = \lim_{r\to 0}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\alpha + re^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\theta\Big) \ ;$$

la seconde interprétation ci-dessus (relevant de l'interprétation en termes d'analyse de Fourier) cache ici [1] la « division » par $k!$ dans l'expression naturelle de $a_k(\psi;\alpha)$ comme coefficient de Taylor. On observe que l'on a

$$\big\langle \bar\partial(1/f), \psi\, dz\big\rangle = \operatorname{Res}_\alpha\Big[\frac{T_\alpha[\psi]}{f_\alpha}\, d(X-\alpha)\Big]$$

où $f_\alpha \in \mathbb{C}[[X-\alpha]]$ désigne la série (formelle) de Taylor de f en α, le quotient $T_\alpha[\psi]/f_\alpha$ étant considéré dans le corps des fractions de $\mathbb{C}[[X-\alpha]]$, c'est-à-dire le corps des séries de Laurent formelles en $z-\alpha$. Si $h \in H(U)$, dire que $h\,\bar\partial(1/f) = 0$ dans U implique donc que tous les coefficients de Laurent $a_k(h/f;\alpha)$ abec $k < 0$ sont nuls, donc que $h \in (f)$. $\square$

Remarque 1.10. On retiendra la formule globale (« analytico-algébrique ») dans U :

$$\big\langle \bar\partial(1/f), \psi(z)\, dz\big\rangle = \sum_{\{\alpha\in U\,;\, f(\alpha)=0\}} \operatorname{Res}_\alpha\Big[\frac{T_\alpha[\psi]}{f_\alpha}\, d(X-\alpha)\Big] \tag{1.51}$$

(f étant une fonction holomorphe non identiquement nulle dans le domaine U de $\mathbb{C}$). Le membre de gauche de cette formule est un objet *analytique*, tandis que le membre de droite est un objet *algébrique*. Ceci est à rapprocher de la formule de Lelong-Poincaré (1.6) où le membre de gauche implique encore un objet *analytique* (le courant $[\log|f|^2]$) tandis que le membre de gauche ($[\operatorname{div}(f)]$) est un objet cette fois *géométrique*.

1.5.2. Le cadre des ouverts de $\mathbb{C}^n$

Dans cette section, U désignera un domaine (*i.e.* ouvert connexe) de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction méromorphe dans U. Les fonctions holomorphes dans U constituent un anneau intègre $H(U)$, le corps des fractions étant le corps $M(U)$ des fonctions *méromorphes* dans U.

Dans le cas $n = 1$, un important théorème de Weierstraß assure que le corps des fonctions méromorphes dans un ouvert de U est exactement l'ensemble des fonctions de U dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'exprimant dans U sous la forme $f_{\rm num}/f_{\rm pol}$, où $f_{\rm num}$ et $f_{\rm pol}$ sont des fonctions holomorphes dans U. Ceci est faux lorsque $n > 1$ pour un domaine U quelconque de $\mathbb{C}^n$. On ne peut dire dans ce cadre multi-variables que la chose suivante : les fonctions *méromorphes dans U sont les fonctions qui s'expriment au voisinage de tout point z de U comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans ce voisinage, le dénominateur local n'y étant jamais identiquement nul.*

---

1. Ce qui se révélera important pour la transcription ultérieure en algèbre ou théorie des nombres, en particulier si l'on travaille en caractéristique positive.

Dans cette section, nous allons associer un courant $[\mathrm{div} f]$ de bi-degré $(1,1)$ à une fonction méromorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Pour définir ce courant, nous utiliserons dans un premier temps le fait que la fonction $\log|f|^2$ est localement intégrable dans U (cela résultera du lemme 1.1 ci-dessous, que l'on admet pour l'instant). On définit donc un $(1,1)$-courant dans U en posant

$$T = dd^c \log|f|^2.$$

Au voisinage d'un point où f est holomorphe et ne s'annule pas, on a $T = 0$ car

$$dd^c \log|f|^2 = dd^c \log f\bar{f} = \frac{i}{2\pi}\partial\Big[\frac{\bar{\partial}\bar{f}}{\bar{f}}\Big] = 0$$

dans un tel voisinage. Il suffit donc, pour calculer l'action du courant T sur une forme-test appartenant à $\mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(U,\mathbb{C})$, de se placer au voisinage d'un point z_0 de dans lequel $f = f_{\mathrm{num}}/f_{\mathrm{pol}}$ avec soit $f_{\mathrm{num}}(z_0) = 0$, soit $f_{\mathrm{pol}}(z_0) = 0$, les deux fonctions f_{num} et f_{pol} étant toutes deux holomorphes dans un voisinage V_{z_0} de z_0. On remarque que, dans V_{z_0},

$$[\log|f|^2] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\big([\log(|f_{\mathrm{num}}|^2+\epsilon)] - [\log(|f_{\mathrm{pol}}|^2+\epsilon)]\big)$$

(au sens des courants dans V_{z_0}) d'après le théorème de convergence monotone en théorie de l'intégration de Lebesgue. On a donc, toujours dans V_{z_0}, la limite étant à prendre au sens des courants,

$$dd^c \log|f|^2 = \lim_{\epsilon\to 0^+}\big([dd^c([\log(|f_{\mathrm{num}}|^2+\epsilon)]) - dd^c([\log(|f_{\mathrm{pol}}|^2+\epsilon)])\big).$$

Or, un calcul algébrique facile montre que :

$$\begin{aligned} dd^c([\log(|f_{\mathrm{num}}|^2+\epsilon)]) &= \frac{1}{2i\pi}\Big[\epsilon\,\frac{\bar{\partial}\bar{f}_{\mathrm{num}}\wedge\partial f_{\mathrm{num}}}{(|f_{\mathrm{num}}|^2+\epsilon)^2}\Big] \\ dd^c([\log(|f_{\mathrm{pol}}|^2+\epsilon)]) &= \frac{1}{2i\pi}\Big[\epsilon\,\frac{\bar{\partial}\bar{f}_{\mathrm{pol}}\wedge\partial f_{\mathrm{pol}}}{(|f_{\mathrm{pol}}|^2+\epsilon)^2}\Big]. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Les deux courants $dd^c\log|f_{\mathrm{num}}|^2$ et $dd^c\log|f_{\mathrm{pol}}|^2$ ont ainsi la particularité d'être des courants positifs, donc des formes-différentielles à coefficients-mesures d'après la proposition 1.5, comme l'est donc $dd^c\log|f|^2$.
Voici maintenant un lemme capital relatif à la description locale des sous-ensembles définis comme lieux des zéros d'une fonction holomorphe de n variables dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Ce lemme se substitue dans le cadre multi-variables au célèbre *principe des zéros isolés*, principe qui est en défaut dans le champ de l'analyse complexe en plusieurs variables. On peut voir le lemme suivant comme une manière de contourner les difficultés que l'absence de ce principe entraîne. Il s'agit d'un lemme capital, qui nous permettra ultérieurement de décrire localement (ou globalement dans le cas algébrique) les sous-ensembles fermés d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ définis comme le lieux des zéros d'un nombre fini de fonctions holomorphes (ou polynomiales dans le cadre algébrique).

LEMME 1.1 (lemme de préparation de Weierstraß). *Soit $f\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\setminus\{0\}$ un germe non nul de fonction holomorphe à l'origine tel que $f(0,...,0)=0$,*

$$f(z_1,...,z_n) = A(f;\nu_0(f))(z_1,...,z_n) + \sum_{k=\nu_0(f)+1}^{\infty} A(f;k)(z_1,...,z_n)$$

où $A(f;k)$ est un polynôme homogène de degré k (la composante homogène de degré k dans le développement de Taylor en $z_1,...,z_n$ à l'origine[1]) et $\nu_0(f)\in\mathbb{N}^*$ désigne la multiplicité d'annulation de f en $(0,...,0)$. Si $G\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est une matrice à coefficients génériques, on peut exprimer la fonction $w\mapsto f(G\cdot w)$ holomorphe[2] au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ sous la forme :

$$f(G\cdot w)=u(w_1,...,w_n)\prod_{j=1}^{M}\Big(w_n^{\nu_{j,0}(f)}+\sum_{\ell_j=1}^{\nu_{j,0}(f)} g_{j,\ell_j}(w_1,..,w_{n-1})\,w_n^{\nu_{j,0}(f)-\ell_j}\Big)^{m_j} \tag{1.53}$$

où :

- *u est une fonction holomorphe et ne s'annulant pas au voisinage de l'origine ;*
- *les entiers strictement positifs $\nu_{j,0}(f)$ et m_j (pour $j=1,...,M$) sont tels que la somme $\sum_{j=1}^M m_j\nu_{j,0}(f)$ est égale à $\nu_0(f)$;*
- *les fonctions g_{j,ℓ_j} ($j=1,...,M$, $\ell_j=1,...,\nu_{j,0}(f)$) sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(0,...,0)$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$ avec $\nu_0(g_{j,\ell_j})\geq \ell_j$ pour tout $j=1,...,M$, pour tout $\ell_j=1,...,\nu_{j,0}(f)$;*
- *pour chaque $j=1,...,M$, le discriminant[3] du polynôme*
$$P_j(X)=X^{\nu_{j,0}(f)}+\sum_{\ell_j=1}^{\nu_{j,0}(f)} g_{j,\ell_j}\,X^{\nu_{j,0}(f)-\ell_j}\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[X]$$
est un germe $(w_1,...,w_{n-1})\to\delta_j(w_1,...,w_{n-1})$ de fonction holomorphe non identiquement nulle au voisinage de l'origine.

La fonction u et les fonctions g_{j,ℓ_j} dépendent de la transformation linéaire générique G, mais par contre ni M ni les entiers $\nu_{j,0}(f)$ et m_j pour $j=1,...,M$ n'en dépendent.

Démonstration. Les arguments sur lesquels se base la preuve de ce théorème reposent sur l'*algèbre commutative* d'une part[4], sur l'*analyse complexe en une variable* (voir par exemple [**YanC**]) d'autre part.

Commençons par ce qui relève de l'algèbre commutative. Un *germe Y d'hypersurface analytique*[5] *à l'origine de $\mathbb{C}^n$ est* par définition le germe en $(0,...,0)$ du sous-ensemble

1. C'est-à-dire
$$A(f;k)(z_1,...,z_n):=\sum_{\substack{\kappa_1,\dots,\kappa_n\in\mathbb{N}^n\\ \kappa_1+\cdots+\kappa_n=k}}\frac{\partial^k f}{\partial z_1^{\kappa_1}\dots\partial z_n^{\kappa_n}}(0,...,0)\prod_{\ell=1}^{n}\frac{z_j^{\kappa_j}}{\kappa_j!}=\sum_{\substack{\kappa\in\mathbb{N}^n\\ |\kappa|=k}} D_z^\kappa[f](0,...,0)\,\frac{z^\kappa}{\kappa!}$$
(en abrégé).

2. Cela revient juste à effectuer ici le changement linéaire de variables $z=G\cdot w$.

3. C'est-à-dire le résultant de Sylvester (comme polynômes en X à coefficients dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[X]$) des deux polynômes P_j et dP_j/dX.

4. Pour un rappel des bases essentielles d'algèbre commutative dans des anneaux nœthériens comme $\mathbb{K}[X_1,...,X_n]$ ($\mathbb{K}$ corps commutatif en général algébriquement clos) ou, comme ici, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, vous pouvez consulter les notes du cours de M2 dispensé à Brazzaville, voir le chapitre 1 de [**YBraz**]. Le livre de base reste à mon avis le livre de David Eisenbud [**Eis**]. Certains pourront lui préférer [**CLO1**], d'approche plus directe et plus ≪ algorithmique ≫, ce qui facilite la lecture.

5. Plus généralement, un *germe (à l'origine de $\mathbb{C}^n$) d'ensemble analytique irréductible* est le lieu des zéros communs à un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. On dispose aussi de la notion de *germe de sous-ensemble analytique irréductible* (même définition que pour les germes d'hypersurfaces). Le fait que l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ soit nœthérien implique encore que tout germe Y de sous-ensemble analytique irréductible est union d'au plus un nombre fini de germes de sous-ensembles analytiques irréductibles.

fermé défini au voisinage de $(0,...,0)$ comme le lieu des zéros d'un élément f de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$; un tel germe Y est dit *irréductible* si et seulement il ne peut s'écrire comme union $Y = Y_1 \cup Y_2$ de deux germes d'hypersurfaces analytiques Y_1 et Y_2 tels que l'un des deux au moins soit strictement inclus dans Y. Le fait que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ soit une anneau local nœthérien implique que tout germe d'hypersurface analytique à l'origine s'écrit comme union finie de germes d'hypersurfaces analytiques irréductibles. Ici on a donc $\{f = 0\} = Y_1 \cup \cdots \cup Y_M$ où les germes d'hypersurface Y_j sont irréductibles. Dire que Y_j est irréductible équivaut à dire que l'idéal $I(Y_j) = \{h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\,;\, h = 0 \text{ sur } Y_j\}$ est un idéal *premier* principal de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, engendré par un élément f_j irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. D'après *le théorème des zéros de Hilbert*, dire que h est un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ayant exactement pour ensemble de zéros $Y = \{f = 0\}$ équivaut à dire qu'il existe un élément inversible $u_{h,0}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ et des entiers $m_{h,1}$,..., $m_{h,M}$ tels que $h = u_{h,0} f_1^{m_{h,1}} \dots f_M^{m_{h,M}}$. En particulier, il existe un élément u_0 inversible de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ et des entiers strictement positifs $m_1,...,m_M$ tels que $f = u f_1^{m_1} \dots f_M^{m_M}$.

