UE N1MA7104
Devoir surveillé, Jeudi 3 Novembre 2011, 14h00-17h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1.

Soit U un ouvert du plan complexe.

a) *Soit φ une fonction continue de U dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Que vaut la limite*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\, dx\, dy \Big) \ ?$$

On remarque que

$$\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\, dxdy - \varphi(z_0) = \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} (\varphi(x+iy) - \varphi(z_0))\, dxdy$$

(puisque la surface du disque fermé $\overline{D(z_0,\epsilon)}$ vaut $\pi\epsilon^2$). On a donc

$$\begin{aligned}
&\Big| \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\, dxdy - \varphi(z_0) \Big| \\
&\leq \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} |\varphi(x+iy) - \varphi(z_0)|\, dxdy \leq \sup_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} |\varphi - \varphi(z_0)|.
\end{aligned}$$

Comme la fonction φ est continue en z_0, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} |\varphi - \varphi(z_0)| = 0.$$

On a donc par conséquent :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\, dx\, dy \Big) = \varphi(z_0).$$

b) *Soit ψ une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{C}$. En utilisant seulement la formule de Green-Riemann, prouver que, si $\overline{D}$ est un disque fermé inclus dans U, on a l'égalité :*

$$\iint_{\overline{D}} \Big[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \Big] (x+iy)\, dxdy = 0.$$

La 1-forme $d\psi$ est une 1-forme de classe C^1 dans U, exacte dans U. Si z_0 désigne le centre de $\overline{D}$ et ϵ son rayon, on a donc

$$\int_{t\in[0,1]\mapsto z_0+\epsilon e^{2i\pi t}} d\psi = 0$$

(l'intégrale d'une 1-forme exacte sur un lacet C^1 est nulle, second volet de la Proposition 1.3 du cours). Grâce à la formule de Green-Riemann (appliquée au compact à bord orienté $\overline{D}$, Théorème 1.3 du cours), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{t\in[0,1]\mapsto z_0+\epsilon e^{2i\pi t}} d\psi &= \int_{(\partial\overline{D})_+} d\psi = \\ = \iint_{\overline{D}} d[d\psi] &= \iint_{\overline{D}} \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big)\Big](x+iy)\,dxdy. \end{aligned}$$

c) *Que peut on conclure de* **a)** *et* **b)** *concernant la fonction*

$$x+iy\in U \longmapsto \Big[\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\Big](x+iy)\ ?$$

Si ψ est de classe C^2 dans U, la fonction

$$\varphi\ : x+iy\in U \longmapsto \Big[\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x}\Big](x+iy)$$

est continue. Si z_0 est un point arbitraire de U, on a, d'après le **b)**, pour $\epsilon > 0$ assez petit :

$$\frac{1}{\pi\epsilon^2}\iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \varphi(x+iy)\,dx\,dy = 0.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 et en appliquant le résultat du **a)**, il vient $\varphi(z_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout z_0 dans U, on en déduit que φ est identiquement nulle dans U (lemme de Schwarz sur les dérivées partielles croisées[1]).

Exercice 2.

Soit $R > 0$. On considère dans $\mathbb{C}^*$ les deux 1-formes différentielles

$$\begin{aligned} z = x+iy \longmapsto \omega_0(z) &:= \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \\ z = x+iy \longmapsto \omega_1(z) &:= xdy - ydx. \end{aligned}$$

[1]En fait, le fait que ψ soit différentiable à l'ordre 2 en tout point suffirait, mais le lemme de Schwarz ne saurait sous cette simple hypothèse être prouvé suivant cette approche, c'est-à-dire *via* le recours à la formule de Green-Riemann.

a) *Ces 1-formes différentielles sont-elles fermées dans $\mathbb{C}^*$? Sont-elles exactes dans $\mathbb{C}^*$?*

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$d\omega_1(z) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2\, dx \wedge dy \neq 0.$$