Pour définir le changement de base générique G, on considère une matrice inversible dont la dernière colonne est constituée d'un vecteur $(t_1,...,t_n)$ tel que

$$A(f, \nu_0(f))(t_1,...,t_n) = \prod_{j=1}^{n} \big[A(f_j, \nu_0(f_j))(t_1,...,t_n)\big]^{q_j} \neq 0.$$

(les nombres complexes $t_1,...,t_n$ peuvent être choisis génériques, ainsi bien sûr que les coordonnées des $n-1$ premiers vecteurs-colonnes de la matrice G). On posera à partir de maintenant $\tilde{f}_j(w) := f_j(G \cdot w)$ et $\tilde{f}(w) := f(G \cdot w) = u_0(G \cdot w) \prod_{j=1}^{M} f_j^{q_j}(G \cdot w)$. On note alors que, pour tout $j = 1,...,M$, on a au voisinage de $w_n = 0$ dans $\mathbb{C}$

$$\tilde{f}_j(0,...0,w_n) = w_n^{\nu_0(f_j)} \eta_j(w_n) \quad \text{avec } \eta_j(0) \neq 0.$$

Il existe donc, pour chaque $j = 1,...,M$, un nombre $r_j > 0$ tel que 0 soit le seul zéro de $\zeta \mapsto \tilde{f}_j(0,...,0,\zeta)$ dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r_j. D'après le théorème de Rouché (voir par exemple [**YanC**], section 3.2.5 [1]), il existe aussi, pour chaque $j = 1,...,M$, un nombre $\rho_j > 0$ tel que, pour tout $j = 1,...,M$,

$$\|(w_1,...,w_{n-1})\| < \rho_j \Longrightarrow \#\big[D(0,r_j) \cap \{\zeta \in \mathbb{C}\,;\, \tilde{f}_j(w_1,...,w_{n-1},\zeta) = 0\}\big] = \nu_0(f_j),$$

les zéros étant ici comptés avec leurs multiplicités ; de plus $\zeta \mapsto \tilde{f}_j(w_1,...,w_{n-1},\zeta)$ ne s'annule pas sur le cercle $\{|\zeta| = \rho_j\}$. Grâce à la formule des résidus, on constate que les sommes de Newton $S_{j,1},...,S_{j,\nu_0(f_j)}$ des $\nu_0(f_j)$ zéros de $\zeta \mapsto \tilde{f}_j(w_1,...,w_{n-1},\zeta)$ dans $D(0,r_j)$ sont des fonctions holomorphes de $(w_1,...,w_{n-1})$ dans la boule ouverte $\{\|(w_1,...,w_{n-1}\| < \rho_j\}$ de $\mathbb{C}^{n-1}$. On a effet, pour tout indice $j = 1,...,M$, pour tout entier $\ell = 1,...,\nu_0(f_j)$,

$$S_{j,\ell}(w_1,...,w_{n-1}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_j}} \zeta^\ell \, \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial \zeta}(w_1,...,w_{n-1},\zeta) \, \frac{d\zeta}{\tilde{f}_j(w_1,...,w_{n-1},\zeta)},$$

Dire que Y_j est irrédutible équivaut à dire que l'idéal $I(Y_j) = \{h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}\,;\, h = 0 \text{ sur } Y_j\}$ est un idéal premier de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$.

1. Tout ce qui suit reprend en fait le raisonnement fait dans l'exercice 3.26 de [**YanC**] dans le cas $n = 2$. Vous pouvez vous reporter cet exercice et consulter son corrigé détaillé dans la section 3.5 du même ouvrage. Les cas $n = 2$ ou $n > 2$ ne sont en effet pas de ce point de vue essentiellement différents.

où $\gamma_{r_j} \ : t \in [0,1] \longmapsto r_j e^{2i\pi t}$. Les fonctions symétriques $\sigma_{j,\ell}$ ($\ell = 1, ..., \nu_0(f_j)$) de ces mêmes zéros sont donc, d'après les formules de Newton reliant les fonctions symétriques élémentaires aux sommes de Newton, elles aussi des fonctions holomorphes de $w_1, ..., w_{n-1}$ dans la boule $\{\|(w_1, ..., w_{n-1})\| < \rho_j\}$. Il reste à vérifier que la fonction

$$(w_1, ..., w_n) \longmapsto \frac{\tilde{f}(w_1, ..., w_n)}{\prod_{j=1}^{M} \big(w_n^{\nu_0(f_j)} + \sum_{\ell_j=1}^{\nu_0(f_j)} (-1)^{\ell_j} \sigma_{j,\ell_j}(w_1, ..., w_{n-1}) w_n^{\nu_0(f_j)-\ell_j}\big)^{m_j}}$$

(qui par construction ne s'annule pas au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$) est une fonction séparément holomorphe en chacune des variables w_1,...,w_n et de plus bornée en module comme fonction de toutes ces variables prises ensemble. Le fait qu'il s'agisse d'une fonction séparément holomorphe en w_1,...,w_{n-1} est acquis par construction. Grâce au principe du maximum [1], on voit que cette fonction est bornée en module au voisinage de $(0, ..., 0)$. Grâce enfin au théorème de Riemann qui assure que toute fonction holomorphe d'une variable définie et bornée dans un ouvert privé d'un point se prolonge en une fonction holomorphe dans tout l'ouvert (en particulier au point litigieux), on montre que la fonction considérée est aussi séparément holomorphe en w_n. Cette fonction est donc bien une fonction holomorphe en les variables $(w_1, ..., w_n)$, qui de plus ne s'annule pas au voisinage de l'origine ; on la notera comme dans l'énoncé du lemme $(w_1, ..., w_n) \mapsto u(w_1, ..., w_n)$. On obtient bien ainsi la représentation (1.53). La dernière assertion concernant la non nullité des déterminants δ_j provient du fait que les polynômes P_j, $j = 1, ..., M$, sont irréductibles comme polynômes à coefficients dans le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}$ (en effet les idéaux principaux $(\tilde{f}_j)$, $j = 1, ..., M$, sont, comme le sont les idéaux (f_j) dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_z,0}$, premiers dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_w,0}$). $\square$

Le lemme de préparation de Weierstraß 1.1 justifie, étant donnée une fonction méromorphe f non identiquement nulle dans un domaine U de $\mathbb{C}^n$, la construction d'un courant appelé à jouer un rôle important, le *courant d'intégration avec multiplicité* $[\mathrm{div}(f)]$. Il s'agit d'un $(1,1)$-courant dans U, que l'on peut définir au voisinage d'un point z_0 de U (ceci suffit puisque l'on dispose du lemme de partition de l'unité, à savoir la proposition 1.1) au terme des cinq observations suivantes.

(1) On exprime le germe de f en $z_0 \in U$ sous la forme $f = f_{\mathrm{num}}/f_{\mathrm{den}}$, où f_{num} et f_{den} sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z_0}$ différents de 0.

(2) Quitte à faire un changement affine $z - z_0 = G \cdot (w - z_0)$ de coordonnées, on peut supposer que $\tilde{f}_{\mathrm{num}} = f_{\mathrm{num}}(G \cdot w)$ et $\tilde{f}_{\mathrm{den}} = f_{\mathrm{den}}(G \cdot w)$ sont de la forme (1.53) (on met le produit $f_{\mathrm{num}}(G \cdot w) f_{\mathrm{den}}(G \cdot w)$ sous cette forme et les deux facteurs le sont alors).

(3) On observe que les applications

$$\pi_{|\{\tilde{f}_{\mathrm{num}}=0\}} \ : w \longmapsto (w_1, ..., w_{n-1}), \quad \pi_{|\{\tilde{f}_{\mathrm{den}}=0\}} \ : w \longmapsto (w_1, ..., w_{n-1})$$

sont des applications propres dans un voisinage V_{z_0} de z_0 dans U.

1. Pour plus de détails, consultez le corrigé de l'exercice 3.26 dans [**YanC**].

(4) On note enfin que si $\tilde{H}_{z_0} = \{w \in V_{z_0}\,;\, \tilde{\delta}_{\rm num}\tilde{\delta}_{\rm den} = 0\}$ (où $\tilde{\delta}_{\rm num}$ désigne le produit des $\tilde{\delta}_j$ correspondant à $\tilde{f}_{\rm num}$, $\tilde{\delta}_{\rm den}$ celui des $\tilde{\delta}_j$ correspondant à $\tilde{f}_{\rm den}$), alors les ensembles

$$\pi^{-1}_{|\{\tilde{f}_{\rm num}=0\}}(V_{z_0} \setminus \tilde{H}_{z_0}), \quad \pi^{-1}_{|\{\tilde{f}_{\rm den}=0\}}(V_{z_0} \setminus \tilde{H}_{z_0})$$

sont des sous-variétés analytiques de $\mathbb{C}^n$ de dimension (complexe) $n-1$ constituées chacune respectivement de $\nu_{z_0}(f_{\rm num})$ ou $\nu_{z_0}(f_{\rm den})$ feuillets (composantes connexes disjointes) [1].

(5) On définit enfin l'action du courant $[{\rm div}(f)]$ dans V_{z_0} par

$$\begin{aligned}\big\langle [{\rm div}(f)], \varphi \big\rangle := & \sum_{j=1}^{M_{\rm num}} m_{{\rm num},j} \int_{(V_{z_0}\setminus \tilde{H}_{z_0})\cap\{\tilde{f}_{{\rm num},j}=0\}} \varphi(z_0 + G\cdot(w-z_0)) \\ & - \sum_{j=1}^{M_{\rm den}} m_{{\rm den},j} \int_{(V_{z_0}\setminus \tilde{H}_{z_0})\cap\{\tilde{f}_{{\rm den},j}=0\}} \varphi(z_0 + G\cdot(w-z_0))\end{aligned} \tag{1.54}$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}^{(n-1,n-1)}(V_{z_0}, \mathbb{C})$;

les deux intégrales que l'on soustrait ci sont en effet bien convergentes car les images réciproques respectivement par $\pi_{|\{\tilde{f}_{\rm num}=0\}}$ et $\pi_{|\{\tilde{f}_{\rm den}=0\}}$ de $\tilde{H}_{z_0}$ sont des sous-ensembles respectivement de $\{\tilde{f}_{\rm num} = 0\}$ et $\{\tilde{f}_{\rm den} = 0\}$ de mesure de Lebesgue $2(n-1)$-dimensionnelle nulle.

On peut alors énoncer le théorème majeur suivant :

THEORÈME 1.2 (formule de Lelong-Poincaré dans un domaine de $\mathbb{C}^n$). *Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle dans un domaine de $\mathbb{C}^n$. On a, au sens des courants dans U, la relation*

$$dd^c\big[-\log|f|^2\big] + \big[{\rm div}(f)\big] = 0. \tag{1.55}$$

Cette relation relie un objet analytique (le courant $[-\log|f|^2]$, dit aussi courant de Green associé au diviseur principal ${\rm div}(f)$*) à un objet géométrique (le diviseur principal* ${\rm div}(f)$ *lui-même).*

DÉMONSTRATION. Les deux courants $[dd^c \log|f|^2]$ et $[{\rm div}(f)]$ sont deux courants de bi-degré (p,p) à coefficients-mesures dans l'ouvert U, ce qui signifie qu'ils s'expriment tous les deux au voisinage d'un point $z_0 \in U$ comme des (p,p)-formes différentielles à coefficients-mesures de Radon complexes.

De plus, le courant $dd^c[\log|f|^2]$ est un courant d-fermé (donc ∂-fermé ainsi que $\bar\partial$-fermé puisqu'il est de bi-degré pur (p,p)) car, dans un voisinage ouvert U_{z_0} d'un point z_0 de U dans lequel f se représente sous la forme $f = f_{\rm num}/f_{\rm den}$),

$$\begin{aligned}&\big\langle ([dd^c \log(|f_{\rm num}|^2+\epsilon)] - dd^c[\log(|f_{\rm den}|^2+\epsilon)]\,,\, \partial\varphi\big\rangle \\ &= \big\langle [dd^c \log(|f_{\rm num}|^2+\epsilon)] - dd^c[\log(|f_{\rm den}|^2+\epsilon)], \partial\psi\big\rangle = 0\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-p-1,n-p)}(U_{z_0},\mathbb{C})$, pour tout $\psi \in \mathcal{D}^{(n-p,n-p+1)}(U_{z_0},\mathbb{C})$ et pour tout $\epsilon > 0$ d'après la formule de Stokes ; en faisant tendre $\epsilon > 0$ vers 0, on obtient

1. On dit aussi que ces applications réalisent des revêtements respectivement à $\nu_{z_0}(f_{\rm num})$ et $\nu_{z_0}(f_{\rm den})$ feuillets au dessus de $V_{z_0} \setminus \tilde{H}_{z_0}$.

bien que le courant « limite » $dd^c[\log|f|^2]$ est un courant ∂ et $\bar{\partial}$-fermé. Pour voir que le courant $[\mathrm{div}(f)]$ est aussi un courant ∂ et $\bar{\partial}$-fermé, on raisonne (toujours dans le voisinage ouvert U_{z_0} de z_0) séparément avec f_{num} et f_{den}. On peut se limiter à supposer que les germes de f_{num} et f_{den} sont irréductibles. Raisonnons par exemple avec f_{num}. Si $\varphi \in \mathcal{D}^{(n-p-1,n-p)}(U_{z_0},\mathbb{C})$, on a

$$\langle [\mathrm{div}(f)], \varphi\rangle = \lim_{\eta\to 0_+} \int_{\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|\geq \eta\}} \partial\varphi.$$

De même, si $\psi \in \mathcal{D}^{(n-p,n-p-1)}(U,\mathbb{C})$, on a

$$\langle [\mathrm{div}(f)], \varphi\rangle = \lim_{\eta\to 0_+} \int_{\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2\geq \eta\}} \bar{\partial}\psi.$$

Ces deux faits résultent du théorème de convergence dominée de Lebesgue. On observe que $\{z \in U_{z_0}\,;\, f_{\mathrm{num}} = 0,\ |\delta_{\mathrm{num}}|^2 > 0\}$ est une variété analytique complexe $\mathscr{X}_{z_0}$ de dimension (complexe) $n-1$ (donc réelle $p = 2(n-1)$) et qu'il existe une suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ telle que η_k ne soit pas valeur critique de la restriction de $|\delta_{\mathrm{num}}|^2$ à cette variété [1]. En utilisant alors la formule de Stokes, on obtient

$$\langle [\mathrm{div}(f)], \varphi\rangle = -\lim_{\eta\to 0_+} \int_{\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2= \eta\}} \varphi = 0$$

et

$$\langle [\mathrm{div}(f)], \varphi\rangle = -\lim_{\eta\to 0_+} \int_{\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2= \eta\}} \psi = 0.$$

L'orientation de $\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2 = \eta\}$ est ici celle induite par la normale pointant dans la direction $\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2 > \eta\}$. Les deux égalités ci-dessus résultent de la formule de Stokes sur la variété différentiable réelle sous-jacente à $\mathscr{X}_{z_0}$. La mesure $(2(n-1)-1)$-dimensionnelle des ensembles

$$\mathrm{supp}(\varphi)\cap\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2=\eta\},\quad \mathrm{supp}(\psi)\cap\{f_{\mathrm{num}}=0\}\cap\{|\delta_{\mathrm{num}}|^2=\eta\}$$

tend en effet vers 0 lorsque η tend vers 0.

Le courant $T = [-dd^c\log|f|^2] + [\mathrm{div}(f)]$ est donc un courant d-fermé à coefficients mesures. Ce courant est identiquement nul au voisinage d'un point z_0 de U où la fonction méromorphe f ne présente ni zéro ni pôle. Au voisinage d'un point z_0 où soit f_{num}, soit f_{den} (numérateur et dénominateur locaux de f) s'annulent, on vérifie que le courant T est nul dans un voisinage de z_0 privé des germes d'ensembles analytiques $\{\delta_{\mathrm{num}} = 0\}$, $\{\delta_{\mathrm{den}} = 0\}$; au voisinage z d'un tel point, ne passe en effet qu'au plus l'un des deux ensembles $\{f_{\mathrm{num}} = 0\}$ ou $\{f_{\mathrm{den}} = 0\}$ pourvu que l'expression $f = f_{\mathrm{num}}/f_{\mathrm{den}}$ de f au voisinage de z_0 soit supposée réduite, ce que nous supposerons ; quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que le seul facteur irréductible $f_{\mathrm{num},j}$ ou $f_{\mathrm{den},j}$ s'annulant en z s'exprime en coordonnées locales comme w_1. Le fait que T soit nul au voisinage de z résulte alors de la formule de Lelong-Poincaré dans le

---

1. Cela résulte d'un important résultat de géométrie différentielle, le *lemme de Sard* : l'ensemble des *valeurs critiques* d'une application C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à dire les valeurs des points critiques, *i.e.* des points où le rang de la matrice jacobienne est strictement inférieur à p) est de mesure de Lebesgue n-dimensionnelle nulle ; ici $p = 2(n-1)$ et $n = 1$; il est donc aisé d'« éviter » ces valeurs critiques, ce que l'on fait ici avec la suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ de nombres strictement positifs approchant 0.

cas $n = 1$ (proposition 1.6), couplée avec le théorème de Fubini. Le courant T est donc supporté par un sous-ensemble analytique (ici défini comme lieu des zéros des deux germes des deux fonctions holormorphes $f_{\rm num} f_{\rm den}$ et $\delta_{\rm num}\delta_{\rm den}$ au voisinage de z_0) dont la dimension est au plus $n-2$. Hors du sous-ensemble fermé de ses points singuliers, un tel ensemble se présente comme une union Σ de variétés différentielles complexes deux-à-deux disjointes de dimension $n-2$; au voisinage d'un point z de Σ, il est défini comme le lieu des zéros de deux fonctions $g_{z,1}$ et $g_{z,2}$ telles que $dg_{z,1} \wedge dg_{z,2} \neq 0$ sur $\{g_{z,1} = g_{z,2} = 0\}$. Notons que $dg_{z,k} \wedge T = d[g_{z,k}T] - g_{z,k} kdT = d[g_{z,k}T]$ pour $k = 1, 2$ puisque T est à coefficients mesures (de support dans $\{g_{z,1} = g_{z,2} = 0\}$). Complétons $dg_{z,1}, dg_{z,2}$ en un repère $\{dg_{z,1}, dg_{z,2}, dg_{z,3}, ..., dg_{z,n}\}$ du fibré cotangent holomorphe au voisinage du point z. Exprimée dans ce repère, toute $(n-1, n-1)$-forme-test C^∞ à support compact φ au voisinage de z s'exprime nécessairement sous la forme $\varphi = dg_{z,1} \wedge \omega_{z,1} + dg_{z,2} \wedge \omega_{z,2}$, où $\omega_{z,1}$ et ω_{z_2} sont des $(n-2, n-1)$-formes-test C^∞ à support compact. Comme $dg_{1,z} \wedge T = 0$ et $dg_{2,z} \wedge T = 0$, il vient $\varphi \wedge T = T \wedge \varphi = 0$. On conclut ainsi que l'action du courant T coïncide avec l'action du courant nul au voisinage de tout point de Σ. Le support de T est donc inclus dans l'ensemble des points singuliers de l'ensemble défini comme le lieu des zéros communs de $f_{\rm num} f_{\rm den}$ et $\delta_{\rm num}\delta_{\rm den}$ au voisinage de z_0 (cet ensemble est de dimension complexe $n-3$). On poursuit ainsi, montrant que le support de T est nécessairement inclus dans le lieu des points singuliers de cet ensemble, c'est-à dire dans un sous-ensemble analytique de dimension $n-4$. En continuant de la sorte, on vérifie bien qu'en fait $T \equiv 0$, ce qui correspond à la formulation de la formule de Lelong-Poincaré (1.55). $\square$

1.6. La formule de Lelong-Poincaré dans le contexte géométrique

1.6.1. Connexion sur un $\mathbb{C}$-fibré au dessus d'une variété analytique complexe

Dans toute cette sous-section, $\mathscr{X}$ désignera une variété analytique complexe, mais nous n'utiliserons en fait pas encore ici cette structure complexe. Toute ce qui y est fait pour l'instant se transpose sans difficulté au cas des $\mathbb{K}$-fibrés sur une variété différentielle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous n'exploiterons vraiment la structure complexe que dans la sous-section suivante.

Si $E \to \mathscr{X}$ est un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial et de rang m, il faut s'octroyer une possibilité de « différentier » les sections de E pour pouvoir introduire les complexes de de Rham ou de Dolbeault $C^{\infty,\bullet}(\mathscr{U}, E)$ ou $\mathcal{D}^\bullet(\mathscr{U}, E)$, $C^{\infty,\bullet,\bullet}(\mathscr{U}, E)$ ou ${}'\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}(\mathscr{U}, E)$ ($\mathscr{U}$ ouvert de $\mathscr{X}$), à valeurs cette fois dans le fibré E et non plus seulement dans le fibré trivial $\mathbb{C} = \mathscr{X} \times \mathbb{C}$ (voir la section 1.4.3). Conformément à la règle de Leibniz, nous introduirons pour cela une application $\mathbb{C}$-linéaire D

$$D\ : C^{\infty,0}(\mathscr{X}, E) \to C^{\infty,1}(\mathscr{X}, E).$$

Cette règle conditionnera ensuite une « promenade » dans la gamme des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $C^{\infty,k}(\mathscr{U}, E)$ ou ${}'\mathcal{D}^k(\mathscr{U}, E)$ ($\mathscr{U}$ étant un ouvert de $\mathscr{X}$, k variant de 0 à $2n$) suivant les règles suivantes (en cascade).

— Tout d'abord, si f est une fonction C^∞ de $\mathscr{U}$ dans $\mathbb{C}$ ou T une distribution sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (cette fonction ou cette distribution peuvent être localisées par partition de l'unité dans un ouvert u au dessus duquel existe un repère pour

E et dans lequel on dispose de coordonnées locales réelle $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$), il convient, si l'on souhaite respecter la règle de Leibniz, de définir l'action de $D = D_0$ au cran 0 en respectant la règle

$$D[f \otimes e] = df \otimes e + f\, D[e], \qquad D[T \otimes e] = dT \otimes e + T\, D[e]$$

pour toute section e de E au dessus de l'ouvert $\mathscr{U}$.

— Si l'action de

$$D = D_{k-1} \ : C^{\infty,k-1}(\mathscr{U}, E) \text{ ou } {}'\mathcal{D}^{k-1}(\mathscr{U}, E) \longrightarrow C^{\infty,k}(\mathscr{U}, E) \text{ ou } {}'\mathcal{D}^{k}(\mathscr{U}, E)$$

(pour $k \in \mathbb{N}^*$) a été définie, on définit l'action de

$$D = D_k \ : C^{\infty,k}(\mathscr{U}, E) \text{ ou } {}'\mathcal{D}^{k}(\mathscr{U}, E) \longrightarrow C^{\infty,k+1}(\mathscr{U}, E) \text{ ou } {}'\mathcal{D}^{k+1}(\mathscr{U}, E)$$

en posant :

$$D_k[\omega \wedge \omega_{k-1}] = d\omega \wedge \omega_{k-1} - \omega \wedge D_{k-1}[\omega_{k-1}]$$

pour tout élément ω_{k-1} de $C^{\infty,k-1}(\mathscr{U}, E)$ (respectivement de ${}'\mathcal{D}^{k-1}(\mathscr{U}, E)$), pour tout élément ω de $C^{\infty,1}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$ (respectivement de ${}'\mathcal{D}^{1}(\mathscr{U}, \mathbb{C})$).

On a donc au final les règles calculatoires suivantes :

(1.56)

$$\forall\, \omega \in C^{\infty,\ell}(\mathscr{U}, \mathbb{C}), \quad \forall\, s \in C^{\infty,k}(\mathscr{U}, E)$$

$$D[\omega \wedge s] = D_{\ell+k}[\omega \wedge s] = d\omega \wedge s + (-1)^{\ell}\, \omega \wedge D_k[s] = d\omega \wedge s + (-1)^{\ell}\, \omega \wedge D[s]$$

et

(1.57)

$$\forall\, T \in {}'\mathcal{D}^{\ell}(\mathscr{U}, \mathbb{C}), \quad \forall\, s \in {}'\mathcal{D}^{k}(\mathscr{U}, E)$$

$$D[T \wedge s] = D_{\ell+k}[T \wedge s] = dT \wedge s + (-1)^{\ell}\, T \wedge D_k[s] = dT \wedge s + (-1)^{\ell}\, T \wedge D[s].$$

pour tout choix des entiers k, ℓ tels que $k + \ell \leq n$.

Si l'on se fixe un repère $(e_1, ..., e_m)$ au dessus d'un ouvert u et que l'on introduit la matrice A de la connexion dans ce repère, soit la matrice de 1-formes $a_{j,k}$ dans u telles que

$$D[e_k] = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} \otimes e_j, \quad k = 1, ..., m, \tag{1.58}$$

on note donc que, toujours dans u :

$$D\Big[\sum_{k=1}^{m} \omega_k \otimes e_k\Big] = \sum_{k=1}^{m} \Big(d\omega_k + \sum_{j=1}^{m} a_{k,j} \wedge \omega_j\Big) \otimes e_k$$

si $\omega_1, ..., \omega_m$ sont des formes différentielles ou des courants dans u, à valeurs complexes, tous de même degré.

Du fait que $d \circ d = 0$, on observe que l'action de D^2 sur une k-forme différentielle ω ou un courant T de degré k (dans un ouvert $\mathscr{U}$), tous deux à valeurs dans E s'exprime sous la forme

$$D^2[\omega] = \Theta \wedge \omega, \qquad D^2[T] = \Theta \wedge T$$

où Θ est une section globale (dans $\mathscr{X}$) du fibré $\big(\bigwedge^2 T^*(\mathscr{X})\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,E)$. Cette matrice Θ s'exprime dans un repère $(e_1, ..., e_n)$ au dessus de l'ouvert u comme la matrice

$$\Theta = dA + A \wedge A \tag{1.59}$$

où la matrice $A = [a_{j,k}]_{1\leq j,k\leq m}$ est définie par (1.58). On appelle

$$\Theta \in \big(\bigwedge^2 T^*(\mathscr{X})\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,E)$$

le *tenseur de courbure* de la connexion D ; l'expression matricielle (1.59) du tenseur de courbure au dessus d'un repère donné est dite *matrice de courbure* de la connexion D lorsque le fibré est rapporté à ce repère.

1.6.2. Connexion de Chern ; formes et classe de Chern (d'un fibré holomorphe hermitien)

Exploitons maintenant la structure complexe sur $\mathscr{X}$. Toute connexion D se scinde sous la forme de la somme de deux connexions $D^{(1,0)}$ et $D^{0,1}$, où, pour tout couple (p,q) d'entiers entre 0 et n,

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} &: \Lambda^{p,q}(\mathscr{U}, E) \to \Lambda^{p+1,q}(\mathscr{U}, E) \\ D^{(0,1)} &: \Lambda^{p,q}(\mathscr{U}, E) \to \Lambda^{p,q+1}(\mathscr{U}, E) \end{aligned}$$

Lorsque E est un fibré hermitien, on dit que D *est compatible avec la structure complexe* si et seulement si $D^{(0,1)} = \bar{\partial}_E$ (cette connexion est bien définie car le fibré E est holomorphe, c'est ce qui nous avait d'ailleurs permis d'introduire le complexe de Dolbeault, voir la section 1.4.3).

À nouveau, ce qui suit vaut dans le cadre réel des variétés différentielles. On se donne maintenant une métrique hermitienne $|\ |$ sur un fibré complexe (localement trivial) de rang m au dessus de $\mathscr{X}$. Le produit scalaire

$$z \in \mathscr{X} \longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_z$$

induit, pour chaque k, ℓ entre 0 et $2n$ tels que $k + \ell \leq 2n$, pour chaque ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$, une application sesquilinéaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ : C^{\infty,k}(\mathscr{U}, E) \times C^{\infty,\ell}(\mathscr{U}, E) \longmapsto C^{\infty,k+\ell}(\mathscr{U}, E).$$

On pose pour cela, dans un ouvert u au dessus duquel on dispose d'un repère pour E et dans lequel vivent aussi des coordonnées réelles $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$:

$$\Big\langle \sum_1^m \omega_j \otimes e_j, \sum_{k=1}^m \tilde{\omega}_k \otimes e_k \Big\rangle := \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle e_j, e_k \rangle\, \omega_j \wedge \tilde{\omega}_k. \tag{1.60}$$

Définition 1.19 (compatibilité d'une connexion sur un $\mathbb{C}$-fibré avec le choix d'une métrique). Une connexion D sur un $\mathbb{C}$-fibré hermitien $E \to \mathscr{X}$ (le produit scalaire associé à la métrique sur la fibre E_z étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$) est dite *compatible avec la métrique hilbertienne* $|\ |$ si et seulement si la connexion préserve le produit scalaire, c'est-à-dire

$$d[\langle \omega_1, \omega_2 \rangle] = \langle D[\omega_1], \omega_2 \rangle + (-1)^{\deg \omega_1} \langle \omega_1, D[\omega_2] \rangle. \tag{1.61}$$

Ceci signifie que la matrice A de l'action de la connexion sur un repère orthonormé arbitraire (pour la métrique en jeu) au dessus d'un ouvert u, telle qu'elle est définie dans (1.58) vérifie $A^* = -A$ (A désignant la transconjuguée de A).

On se remet à partir de maintenant à exploiter la structure complexe sur $\mathscr{X}$. En décomposant les entrées de la matrice A de la connexion en $(1,0)$ et $(0,1)$-formes, on réalise la décomposition $D = D^{(1,0)} + D^{(0,1)}$. Si $D^{(1,0)}$ est imposée (ce qui est le cas lorsque le fibré E est holomorphe et que $D^{(0,1)}$ est « figée » comme la connexion $\bar{\partial}E$, imposer de plus la compatibilité de la connexion avec une métrique hermitienne fixée *a priori* sur le fibré achève de fixer complètement la connection $D^{(1,0)}$ du fait des relations $A^* = -A$ pour la matrice de connexion dans les repères orthonormé. Cela nous conduit à la définition majeure suivante :

Définition 1.20 (connexion de Chern). Soit E un fibré holomorphe localement trivial et de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $\mathscr{X}$; si le fibré est équipé d'une métrique hermitienne[1], il existe une unique connexion sur E qui soit à la fois compatible avec la structure de fibré holomorphe ($D^{(0,1)} = \bar{\partial}_E$) et avec la métrique (conditions (1.61)). Cette connexion est dite *connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien* $(E, |\ |)$. Le tenseur de courbure de la connexion de Chern de $(E, |\ |)$ est dans ce cas particulier une section globale du fibré

$$\big([T^{(1,0)}(\mathscr{X})]^* \wedge [T^{(0,1)}(\mathscr{X})]^*\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,E)$$

c'est-à-dire un élément

$$\Theta \in C^{\infty,1,1}\big(\mathscr{X}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,E)\big)$$

lorsque la métrique est lisse ou bien un élément

$$\Theta \in {}'\mathcal{D}^{1,1}\big(\mathscr{X}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,E)\big)$$

lorsque la métrique est éventuellement singulière.

On sait en algèbre linéaire que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée à entrées dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ encode l'application linéaire que cette matrice représente lorsque le $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans lequel on travaille est rapporté à sa base canonique. Il est donc naturel de former ($m = \mathrm{rang}(E)$) lorsque la métrique $|\ |$ est C^∞ :

$$\det\Big(\frac{i}{2\pi}\Theta + X\,\mathrm{Id}_E\Big) = X^m + \sum_{k=1}^{m} c_k(E, |\ |)\, X^{m-k}.$$

Pour chaque $k = 1, ..., m$, la forme $c_k(E, |\ |)$ est une (k,k)-forme différentielle dans $\mathscr{X}$. On a $c_k(E, |\ |) = 0$ dès que $k > n$.

Définition 1.21 (formes de Chern d'un fibré holomorphe hermitien avec métrique lisse). Soit $E \to \mathscr{X}$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $\mathscr{X}$ de dimension n. Si le fibré E est équipé d'une métrique lisse, la liste des formes $c_k(E, |\ |)$, $k = 1, ..., \min(m,n)$ (c_k étant une forme de bidegré (k,k)) est la

1. En principe C^∞, mais on peut la supposer seulement continue, voire singulière, en considérant l'action de l'opérateur de de Rham au membre de gauche de (1.61) au sens des courants.

liste des *formes de Chern*[1] du fibré hermitien $(E, |\ |)$. Dans le cas où $m = 1$ et où la métrique est éventuellement singulière, le $(1,1)$ courant

$$c_1(L, |\ |) = -dd^c \log |e|^2 \tag{1.62}$$

(où e désigne un repère holomorphe arbitraire, la définition étant indépendante du repère) est le courant de Chern $c_1(L, |\ |)$ du fibré en droite équipé de cette métrique ; ce courant est appelé forme de Chern $c_1(L, |\ |)$ lorsque la métrique est C^∞.

En fait, la forme de Chern est ∂ et $\bar\partial$ fermée. La classe de cohomologie de de Rham de la forme de Chern $C(E, |\ |)$ (dans le cas où la métrique est lisse) ne dépend pas de la métrique. On admettra ici ces résultats (voir la proposition 1.3 de [**YNiam**]). La classe de cohomologie $C(E)$ ainsi définie ne dépend donc que du fibré holomorphe et non de la métrique dont on l'équipe. On l'appelle *classe de Chern du fibré holomorphe* E.

Remarque 1.11. Ici réside pour une grande part l'intérêt des courants en géométrie complexe : ils permettent l'incarnation, par le biais de représentants, de classes de cohomologie telles la classe de Chern se présentant comme des objets formels. Lorsqu'il devient indispensable de s'extraire du formalisme pour « mesurer » (en introduisant des métriques sur les fibrés) ou « calculer » (comme par exemple en théorie de l'intersection géométrique ou arithmétique), il s'avère souvent à la fois commode et efficace de pouvoir travailler avec de tels représentants courantiels « explicites ».

1.6.3. Formule de Lelong-Poincaré ; version géométrique

Nous transposons pour clôre ce chapitre la formule de Lelong-Poincaré (1.55) (théorème 1.2) à un cadre géométrique.

THEORÈME 1.3 (version géométrique de la formule de Lelong-Poincaré). *Soit $\mathscr{X}$ une variété analytique complexe, $L \to \mathscr{X}$ un fibré holomorphe de rang 1 au dessus de $\mathscr{X}$, équipé d'une métrique régulière (c'est-à-dire C^∞) ou singulière*[2] *$z \mapsto |\ |_z$. Soit s une section méromorphe de L au dessus d'un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}$. On a*

$$dd^c\Big[-\log |s(z)|_z^2\Big] + [\mathrm{div}(s)] = c_1(L, |\ |). \tag{1.63}$$

Ici $c_1(L, |\ |)$ désigne la première forme de Chern de $(L, |\ |)$ ou le premier courant de Chern suivant que la métrique $|\ |$ est régulière ou singulière.

DÉMONSTRATION. Il suffit de se placer dans un repère $(z, e(z))$ pour L au dessus d'un ouvert u, d'exprimer $s(z) = f(z)\, e(z)$ avec f méromorphe à valeurs dans $\mathbb{C}$ cette fois. On a dans u :

$$dd^c\Big[-\log |s(z)|_z^2\Big] = dd^c\Big[-\log |f(z)|^2\Big] - dd^c \log |e(z)|_z^2 = dd^c\Big[-\log |f(z)|^2\Big] + c_1(L, |\ |).$$

On utilise enfin pour transformer $dd^c\Big[-\log |f(z)|^2\Big]$ la formule de Lelong-Poincaré (1.55) du théorème (1.2). □

1. La forme différentielle $1 + \sum_{k=1}^{\min(m,n)} c_k(E, |\ |)$ (somme de formes différentielles de divers bi-degrés) est appelée *forme de Chern* $C(E, |\ |)$ du fibré holomorphe hermitien $(E, |\ |)$.

2. Par exemple juste continue, voire juste localement intégrable, ce qui signifie que les entrées de la matrice Hermitienne H_z correspondant au produit scalaire associé à la métrique sur la fibre E_z sont continues, voire juste localement intégrables lorsqu'on exprime cette application $z \mapsto H_z$ au dessus d'un repère local quelconque pour E.

Remarque 1.12 (une formule « œcuménique »)**.** Le premier terme figurant au membre de gauche de la formule (1.63) est un objet relevant de l'analyse (à savoir un courant de Green, ici en fait une fonction de Green, dans le cadre de la théorie du potentiel pluricomplexe). Le second terme (courant d'intégration attaché au cycle diviseur d'une section méromorphe d'un fibré en droites) peut être assimilé au cycle lui-même ; c'est donc un objet relevant de la géométrie algébrique. Quant au membre de droite de cette formule, à savoir la forme ou le courant de Chern du fibré holomorphe L équipé de la métrique ici choisie $|\ |$, c'est un être relevant de la géométrie hermitienne. Cette formule de Lelong-Poincaré version géométrique sera aussi appelée à jouer un rôle majeur en géométrie arithmétique (théorie de l'intersection, expression de la hauteur logarithmique arithmétique d'un cycle défini sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps de nombres). Analyse, géométrie algébrique, géométrie hermitienne et arithmétique se trouvent ainsi « fédérées » par le biais d'une telle formule.

CHAPITRE 2

Convexité, plurisousharmonicité et positivité

2.1. Du cadre $\mathbb{R}^n$ au cadre $\mathbb{C}^n$

Les deux univers que sont $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont reliés entre eux de bien des manières ; on se contente ici d'en suggérer deux.

— On peut envisager au dessus de $\mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n}$ le « tube » complexe
$$\mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n} + i\mathbb{R}^n_{y_1,\dots,y_n}\ ;$$
ceci correspond à la représentation *cartésienne* des n-uplets de nombres complexes $z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. La projection $x + iy \mapsto x$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est ouverte et continue, mais elle n'est pas topologiquement propre.

— On peut également envisager l'application surjective (cette fois continue et topologiquement propre) :
$$\operatorname{Log}\ : (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \longmapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$
(correspondant à la représentation polaire $(z_1, \dots, z_n) = e^{x_1+i\theta_1}, \dots, e^{x_n+i\theta_n})$ des n-uplets de nombres complexes non nuls). On peut prolonger cette application à $\mathbb{C}^n$, mais à condition cette fois de la considérer à valeurs dans $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n$; ce prolongement réalise toujours une application continue topologiquement propre. L'ensemble $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n$ sera alors, on le verra, l'espace affine tropical Trop^n : « tropical [1] » signifie que les deux opérations envisagées sur $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ respectivement en place de l'addition et de la multiplication sont l'addition tropicale et la multiplication tropicale :
$$a \boxplus b = \max(a, b), \quad a \boxtimes b = a + b.$$

2.2. Convexité, sousharmonicité et plurisousharmonicité

2.2.1. Le cadre réel et la notion de convexité

On peut présenter ainsi la notion de convexité pour les fonctions réelles dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1 (fonction convexe dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction convexe φ dans U est une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$ dont la

1. La terminologie repose ici sur le fait que ce calcul dit aussi « max-plus » a été popularisé par les informaticiens (et notamment le mathématicien brésilien Imre Simon, d'où le qualificatif « tropical ») avant d'être redécouvert plus récemment (depuis les années 1990) par la communauté mathématique, avec en particulier les travaux de I. Gelfand et de son école [**GKZ**].

restriction $\varphi_{|\delta}$ à chaque droite réelle δ intersectant U vérifie en tout point $x \in U \cap \delta$ la *propriété de sous-moyenne* :

$$\forall\, [x,y] \subset U \cap \delta, \quad \varphi((x+y)/2) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2} \ ; \tag{2.2}$$

(version « surfacique ») ou encore, ce qui revient au même :

$$\forall\, [x,y] \subset U \cap \delta, \quad \varphi((x+y)/2) \leq \int_0^1 \varphi(x+t(x-y))\, dt \tag{2.3}$$

(version « volumique »).

2.2.2. Le contexte particulier convexe régulier C^2

Dans le cas où la fonction $\varphi\ : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, dire que φ est convexe dans U revient à dire que la *matrice Hessienne*

$$\mathrm{Hess}[\varphi](x) := \Big[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x)\Big]_{1\leq j,k\leq n}$$

est une matrice symétrique positive en tout point x de U. Notons dans ce cas

$$\nabla\varphi\ : x \in U \subset \mathbb{R}^n \longmapsto \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)\Big) \in (\mathbb{R}^n)^*$$

l'application gradient. Si a et x sont deux points de U tels que $[a,x] \subset U$, la formule de Taylor avec reste intégral assure alors

(2.4)

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \langle \nabla\varphi(a), x-a\rangle + \int_0^1 (1-t)\,(x-a)^* \cdot \mathrm{Hess}[\varphi](a+t(x-a)) \cdot (x-a)\, dt$$
$$\geq \varphi(a) + \langle \nabla\varphi(a), x-a\rangle,$$

ou encore

$$\forall\, a, x \text{ t.q. } [a,x] \subset U, \quad \varphi(x) - \langle \nabla\varphi(a), x\rangle \geq \varphi(a) - \langle \nabla\varphi(a), a\rangle. \tag{2.5}$$

Ainsi, pour tout ouvert convexe V inclus dans U, pour tout $a \in V$,

$$\nabla\varphi(a) \in \big\{\xi \in (\mathbb{R}^n)^*\ ;\ \varphi - \langle \xi, \cdot\rangle \text{ réalise son minimum absolu dans } V \text{ en } a\big\}. \tag{2.6}$$

Un lemme d'Aleksandrov (dont on trouvera la preuve [1] dans [**RT**], théorème 2.5), l'ensemble des éléments $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tels que ξ est réalisé de deux manières différentes comme $\nabla\varphi(a)$ avec $a \in V$ est de mesure nulle dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Il en résulte que, hors d'un ensemble de mesure nulle E^*_φ dans $(\mathbb{R}^n)^*$, on peut affirmer qu'un élément ξ de $(\mathbb{R}^n)^*$ s'écrit d'une unique manière sous la forme $\xi = \nabla\varphi(a)$ avec $a \in U$. Si l'on invoque

1. Cette preuve repose sur le fait suivant : si l'on introduit la fonction convexe conguguée (au sens de Legendre) :

$$\check{\varphi}\ : \xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sup_{x\in V} \big(\langle \xi, x\rangle - \varphi(x)\big),$$

on montre que si $\xi = \nabla\varphi(a_0) = \nabla\varphi(a_1)$ avec $a_0 \neq a_1$ et $a_0, a_1 \in V$, la fonction convexe $\check{\varphi}$ n'est pas différentiable en ξ.

la formule de changement de variables dans la théorie de l'intégration Lebesgue, on constate donc que, pour tout sous-ensemble mesurable A de U :

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{(\mathbb{R}^n)^*}(\nabla\varphi(A)) &= \int_{\nabla\varphi(A)\cap\big((\mathbb{R}^n)^*\setminus E^*_\varphi\big)} d\xi_1\dots d\xi_n \\ &= \int_A \det\big[\mathrm{Hess}[\varphi](x)\big]\,dx_1\dots dx_n\end{aligned} \tag{2.7}$$

(en effet, le jacobien de l'application gradient en un point $x\in U$ est exactement le déterminant de la matrice hessienne $\mathrm{Hess}[\varphi](x)$). De plus, pour tout ouvert V convexe inclus dans U, on constate, du fait de (2.7), de (2.6) et du lemme d'Aleksandrov rappelé plus haut que, pour tout sous-ensemble mesurable A de U, pour tout ouvert convexe $V\subset U$,

$$\begin{aligned}&\int_{A\cap V}\det\big[\mathrm{Hess}[\varphi](x)\big]\,dx_1\dots dx_n \\ &= \mathrm{vol}_n\big\{\xi\in(\mathbb{R}^n)^*\,;\,\varphi-\langle\xi,\cdot\rangle \text{ réalise son minimum absolu dans } V \text{ en } a\in A\cap V\big\}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

La mesure de densité $\det\big[\mathrm{Hess}[\varphi]\big]$ ainsi introduite est appelée *mesure de Monge-Ampère réelle associée à la fonction convexe* φ (ici de classe C^2) ; on note cette mesure $\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(\varphi,\dots,,\varphi)$, cette notation se trouvant justifiée par le caractère multilinéaire alterné de la forme déterminant impliquée dans $\det\big[\mathrm{Hess}[\varphi]\big]$. On montrera plus loin comment s'affranchir de l'hypothèse C^2 et étendre la notion de mesure de Monge-Ampère réelle aux fonctions convexes seulement continues (le second membre de (2.8) conservera en fait un sens même en l'absence de régularité C^2 pour la fonction φ).

2.2.3. Le cadre complexe et la notion de plurisousharmonicité

Passons maintenant du cadre réel au cadre complexe. Le pendant naturel de la notion de convexité dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est celui de *plurisousharmonicité* dans un ouvert $\tilde U$ de $\mathbb{C}^n$.

On rappelle d'abord la définition de la notion de fonction sous-harmonique dans un ouvert du plan complexe.

Définition 2.2 (fonction sous-harmonique dans un ouvert de $\mathbb{C}$). Soit Ω est un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Une fonction $\psi\ :\Omega\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ est dite *sous-harmonique* dans Ω si et seulement si :

— elle est semi-continue supérieurement (ce qui signifie que $\psi^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ est ouvert ou encore que $\psi^{-1}([\alpha,+\infty[)$ est fermé, ce pour tout $\alpha\in\mathbb{R}\cap\{-\infty\}$ [1]) ;

— elle vérifie en tout point de Ω la *propriété de sous-moyenne* sur les disques [2] ou les cercles, c'est-à-dire :

$$\forall\,\overline{D(z_0,r)}\subset\Omega,\ f(z_0)\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta \tag{2.9}$$

1. Cette clause assure en particulier que ψ est bornée sur tout compact.

2. On choisit ici le disque comme figure de base dans le plan du fait de sa propriété d'*isotropie* ; ce choix ne privilégie en effet aucune direction dans l'espace dual $(\mathbb{R}^2)^*$.

(version « surfacique ») ou encore, ce qui revient au même

$$\forall\, \overline{D(z_0,r)} \subset \Omega,\ f(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D(z_0,r)}} f(x,y)\, dx \wedge dy \tag{2.10}$$

(version « volumique »).

La propriété de sous-harmonicité d'une fonction $\psi\ : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se traduit, lorsque cette fonction n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune des composantes connexes de Ω, en termes de *positivité d'une certaine distribution* où, ce qui revient au même en dimension 1, de *positivité d'un certain* $(1,1)$-*courant*. En effet, une fonction $\psi\ : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, plurisousharmonique dans Ω et qui n'est identiquement égale à $-\infty$ dans aucune composante connexe de Ω est nécessairement localement intégrable dans Ω (voir le corollaire 4.1 de [**YanC**]). On a de plus la proposition suivante :

Proposition 2.1 (notion de positivité attachée à la notion de sousharmonicité dans un ouvert de $\mathbb{C}$). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\psi\ : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction non identiquement égale à $-\infty$ dans aucune composante connexe de Ω.*

- *si ψ est sous-harmonique dans Ω, ψ est une fonction localement intégrable dans Ω, qui définit donc une distribution $[\psi]$ dans Ω, et le courant $dd^c[\psi]$ est un $(1,1)$-courant positif fermé, ce qui revient à dire que la distribution $\Delta[\psi]$ est une mesure positive puisque $dd^cT = \Delta T\,(dx \wedge dy)/(4\pi)$) ;*
- *réciproquement, si $\psi\ : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est une fonction localement intégrable, semi-continue supérieurement et telle que $dd^c[\psi]$ soit un $(1,1)$-courant positif fermé dans l'ouvert Ω, alors ψ est une fonction sous-harmonique dans Ω.*

Démonstration. On trouvera la preuve de cette proposition dans [**YanC**] (théorème 4.1) ; on pourra aussi se reporter à [**AM**] (théorème 12.7.4 et corollaire 12.7.6). On en retiendra surtout de la preuve le fait suivant : on peut régulariser une fonction sous-harmonique ψ par la suite décroissante de fonctions $\psi * \rho_{\epsilon_k}$, où $(\rho_{\epsilon_k})_{k\geq 1}$ est une approximation de la masse de Dirac dans $\mathbb{C}$ construite à partir d'une fonction $\rho\ : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$, de classe C^∞, radiale, de support dans $\overline{D(0,1)}$ et d'intégrale 1 (voir la proposition 4.4 dans [**YanC**] ou la section 12.6 de [**AM**]). □

Le pendant complexe de la définition 2.1 est donc la définition suivante :

Définition 2.3 (fonction plurisousharmonique (ou « psh ») dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$). Soit $\tilde{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Une fonction *plurisousharmonique* (en abrégé « psh ») $\psi\ : \tilde{U} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est une fonction semi-continue supérieurement de $\tilde{U}$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dont la restriction $\psi_{|\tilde{\delta}}$ à chaque droite complexe $\tilde{\delta}$ intersectant $\tilde{U}$ vérifie la propriété de sous-moyenne sur les disques dans l'ouvert $\tilde{U} \cap \tilde{\delta}$ de la droite complexe $\tilde{\delta} \simeq \mathbb{C}$.

Dans la droite ligne de la proposition 2.2, on a le résultat suivant :

Proposition 2.2 (notion de positivité attachée à la notion de plurisousharmonicité dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$). *Soit $\tilde{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\psi\ : \tilde{U} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ à la fois* *localement intégrable*[1] *et semi-continue supérieurement dans* $\tilde{U}$. *La fonction* ψ *est plurisousharmonique dans* $\tilde{U}$ *si et seulement si le courant* $dd^c[\psi]$ *est un* $(1,1)$-*courant positif fermé.*

DÉMONSTRATION. La preuve repose ici encore sur la possibilité, comme c'était le cas pour les fonctions sousharmoniques (preuve de la proposition 2.1), d'approcher une fonction psh ψ localement intégrable par une suite décroissante $(\psi * \rho_{\epsilon_k})_{k\geq 1}$ de fonctions plurisousharmoniques de classe C^∞, ce à partir d'une approximation $(\rho_{\epsilon_k})_{k\geq 1}$ de la masse de Dirac construite sur la base d'une fonction $\rho\ :\mathbb{C}^n \to [0,+\infty[$, de classe C^∞, radiale et de support dans $\overline{B_n(0,1)}$. On trouvera une preuve de la proposition 2.2 dans le livre de J.P. Demailly [**De0**] (théorème 5.8, section I.5). On pourra aussi se reporter aux calculs effectués dans la sous-section suivante (dans le cas où ψ est une fonction psh de classe C^∞, cas auquel on se ramène précisément par régularisation). □

2.2.4. Le contexte plurisousharmonique régulier (C^2)

Comme dans le cas convexe, il existe un critère simple pour vérifier qu'une fonction de classe C^2 dans un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est plurisousharmonique. En effet, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} dd^c\psi &= \frac{i}{2\pi}\partial\Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}_k}(z)\, d\bar{z}_k\Big) \\ &= \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z)\, dz_j\wedge d\bar{z}_k. \end{aligned}$$

La $(1,1)$-forme ainsi construite doit être une forme positive lorsque ψ est psh dans $\tilde{U}$ (c'est d'ailleurs équivalent lorsque ψ est de classe C^2), ce qui équivaut à dire que l'on définit une métrique hermitienne sur le fibré tangent holomorphe $T^{(1,0)}(\tilde{U})$ par

$$\Big(\sum_{j=1}^n \xi_j\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_z,\ \sum_{j=1}^n \xi_j\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_z\Big) \longmapsto \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(z)\,\xi_j\bar{\xi}_k.$$

La forme hermitienne ainsi définie est dite *forme de Lévi* et le fait que la fonction ψ soit plurisousharmonique dans $\tilde{U}$ équivaut à ce que les valeurs propres de la matrice hermitienne correspondant à la forme de Lévi restent positives ou nulles dans $\tilde{U}$. On peut associer à ψ dans ce cas une forme volume, à savoir la (n,n)-forme continue positive $(dd^c\psi)^{\wedge^n}$. Cette (n,n)-forme (qui peut s'annuler, mais est positive) s'appelle *courant de Monge-Ampère complexe attaché à la fonction plurisousharmonique* ψ et on remarque que

$$(dd^c\psi)^{\wedge^n} = \frac{n!}{\pi^n}\,\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}[\psi,...,\psi]\, dx_1\wedge dy_1\wedge\cdots\wedge dx_n\wedge dy_n,$$

1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction plurisousharmonique ψ dans un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$ soit localement intégrable est que ψ ne soit identiquement égale à $-\infty$ sur aucune des composantes connexes de l'ouvert U ; on retrouve ici le même résultat que celui formulé pour les fonctions sous-harmoniques (voir le corollaire 4.1 de [**YanC**]), avec d'ailleurs essentiellement la même preuve.

où $\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}[\psi, ..., \psi]$ figure la mesure positive à densité le déterminant de la forme de Lévi (par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{2n} \sim \mathbb{C}^n$). Cette mesure $\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}[\psi, ..., \psi]$ est dite *mesure de Monge-Ampère complexe attachée à la fonction plurisousharmonique* (ici de classe C^2) $\psi \ : \tilde{U} \to \mathbb{R}$. On apprendra ici encore plus loin à s'affranchir de l'hypothèse C^2.

2.2.5. Convexité et plurisousharmonicité

Dans cette section, nous allons relier les deux notions de convexité de plurisousharmonicité de deux manières, en exploitant soit l'approche cartésienne, soit l'approche polaire (telles qu'elles sont présentées dans la section 2.1) pour passer du cadre réel au cadre complexe.

PROPOSITION 2.3 (convexité versus plurisousharmonicité suivant l'approche cartésienne). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{U} = U + i\mathbb{R}^n$ l'ouvert tubulaire construit dans $\mathbb{C}^n_{x+iy}$ au dessus de $U \subset \mathbb{R}^n_x$. Il est équivalent de dire qu'une fonction $\varphi \ : U \to \mathbb{R}$ est convexe dans U et de dire que la fonction*

$$\tilde{\varphi} \ : x + iy \in \tilde{U} \longrightarrow \varphi(x)$$

est psh continue dans $\tilde{U}$. De plus, si φ est de classe C^2, on a

$$\forall\, x + iy \in \tilde{U},\ \Big[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x+iy)\Big]_{1 \le j,k \le n} = \frac{1}{4}\mathrm{Hess}[\varphi](x)$$

et, par conséquent, au sens des courants (ou des formes différentielles continues puisque les fonctions φ et $\tilde{\varphi}$ en jeu sont de classe C^2) :

$$(dd^c \tilde{\varphi})^{\wedge^n} = \frac{n!}{\pi^n} \det \big[\mathrm{Hess}[\varphi](x)\big]\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n. \tag{2.11}$$

DÉMONSTRATION. On se contente ici d'une preuve en dimension 2 (il s'agit ici de la question **1** de l'exercice 4.5 de [**YanC**] et l'on a simplement ici adapté les notations en accord avec celles utilisées dans ce cours [1]). On utilise la caractérisation de la convexité par la propriété de la sous-moyenne volumique (2.3). Si φ est convexe dans U, la fonction $\tilde{\varphi}$ est, puisque φ l'est dans U, une fonction continue dans le tube $\tilde{U}$. Si $(x_{0,1}, x_{0,2}) \in U$, $(y_{0,1}, y_{0,2}) \in \mathbb{R}^2$, $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et que l'on note $\tilde{\delta}_{x_0+iy_0,[u_0:u_1]}$ la droite complexe de $\mathbb{C}^2$ passant par $x_0 + iy_0$ et de pente $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, l'image par $x + iy \mapsto x$ du cercle de $\widetilde{U} \cap \tilde{\delta}_{x_0+iy_0,[u_0:u_1]}$ paramétré par

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto \big(x_{0,1} + iy_{0,1} + ru_0\, e^{i\theta}, x_{0,2} + iy_{0,2} + ru_1\, e^{i\theta}\big) \quad (r > 0)$$

(pourvu que r soit tel que le disque fermé borné limité par ce cercle soit entièrement inclus dans le tube $\tilde{U}$) est un segment de U de milieu le point $(x_{0,1}, x_{0,2})$. Dire par conséquent que, pour tout $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la restriction de $\tilde{\varphi}$ à la composante connexe de $\tilde{U} \cap \tilde{\delta}_{x_0+iy_0,[u_0:u_1]}$ contenant $x_0 + iy_0$ vérifie (dans cette composante connexe) la propriété de la sous-moyenne rapportée au point $x_0 + iy_0$ équivaut à dire (puisque $\tilde{\varphi}(x + iy) = \varphi(x)$) que φ vérifie la propriété de la sous-moyenne volumique

1. On pourra d'ailleurs faire aussi en exercice la question **2** de cet exercice 4.5 de [**YanC**] (corrigé dans l'ouvrage) pour bien s'imprégner de la proposition 2.2.

relativement au point x_0 : pour tout segment $[x,y]$ de longueur $2\ell > 0$ inclus dans U et de milieu x_0, on a

$$\varphi(x_0) \leq \frac{1}{2\ell} \int_0^1 \varphi\big(x + s(y-x)\big)\, ds.$$

Dire que $\tilde{\varphi}$ est plurisousharmonique dans $\tilde{U}$ équivaut donc à dire que, pour toute droite affine δ de $\mathbb{R}^2$, la restriction de φ à toute composante connexe de $\delta \cap U$ (considéré comme un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) vérifie la propriété de sous-moyenne volumique, ce qui équivaut à dire que φ est convexe dans U.
La seconde partie de la proposition (dans le cadre régulier) résulte d'un calcul immédiat. □

Examinons maintenant ce qui se passe suivant l'approche polaire en reprenant un calcul proposé par A. Rashkovski ([**Rash**], section 3).

Proposition 2.4 (convexité versus plurisousharmonicité suivant l'approche polaire). *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction de classe C^2 dans U. On note $\tilde{\phi}$ la fonction C^∞ dans $\mathrm{Log}^{-1}(U) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ définie par*

$$\tilde{\phi}(z) = \varphi(\mathrm{Log}(z)),$$

où Log *est l'application introduite en* (2.1) *dans la section 2.1. Il est équivalent de dire que φ est convexe dans U ou que $\tilde{\phi}$ est plurisousharmonique dans $\mathrm{Log}^{-1}(U)$. De plus, si tel est le cas, on a*

$$\forall\, z \in \mathrm{Log}^{-1}(U),\ (dd^c\tilde{\phi})^{\wedge^n}(z) = n!\ \det\big[\mathrm{Hess}[\varphi]\big](\mathrm{Log}(z)) \bigwedge_{j=1}^n \Big(dx_j \wedge \frac{d\theta_j}{2\pi}\Big). \tag{2.12}$$

Démonstration. On remarque (c'est un calcul facile) que pour toute paire d'indices $1 \leq j,k \leq n$, on a

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{z_j \bar{z}_k}\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k}\Big]_{x=\mathrm{Log}(z)}. \tag{2.13}$$

Il résulte alors des calculs effectués dans la sous-section 2.2.4 que dire que φ est convexe dans U équivaut à dire que $dd^c\tilde{\phi}$ est un $(1,1)$-courant positif fermé dans $\mathrm{Log}^{-1}(U)$, donc que $\tilde{\phi}$ est psh dans $\mathrm{Log}^{-1}(U)$ d'après la proposition 2.2. De plus, on a, en termes de courants dans l'ouvert $\mathrm{Log}^{-1}(U)$ (ou de formes différentielles continues puisque les fonctions en jeu ϕ et $\tilde{\phi}$ sont ici supposées C^2) :

$$\begin{aligned}
(dd^c\tilde{\phi})^{\wedge^n} &= \frac{n!}{4^n\pi^n}\frac{1}{|z_1\dots z_n|^2}\Bigg[\det\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\Big]_{j,k}\Bigg]_{x=\mathrm{Log}(z)} \bigwedge_{j=1}^n (i\,dz_j \wedge d\bar{z}_j)\\
&= n!\Bigg[\det\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\Big]_{j,k}\Bigg]_{x=\mathrm{Log}(z)} \bigwedge_{j=1}^n \Big(\frac{id[e^{x_j+i\theta_j}] \wedge d[e^{x_j-i\theta_j}]}{4\pi e^{2x_j}}\Big)\\
&= n!\Bigg[\det\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\Big]_{j,k}\Bigg]_{x=\mathrm{Log}(z)} \bigwedge_{j=1}^n \Big(dx_j \wedge \frac{d\theta_j}{2\pi}\Big).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

C'est bien la formule (2.12) voulue. □

La formule (2.15) peut ici s'interpréter de manière différente : si $A \subset U$ est un sous-ensemble mesurable de U, on a

$$\text{(2.15)} \qquad \mathrm{MA}_{\mathbb{R}}(\varphi, ..., \varphi)(A) = \frac{1}{n!}\big\langle \mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\tilde{\phi}, ..., \tilde{\phi})\,,\, \chi_{\mathrm{Log}^{-1}(A)}\big\rangle,$$

le second membre ayant un sens ici puisque le courant de Monge-Ampère complexe $\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}(\tilde{\phi}, ..., \tilde{\phi})$ est un courant à coefficients mesures.

2.2.6. Un calcul efficace dans le cadre complexe : le ≪ calcul ≫ de Bedford et Taylor

Soient $\psi_1, ..., \psi_m$ $(m \leq n)$ m fonctions psh continues dans un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$. Pour chaque $j = 1, ..., m$, $dd^c\psi_j$ est un courant de bidegré $(1,1)$ positif fermé d'après la proposition 2.2.

Il n'existe pas de manière naturelle de ≪ multiplier ≫ les distributions (ou les courants si l'on introduit le produit extérieur), ni même les mesures (ou les courants à coefficients mesures). Cependant E. Bedford et B.A. Taylor ont introduit dans [**BT1, BT2**] un ≪ calcul ≫ fondé sur l'intégration par parties autorisant la multiplication des courants positifs fermés $dd^c\psi_m \wedge \cdots \wedge dd^c\psi_1$ sous certaines hypothèses.

Nous nous placerons ici pour décrire cette approche dans le cas où les fonctions psh $\psi_1, ..., \psi_m$ sont localement bornées.

Le processus est récursif.

— Comme $dd^c\psi_1$ est un courant à coefficients mesures (car positif fermé, voir la proposition 2.2, puis la proposition 1.5), la multiplication de $dd^c\psi_1$ par ψ_2 est licite, ce qui permet de définir un courant que l'on note $\psi_2\, dd^c\psi_1$.

— On introduit maintenant le courant

$$dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1 := dd^c[\psi_2\, dd^c\psi_1],$$

dont on vérifie qu'il s'agit d'un $(2,2)$-courant positif fermé. La seule chose non évidente concernant ce courant est la positivité. Pour s'en assurer, on régularise les fonctions psh localement intégrables ψ_1 et ψ_2 comme limites décroissantes

$$\psi_1 = \lim_{k\to+\infty} \psi_1 * \rho_{\epsilon_k}, \quad \psi_2 = \lim_{k\to+\infty} \psi_2 * \rho_{\epsilon_k}$$

(voir le résultat rappelé dans la preuve de la proposition 2.2). On vérifie que, au sens de la convergence des courants :

$$dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1 = \lim_{k\to+\infty} dd^c[\psi_2 * \rho_{\epsilon_k}] \wedge dd^c\psi_1.$$

Le courant $dd^c\psi_1$ est (faiblement) positif, tandis que toutes les $(1,1)$-formes $dd^c[\psi_2 * \rho_{\epsilon_k}]$ $(k \geq 1)$ sont (fortement) positives (ou simplement positives car ce sont des $(1,1)$-formes, donc c'est pareil). Chaque courant $dd^c[\psi_2 * \rho_{\epsilon_k}] \wedge dd^c\psi_1$ est donc positif, donc le courant $dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1$ l'est.

— On poursuit en introduisant le courant $\psi_3\,(dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1)$ (ce qui est licite car $dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1$ est à coefficients mesures), puis on pose

$$dd^c\psi_3 \wedge dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_1 := dd^c\big[\psi_3\,(dd^c\psi_2 \wedge dd^c\psi_2)\big].$$

Et ainsi de suite ...

Cette construction nous conduit à la définition :

DÉFINITION 2.4 (courant de Monge-Ampère complexe attaché à une fonction psh localement bornée). Si $\psi\ :\tilde{U}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ est une fonction psh localement bornée dans un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$, on définit son *courant de Monge-Ampère complexe* $\mathtt{MA}_{\mathbb{C}}(\psi,...,\psi)$ par

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}[\psi,...,\psi]=(dd^c\psi)^{\wedge^n}.$$

La mesure positive associée est dite *mesure de Monge-Ampère complexe.*

2.2.7. Mesure de Monge-Ampère réelle attachée à une fonction convexe

La notion de mesure de Monge-Ampère réelle attachée à une fonction convexe $\varphi\ :U\to\mathbb{R}$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est autrement plus délicate à introduire. Comme dans [**RT**], on peut se référer à (2.8) et définir la mesure de Monge-Ampère réelle attachée à φ localement en posant, pour tout sous-ensemble mesurable A de U, pour tout ouvert convexe $V\subset U$:

(2.16)

$$\begin{aligned}&\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi,...,\varphi]:=\\&=\mathrm{vol}_n\big\{\xi\in(\mathbb{R}^n)^*\,;\,\varphi-\langle\xi,\cdot\rangle \text{ réalise son minimum absolu dans } V \text{ en } a\in A\cap V\big\}.\end{aligned}$$

La proposition 2.4 et la relation (2.15) conduisent, après régularisation de la fonction psh continue $\tilde{\phi}=\varphi\circ\mathrm{Log}$ dans l'ouvert $\mathrm{Log}^{-1}(U)$ à la relation

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi,...,\varphi](A)=\frac{1}{n!}\big\langle\mathrm{MA}_{\mathbb{C}}[\tilde{\phi},...,\tilde{\phi}]\,,\,\chi_{\mathrm{Log}^{-1}(A)}\big\rangle \tag{2.17}$$

entre mesure de Monge-Ampère réelle attachée à φ et courant de Monge-Ampère complexe attaché à $\tilde{\psi}$. On voit que l'approche complexe, fondée sur le calcul itératif introduit par Bedford et Taylor, est autrement plus directe et explicite que ne l'est l'approche réelle.

2.2.8. Une digression vers la calcul tropical et un calcul de mesure de Monge-Ampère

Comme on l'a rappelé dans la section introductive 2.1, le calcul tropical dans $\mathrm{Trop}:=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ (donc ensuite multivarié dans $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\})^n$) est un calcul où l'addition $\boxplus$ correspond à la prise de max et la multiplication $\boxtimes$ à l'addition. l'élément $-\infty$ est alors élément neutre et le fait que tout élément soit idempotent $a\boxplus a=a$ prive un tel calcul de la possibilité de « soustraction » (ainsi que de donner un sens raisonnable par exemple à `expression` « = » 0 puisqu'il n'y a pas de soustration et que l'élément neutre pour l'addition est précisément $-\infty$).

Une des raisons de l'intrusion de ce calcul dans le paysage de la théorie des nombres moderne est le développement de la géométrie algébrique sur les variétés définies sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ équipé d'une valeur absolue *ultramétrique*, c'est-à-dire satisfaisant l'inégalité triangulaire ultramétrique

$$|a\pm b|\leq\max(|a|,|b|) \tag{2.18}$$

plutôt qu'à la double inégalité *archimédienne*

$$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b| \tag{2.19}$$

(vérifiée, elle aussi, bien sûr, mais en cessant de demeurer une inégalité intéressante car celle ci n'est plus alors « sharp »). Substituer la prise de maximum à l'addition est ainsi l'opération naturelle à effectuer sur $[0,+\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ après application du logarithme) pour passer d'un univers « mesuré » avec une valeur absolue archímédienne à un univers « mesuré avec une valeur absolue ultramétrique ». On trouvera dans [**Gub**][1] une présentation complète et surtout allant à l'essentiel de l'« *analytification* » (au sens de Berkovich) $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$[2] d'une variété algébrique $\mathscr{X}$ de dimension n définie sur un corps algébriquement clos équipé d'une valeur absolue ultramétrique. On y verra le rôle majeur tenu précisément dans ce cadre par l'opération de « tropicalisation ». Sur cette analyfication $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ sont introduits (voir par exemple [**CLD, Gub**]) des faisceaux de (p,q)-formes $(0\leq p,q\leq n)$ et, suivant le principe de dualité et parce que l'on dispose d'un lemme de partitionnement de l'unité, de $(n-p,n-q)$-courants, rendant possibles certains raisonnements calqués, autant que faire se peu, sur des méthodes jusque là performantes seulement dans le cadre de la géométrie complexe.

Parmi les exemples majeurs de valeurs absolues ultramétriques, on retiendra bien sûr les *valeurs absolues p-adiques* sur $\mathbb{Q}$:

$$|a/b|_p := p^{-\nu_a(p)+\nu_b(p)} \quad (p\geq 2 \text{ premier})$$

où $\nu_m(p)$ désigne (lorque m est un entier strictement positif) l'exposant de p dans la dćomposition de m en facteurs premiers. Le théorème fondamental de l'arithmétique s'encode alors comme la *formule du produit*

$$\forall\, a/b\in\mathbb{Q},\quad \prod_{p \text{ premier}} |a/b|_p\times|a/b|_\infty = 1 \quad (|a/b|_\infty := |a/b|).$$

Si Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, on définit une fonction convexe dans $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\varphi(x) = \max_{\alpha\in\Lambda}\big(c_\alpha + \langle\alpha,x\rangle\big), \tag{2.20}$$

les nombres réels c_α étant des nombres réels non nuls. Dans le cas particulier où $\Lambda\subset\mathbb{Z}^n$, on peut, au lieu cette fonction convexe (considérée alors comme *fonction polynomiale*[3]) considérer le polynôme

$$P = \boxplus_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha \boxtimes X^{\boxtimes\,\alpha} \in \mathrm{Trop}[X_1^{\pm1},...,X_n^{\pm}].$$

On dit que P est un *polynôme de Laurent tropical.*

Toutce qui suit est inspiré de [**PaR0, PaR**], voir aussi [**Ytrop**], chapitre 3.

---

1. Ce texte a contribué à orienter la présentation de ce cours et a certainement beaucoup contribué à l'inspirer.
2. On ne pourra faute de temps expliquer ici le principe de l'analytification de $\mathscr{X}$ en $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ mais on renvoie pour avoir un premier aperçu de la construction à [**Gub**] (section 4) ou à [**BPS**].
3. Attention : disposer de la connaissance de la fonction polynomiale n'assure pas que l'on puisse expliciter le polynôme.

Étant donnée une fonction quelconque $\varphi\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (en particulier la fonction convexe très particulière envisagée en (2.20)), on peut lui associer sa transforée de Legendre :

$$\check{\varphi}\ : \xi \in (\mathbb{R}^n)^* \longmapsto \max_{x\in\mathbb{R}^n} \big(\langle \xi, x\rangle - \varphi(x)\big).$$

Cette fonction $\check{\varphi}$ est toujours une fonction convexe. Lorsque φ est semi-continue inférieurement sans jamais prendre la valeur $-\infty$ ou est identiquement $-\infty$, on a $\check{\check{\varphi}} = \varphi$ (en particulier lorsque φ est, comme ici, convexe, donc continue). Si l'on note Δ le polyèdre de Newton de P dans $(\mathbb{R}^n)^*$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe fermée de $\mathrm{Supp}(P) := \Lambda$ dans $(\mathbb{R}^n)^*$, on dispose d'une application convexe :

$$H\ : (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Delta \longmapsto \varphi(x) + \check{\varphi}(\xi) - \langle \xi, x\rangle.$$

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$K_x^* := \{\xi \in \Delta\,;\, H(x,\xi) = 0\}$$

est un polyèdre convexe compact de Δ de sommets dans $\mathbb{Z}^n$; on a de plus une partition de Δ comme

$$\Delta = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n} K_x^*.$$

Cette partition induit ce que l'on appelle une *décomposition polytopale* de Δ, au sens suivant :

— si $K_x^* \cap K_{x'}^*$ est non vide, il existe $x'' \in \mathbb{R}^n$ tel que $K_{x''}^* = K_x^* \cap K_{x'}^*$;
— si x et x' sont deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $K_x^* \subset K_{x'}^*$, alors le polytope convexe compact K_x^* est une face de $K_{x'}^*$;
— si $x \in \mathbb{R}^n$, toute face τ^* de K_x^* est un polytope convexe compact $K_{x'}^*$ pour un certain x' dans $\mathbb{R}^n$.

De même, pour tout $\xi \in \Delta$, l'ensemble

$$K^\xi := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, H(x,\xi) = 0\}$$

est un polytope convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ compact ou non ; cette fois les sommets sont à coordonnées réelles, mais ce ne sont plus des points à coordonnées rationnelles ; cependant, le sous-espace vectoriel sous-jacent au sous-espace affine engendré par le polytope K^ξ est, lui, défini sur $\mathbb{Q}$. On a

$$\bigcup_{\xi\in\Delta} K^\xi = \mathbb{R}^n. \tag{2.21}$$

De la même manière que les K_x^* définissaient une décomposition polytopale de Δ, les K^ξ définissent une décomposition polytopale de $\mathbb{R}^n$, ce qui veut dire, outre (2.21) :

— si $K^\xi \cap K^{\xi'}$ est non vide, il existe $\xi'' \in \Delta$ tel que $K^{\xi''} = K^\xi \cap K^{\xi'}$;
— si ξ et ξ'' sont deux points de $\mathbb{R}^n$ tels que $K^\xi \subset K^{\xi'}$, alors le polytope convexe K^ξ est une face de $K^{\xi'}$;
— si $\xi \in \Delta$, toute face τ de K^ξ est un polytope convexe $K^{\xi'}$ pour un certain ξ' dans Δ.

Les deux décompositions polytopales (l'une de Δ, l'autre de $\mathbb{R}^n$) ainsi construites s'interprètent géométriquement ainsi :

(1) l'union des cellules K^ξ engendrant un sous-espace affine de dimension $n-1$ (c'est-à-dire l'union des facettes[1] des cellules de dimension maximale n de $\mathcal{C}$ constitue le *support singulier* de la distribution-fonction $[\varphi]$, c'est-à-dire le lieu des points au dessus desquels le graphe de φ présente des ≪ coins ≫.
(2) l'union des arêtes de $\mathcal{C}^*$ (cellules K_x^* engendrant une droite affine de $(\mathbb{R}^n)^*$) constitue la projection par $\pi\ :(\xi,t)\mapsto \Delta\times\mathbb{R}\mapsto\xi$ de l'union des arêtes du polyèdre convexe tubulaire :

$$\mathrm{conv}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Supp}(P)}\{(\alpha,c_\alpha-t)\,;\,t\in[0,+\infty[\}\Big).$$

Les deux décompositions polytopales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ sont en bijection au sens suivant :

$$\sigma\ :\ \text{cellule de } \mathcal{C}\longrightarrow\ \sigma^*=\bigcap_{x\in\sigma}K_x^*\ :\ \text{cellule de } \mathcal{C}^*$$

$$\sigma^*\ :\ \text{cellule de } \mathcal{C}^*\longrightarrow\sigma=\bigcap_{\xi\in\sigma^*}K^\xi\ :\ \text{cellule de } \mathcal{C}.$$

Cette bijection renverse l'ordre ≪ être une face de ≫. De plus, si $\sigma\in\mathcal{C}$ et $\tau\in\mathcal{C}$ est une face de σ (σ^* étant alors une face de τ^*), les deux cônes

$$\{t(x-y)\,;\,x\in\sigma,\ y\in\tau,\ t\geq 0\},\quad \{t(\eta-\xi)\,;\,\eta\in\tau^*,\ \xi\in\sigma^*,\ t\geq 0\}$$

sont polaires[2] l'un de l'autre.

Si $\{a\}$ est une cellule de dimension 0 de $\mathcal{C}$, on a

$$\{a\}=\bigcap_{\xi\in\{a\}^*}K^\xi.$$

Ceci implique $a\in K^\xi$ dès que $\xi\in\{a\}^*$, ou encore que

$$\{a\}\subset\{\xi\in\Delta\,;\,K^\xi\cap\{a\}\neq\emptyset\}. \tag{2.22}$$

Mais, par définition de la mesure de Monge-Ampère de φ, on a

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi,...,\varphi](\{a\})=\mathrm{vol}_n(\{\xi\in\Delta\,;\,K^\xi\cap\{a\}\neq\emptyset\}.$$

On a donc, du fait de l'inclusion (2.22) :

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi,...,\varphi](A)\geq\mathrm{vol}_n(\{a\}^*). \tag{2.23}$$

Mais d'autre part, l'ensemble des $\xi\in(\mathbb{R}^n)^*$ où $x\mapsto\varphi(x)-\langle\xi,x\rangle$ reste bornée inférieurement est égal à $\Delta=\bigcup_{x\in\mathbb{R}^n}K_x^*$; pour tout $\xi\in\Delta$, il existe donc au moins un $x\in\mathbb{R}^n$ où $\varphi-\langle\xi,\cdot\rangle$ réalise son minimum absolu dans $\mathbb{R}^n$. On a ainsi prouvé

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi,...,\varphi](\mathbb{R}^n)=\mathrm{vol}_n(\Delta). \tag{2.24}$$

Du fait que les cellules $\{a\}^*$ sont d'intérieurs deux-à-deux disjoints et d'union Δ, la seule possibilité conciliant (2.24) avec les inégalités (2.23) (pour toute cellule $\{a\}$ de

1. Les facettes d'un polytope σ de $\mathbb{R}^n$ engendrant un sous-espace vectoriel affine de dimension k ($1\leq k\leq n$) sont les faces propres engendrant un sous-espace vectoriel de dimension maximale (donc $k-1$) de σ.

2. Le cône *polaire* d'un cône Γ de $\mathbb{R}^n$ est le cône de $(\mathbb{R}^n)^*$ défini comme $\{\xi\,;\,\langle\xi,x\rangle\leq 0\ \forall x\in\Gamma\}$, tandis que le cône dual est $\{\xi\,;\,\langle\xi,x\rangle\geq 0\ \forall x\in\Gamma\}$, c'est-à-dire l'opposé du précédent.

dimension 0 de $\mathcal{C}$) est que la mesure de Monge-Ampère ne charge que les cellules $\{a\}$ de dimension 0 (on dit aussi les *nœuds*) du complexe polytopal $\mathcal{C}$ et donc que

$$\mathrm{MA}_{\mathbb{R}}[\varphi, ..., \varphi] = \sum_{\substack{\{a\}\in\mathcal{C} \\ \dim\big(\mathrm{vec}(\{a\})\big)=0}} \mathrm{vol}_n(\{a\}^*)\, \delta_a. \tag{2.25}$$

Remarque 2.1. Tout ce que nous avons dit ici (excepté bien sûr le fait que la décomposition polytopale $\mathcal{C}^*$ de Δ est une décomposition dont toutes les cellules sont des polyèdres compacts à sommets dans $\mathbb{Z}^n$ et que les sous-espaces vectoriels engendrés par les cellules de $\mathcal{C}$ sont définis sur $\mathbb{Q}$) vaut lorsque Λ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. Nous venons donc de calculer la mesure de Monge-Ampère réelle du maximum d'un nombre fini de fonctions affines.

Cette digression vers les aspects tropicaux suggère la construction de « (p,q)-*super-formes* », puis (par dualité) de « $(n-p, n-q)$-*super-courants* » ($0 \leq p, q \leq n$) dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.5 ((p,q)-super-formes et ($n-p, n-q$)-super-courants dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ [**Lag1, CLD, Gub**]). Une (p,q)-*super-forme réelle* ω ($0 \leq p, q \leq n$) dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est par définition une (p,q)-forme dans l'ouvert $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ s'exprimant dans cet ouvert sous la forme

$$\omega = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n \\ 1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n}} \omega_{I,J}(\mathrm{Log}(z))\, \frac{dz_I}{z_I} \wedge \frac{d\bar{z}_J}{\bar{z}_J}$$

avec, par convention

$$\frac{dz_I}{z_I} \wedge \frac{d\bar{z}_J}{\bar{z}_J} := \bigwedge_{\ell=1}^{p} \frac{dz_{i_\ell}}{z_{i_\ell}} \wedge \bigwedge_{\ell=1}^{q} \frac{d\bar{z}_{j_\ell}}{\bar{z}_{j_\ell}},$$

où les $\omega_{I,J}$ sont des fonctions C^∞ dans Ω. Un $(n-p, n-q)$-*super-courant réel dans* Ω est un courant de bidimension (p,q) dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ s'exprimant sous la forme

$$T = \sum_{\substack{1\leq i'_1<\cdots<i'_{n-p}\leq n \\ 1\leq j'_1<\cdots<j'_{n-q}\leq n}} T_{I',J'}(\mathrm{Log}(z))\, \frac{dz_{I'}}{z_{I'}} \wedge \frac{d\bar{z}_{J'}}{\bar{z}_{J'}},$$

où les $T_{I',J'}$ sont des distributions réelles dans Ω et

$$\langle T_{I',J'}(\mathrm{Log}(z)), \varphi\rangle := \Big\langle T_{I',J'}(x), \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{[0,2\pi]^r} \varphi(e^{x+i\theta})\, d\theta_1 \dots d\theta_r \Big\rangle. \tag{2.26}$$

On profite ici de cette définition pour rappeler quelques principes relatifs au *pull-back* (*image réciproque*) des formes différentielles et, par dualité, lorsque toutefois cela s'avère possible, au *pushforward* (*image directe*) des courants d'une variété différentielle (ou analytique complexe) $\mathscr{Y}$ dans une autre $\mathscr{X}$.

Supposons que $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ soient deux variétés différentielles (respectivement analytiques complexes) de dimensions réelles (respectivement complexes) $n_{\mathscr{X}}$ et $n_{\mathscr{Y}}$ et que $\pi : \mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{X}$ soit un morphisme de classe C^∞ (respectivement holomorphe). Si ω est une k-forme différentielle (respectivement une (p,q)-forme différentielle) dans un ouvert U

de $\mathscr{X}$, on sait toujours définir une k (respectivement (p,q))-forme différentielle $\pi^*[\omega]$ dans l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ en exprimant les coordonnées locales $x_1,...,x_{n_{\mathscr{X}}}$ (respectivement $z_1,...,z_{n_{\mathscr{X}}}$) dans une carte locale de la variété but en fonction des coordonnées locales $y_1,...,y_{n_{\mathscr{Y}}}$ (respectivement $w_1,...,w_{n_{\mathscr{Y}}}$) dans une carte locale de la variété source :

$$x_\ell = \pi_\ell(y) \quad (\text{resp. } z_\ell = \pi_\ell(w)), \quad , \ \ell = 1,...,n_{\mathscr{X}}.$$

En coordonnées locales :

$$\pi^*\Big[\sum_{\#I=k} \omega_I(x)\, dx_I\Big] := \sum_{\#I=k} \omega_I(\pi_1(y),...,\pi_{n_{\mathscr{X}}}(y)) \bigwedge_{\ell=1}^{k} d[\pi_{i_\ell}(y)],$$

$$\text{respectivement} \quad \pi^*\Big[\sum_{\#I=p,\#J=q} \omega_{I,J}(z)\, dz_I \wedge d\bar{z}_J\Big] :=$$

$$\sum_{\#I=p,\#J=q} \omega_{I,J}(\pi_1(w),...,\pi_{n_{\mathscr{X}}}(w)) \bigwedge_{\ell=1}^{p} d[\pi_{i_\ell}(w)] \wedge \bigwedge_{\ell=1}^{q} d[\overline{\pi_{j_\ell}(w)}].$$

On appelle cette forme $\pi^*[\omega]$ le *pullback via* π de la forme ω.

Pour ce qui est du transport des courants, il s'opère dans l'autre sens cette (un courant dans l'ouvert $\pi^{-1}(U) \subset \mathscr{Y}$ peut être transporté en un courant dans $U \subset \mathscr{X}$, mais à condition toutefois que le morphisme π soit topologiquement propre (l'image réciproque d'un compact de $\mathscr{Y}$ doit être un compact de $\mathscr{X}$). Si T est un courant de dimension $n-k$ (respectivement de bidimension $(n-p,n-q)$) dans $\pi^{-1}(U)$ à valeurs par exemples complexes, on définit un courant $\pi_*[T]$ (que l'on appelle *image directe de* T *via* π (ou aussi *pushforward* de T *via* π) suivant le principe de dualité :

$$\langle \pi_*[T], \varphi\rangle = \langle T, \varphi\circ\pi\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}^{n-k}(U,\mathbb{C})) \ \big(\text{resp. } \forall\,\varphi\in\mathcal{D}^{n-p,n-q}(U,\mathbb{C})\big).$$

Ce n'est toutefois pas ce principe que nous avons utilisé ici pour définir la notion de super-courant puisque nous avons défini un courant dans $\mathrm{Log}^{-1}(U)$ à partir d'une liste de coefficients distributions $T_{I',J'}$ dans U. Nous avons cependant exploité la propreté de l'application Log, mais sous une forme différente (en « moyennisant » comme dans (2.26) les fonctions-test dans $\pi^{-1}(U)$ pour les transformer en fonctions-test dans U).

Ce sont précisément les (p,q)-superformes réelles que l'on relève par image réciproque en des objets sur l'analytification $\mathscr{X}^{\rm an}$ d'une variété algébrique de dimension n définie sur un corps équipé d'une valeur absolue ultramétrique. Les $(n-p,n-q)$-supercourants sur $\mathscr{X}^{\rm an}$ sont alors construits par dualité. Le relèvement des (p,q)-superformes réelles depuis les ouverts de $\mathbb{R}^N$ ($N\in\mathbb{N}^*$) s'opère *via* des « cartes locales » qui sont cette fois des applications moment correspondant à des morphismes de tropicalisation [**CLD, Gub**].

2.3. Nombres de Lelong et théorème de Siu

2.3.1. Nombre de Lelong d'un (p,p) courant positif fermé en un point de son support

Soit T un (p,p)-courant positif fermé sur une variété analytique complexe de dimension $n>p$ et z un point du support de T. Soit ϕ une fonction psh continue dans un voisinage U_z du point z telle qu'il existe $R>0$ de manière à ce que l'ensemble

$\operatorname{Supp} T \cap \{\zeta \in U_z\,; \phi(\zeta) < R\}$ soit relativement compact dans U_z ; On peut définir dans U_z le courant positif $T \wedge (dd^c\phi)^{\wedge^{n-p}}$ et observer que, du fait que ce courant est un courant positif, la fonction

$$r \in]-\infty, R[\longmapsto \int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c\phi)^{\wedge^{n-p}}$$

est une fonction croissante de r. Comme cette fonction est aussi positive, donc minorée par 0, elle admet une limite lorsque r tend vers $-\infty$, limite que l'on note $\nu(T; z; \phi)$. En composant la fonction psh ϕ avec une fonction affine strictement croissante χ : $t \mapsto \alpha t + \beta$ ($\alpha > 0$), on note que

$$\int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ \phi])^{\wedge^{n-p}} = \alpha^{n-p} \int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c\phi)^{\wedge^{n-p}}.$$

Si χ est une fonction convexe strictement croissante (donc une enveloppe convexe supérieure de telles fonctions affines strictement croissantes), il vient par passage à la limite croissante que

$$\int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c[\chi \circ \phi])^{\wedge^{n-p}} = (\chi'_-(r))^{n-p} \int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c\phi)^{\wedge^{n-p}}.$$

Ceci vaut en particulier pour la fonction exponentielle et l'on a

$$\int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c[e^{\phi}])^{\wedge^{n-p}} = e^{r(n-p)} \int_{\{\phi<r\}} T \wedge (dd^c\phi)^{\wedge^{n-p}}.$$

La fonction psh ϕ_z : $\zeta \mapsto \log \|\zeta - z\|^2$ n'est certes pas continue en z. Cependant, on montre en la régularisant que le nombre de Lelong attaché à la fonction $\phi = \log \|\zeta - z\|^2$ est aussi atteint comme (dans une carte locale)

$$\begin{aligned} \nu(T; z) = \nu(T; z; \phi_z) &= \lim_{\eta \to 0^+} \left[\frac{\left\langle T, \chi_{B_n(z,\eta)}\, (dd^c\|\zeta - z\|^2)^{\wedge^{n-p}} \right\rangle}{\eta^{2(n-p)}} \right] \\ &= \lim_{\eta \to 0^+} \left[\frac{\displaystyle\int_{B_n(z,\eta)} T \wedge \frac{\pi^{n-p}}{(n-p)!} (dd^c\|\zeta - z\|^2)^{\wedge^{n-p}}}{\operatorname{vol}_{2(n-p)}(B_{n-p}(0,\eta))} \right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Remarque 2.2 (à propos du choix de la fonction psh ϕ)**.** On peut conditionner la définition d'un nombre de Lelong $\nu(T; z; \phi)$ pour un courant positif fermé T en un point z de son support au choix d'une fonction psh réelle ϕ dans un voisinage U_z de z dans $\mathscr{X}$ telle que l'ensemble $\operatorname{Supp} T \cap \{\zeta \in U_z\,;\, \phi(\zeta) < R\}$ soit relativement compact dans U_z. Le nombre de Lelong « ordinaire » correspond au choix particulier de $\phi = \phi_z$: $\zeta \mapsto \log \|\zeta - z\|^2$ (dans une carte locale) ; c'est celui que nous ferons dans ce cours, la notation étant dans ce cas simplement $\nu(T; z)$.

Exemple 2.1 (le cas des courants d'intégration)**.** Si A est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathscr{X}$ défini localement (au voisinage d'un point z_0 de $\mathscr{X}$) par une équation $\{f_{z_0} = 0\}$ (où f_{z_0} est sans facteurs carrés dans sa factorisation comme élément de $\mathcal{O}_{\mathscr{X},z_0}$), le nombre de Lelong $\nu_{z_0}([A])$ du courant d'intégration (multiplicités non prises en compte) sur le sous-ensemble analytique fermé A en z_0 est égal à la multiplicité $\mu_0(f_{z_0}\circ\varphi_{z_0}^{-1})$ en 0 de

$$h \mapsto (f_{z_0}\circ\varphi_{z_0}^{-1})(h) = \sum_{\ell=\mu_0(f_{z_0}\circ\varphi_{z_0}^{-1})} P_\ell(h)$$

(où φ_{z_0} figure une carte locale centrée en z_0, *i.e.* telle que $\varphi_{z_0}(z_0) = (0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$, et P_ℓ est la partie homogène de degré ℓ dans le développement de Taylor au voisinage de l'origine. Dans le cas plus général où A est un sous-ensemble analytique fermé quelconque de $\mathscr{X}$ de dimension pure $n-p$ défini au voisinage de z_0 comme le lieu des zéros communs des germes $f_{z_0,1}, ..., f_{z_0,m}$, le nombre de Lelong $\nu_{z_0}([A])$ est égal au nombre de feuillets du revêtement ramifié $A \to \mathbb{C}^{n-p}_w$ lorsque $z_0 + z = Aw$ figure un changement générique de coordonnées locales au voisinage de z_0. Ce résultat est une conséquence de l'expression du nombre de Lelong comme (2.27) ; c'est un résultat connu comme lemme de Thie. Par exemple, si $A = \{z^2 - w^3 = 0\}$ désigne la courbe singulière dite *cusp* dans $\mathbb{C}^2$, le nombre de Lelong du courant $[z^2 - w^3 = 0]$ vaut 1 en tout point de A différent de $(0,0)$ tandis qu'il vaut 2 en $(0,0)$.

2.3.2. Théorème de Siu

Un résultat profond (et difficile) concernant les courants positifs est le *théorème de stratification de Y. T. Siu* ([**Siu**], voir aussi [**De1**] pour une première approche).

THEORÈME 2.1 (théorème de stratification de Y. T. Siu). *Tout courant positif fermé T de type (p,p) sur une variété analytique complexe $\mathscr{X}$ de dimension n se décompose de manière unique sous la forme de la somme de deux courants (p,p) positifs fermés S_T (partie significative ou encore « atomique ») et N_T (partie « négligeable » ou encore « diffuse ») qu'il est possible de décrire ainsi :*

— *le courant S_T se représente comme la limite*

$$S_T = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \lambda_k\,[A_k],$$

où les nombres λ_k sont des nombres réels positifs et les $[A_k]$ des courants d'intégration sur des sous-ensembles analytiques fermés irréductibles de $\mathscr{X}$ de dimension $n-p$; de plus, pour chaque compact K de $\mathscr{X}$, seul un nombre fini de sous-ensembles analytiques fermés A_k ($k \in \mathbb{N}$) interceptent K ;

— *le courant N_T est « de masse diffuse » au sens suivant : pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble*

$$\{z \in \mathscr{X}\,;\, \nu_z(N_T) \geq \epsilon\}$$

est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathscr{X}$ [1] *de codimension <u>strictement</u> supérieure à p.*

1. C'est là le point difficile (et essentiel) du théorème de Siu : si Θ est un (p,p)-courant positif fermé et si ϵ est un nombre strictement positif, le sur-ensemble de niveau

$$\{z \in \mathscr{X}\,;\, \nu_z(\Theta) \geq \epsilon\}$$

est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathscr{X}$ de codimension au moins égale à p.

Bibliographie

[AM] E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Enseignement des Mathématiques, Éditions Cassini, Paris, 2004.

[ASWY] M. Andersson, H. Samuelsson, E. Wulcan, A. Yger, Segre numbers, a generalized King's formula, and local intersections, à paraitre dans J. Reine Angew. Math, 2014, `arxiv.org/pdf/1009.2458.pdf`.

[Bern] I. N. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Functional Analysis and its applications **6** (1972), pp. 273-285. J. E. Björk, *Rings of of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Bor] A. Borel et al, Algebraic D-modules, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1987.

[BPS] J.I. Burgos Gil, P. Philippon, M. Sombra, *Arithmetic Geometry of Toric Varieties. Metrics, Measures and Heights*, Astérisque vol. 360, SMF, 2014.

[BT1] E. Bedford et B.A.Taylor, The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, Inventiones Math. 37, 1976, pp.1-44.

[BT2] E. Bedford et B.A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149, 1982, pp. 1-41.

[CDKV] E.M. Chirka, P. Dolbeault, G.M. Kenkhin, A.G. Vitusshkin, *Introduction to Complex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.

[CLD] A. Chambert-Loir, A. Ducros, Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich, *preprint*, 2012, available on line : `arXiv:1204.6277v1`

[CLO1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics 135, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[De0] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible en ligne sur `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`

[De1] J.P. Demailly, Courants positifs et théorie de l'intersection, Gaz. Math. **53** (1992), pp. 131–159.

[Eis] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer Verlag, 1995.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Blackwell, 1994.

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Mathematics : Theory and Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[Gub] W. Gubler, Forms and currents on the analytification of an algebraic variety (after Chambert-Loir and Ducros), `arXiv:1303.7364v2`

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, 8th edition, Springer, 1997.

[Lag1] A. Lagerberg, Super currents and tropical geometry, Math. Z. 270 (2012), no. 3-4, 1011-1050, disponible en ligne sur `arXiv:1008.2856`.

[Lang] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Lel] P. Lelong, *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New-York, 1968.

[Licht] B. Lichtin, *Generalized Dirichlet series and B-functions, Compositio Math.* **65** (1988), pp. 81–120.

[PaR0] M. Passare, H. Rullgård, Amœbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, preprint disponible ici :
`http://www2.math.su.se/reports/2000/10/2000-10.pdf`

[PaR] M. Passare, H. Rullgård, Amœbas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, Duke Math. Journal, 12, no. 3, 2004, pp. 481-507.

[Rash] A. Rashkovski, Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions, Ann. Polon. Math. 75 (3), 2000, pp. 213–231.

[RT] J. Rauch, B.A. Taylor, The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampère equation, Rocky Mountain J. Math. 7, 1977, pp. 345-364.

[Rud] W. Rudin, Real and Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1986 (aussi en français chez Dunod : Analyse réelle et complexe, 1998).

[Schw] L. Schwartz, division par une fonction holomorphe sur une variété analytique quelconque, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol 2 (9), 1955, pp. 181-209.

[Siu] Y. T. Siu, Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Inventiones Math. **27** (1974) pp. 53–156.

[YanC] A.Yger, *Analyse Complexe, un regard analytique et géométrique*, Collection Références Sciences, éditions Ellipses, Paris, 2014.

[YBraz] A. Yger, Éléments d'Algèbre commutative et de Géométrie Complexe, cours de Master 2, Université Marien Nouagbi de Brazzaville, Septembre 2014.

[Ydist] A. Yger, Distributions, notes d'un cours de Master 1, en ligne sur le site `web` `DEA2015` dédié au cours.

[Ytrop] A. Yger, Tropical geometry and Amœbas, cours de M2, Bordeaux 2012 :
`https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00728880v2`

[YNiam] A. Yger, Géométrie différentielle complexe, disponible en ligne sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/67/65/74/PDF/Cours-Niamey.pdf` ou aussi sur le site `web` dédié au cours.