On en déduit, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, puisque $d[f\omega](z) = (f d\omega + df \wedge \omega)(z)$,

$$\begin{aligned} d\omega_0(z) &= \frac{2dx \wedge dy}{x^2+y^2} - \frac{2(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2} \wedge (xdy - ydx) \\ &= \frac{2dx \wedge dy}{x^2+y^2} - \frac{2(x^2+y^2)\, dx \wedge dy}{(x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

La forme ω_0 est donc fermée dans $\mathbb{C}^*$, tandis que ω_1 ne l'est pas. La forme ω_1 n'est pas exacte (car toute forme exacte et de classe C^1 dans un ouvert est fermée). La forme ω_0 n'est pas non plus exacte car

$$\int_{t\in[0,1]\longmapsto e^{2i\pi t}} \omega_0(\zeta) = \int_{t\in[0,1]\longmapsto e^{2i\pi t}} \omega_1(\zeta) = 2 \iint_{\overline{D(0,1)}} dx \wedge dy = 2\pi \neq 0$$

d'après le théorème de Green-Riemann[2].

b) *Vérifier*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \quad \omega_0(z) = -i\Big(\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\, d(\log|z|^2)\Big),$$

puis la formule

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = -i \int_{\gamma_R} \overline{\zeta}\, d\zeta,$$

où γ_R désigne le lacet : $t \in [0,1] \longmapsto R\, e^{2i\pi t}$.

On remarque que l'on a, dans $\mathbb{C}^*$, l'égalité entre 1-formes :

$$d(\log|z|^2) = d(\log(z\overline{z})) = \frac{dz}{z} + \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}.$$

On a donc, dans $\mathbb{C}^*$, l'égalité entre 1-formes :

$$-i\Big(\frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\, d(\log|z|^2)\Big) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{dz}{z} - \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\Big) = \mathrm{Im}\,(dz/z) = \frac{\mathrm{Im}\,(\overline{z}dz)}{|z|^2} = \omega_0(z).$$

On a, dans $\mathbb{C}$, l'égalité entre 1-formes :

$$\overline{z}\, dz = (x - iy)(dx + idy) = d(x^2+y^2) + i\omega_1(z).$$

[2]Attention, $\mathbb{C}^*$ n'est pas un ouvert étoilé ! Il ne faut pas se laisser ici abuser par la notation.

On a donc bien

$$\int_{\gamma_R} \overline{\zeta}\, d\zeta = i \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta)$$

puisque l'intégrale sur un lacet d'une 1-forme exacte est nulle. En multipliant par $-i$, on obtient la formule demandée.

c) *Calculer de deux manières différentes les intégrales curvilignes*

$$\int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta).$$

On remarque que

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = R^2 \int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta).$$

On a, d'après la première formule établie au **b)**,

$$\int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta) = -i \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \times (2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma_R), 0)) = 2\pi.$$

Cela fournit un premier moyen de calculer les valeurs (respectivement 2π et $2\pi R^2$) des deux intégrales demandées. En utilisant la seconde formule établie au **b)**, ce qui donne

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta)\, d\zeta = -i \int_0^1 Re^{-2i\pi t} \times (2i\pi Re^{2i\pi t}) dt = 2\pi R^2,$$

on dispose d'un second moyen de calculer les deux intégrales demandées.

d) *Soit f une fonction à valeurs complexes continue dans $\overline{D(0,R)}$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(0,R)$.*

– *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma_R} (\overline{\zeta} - f(\zeta))\, d\zeta.$$

– *Déduire du calcul précédent l'inégalité*

$$\sup_{|\zeta|=R} |\overline{\zeta} - f(\zeta)| \geq R.$$

– *Montrer, si l'on suppose de plus $R \geq 1$, que l'on a l'inégalité*

$$\sup_{\theta \in [0,2\pi]} |1 - f(e^{i\theta})| \geq 1.$$

Comme f est holomorphe dans $D(0,R)$, on a, pour tout $\epsilon \in]0,R[$,

$$\int_{\gamma_{R-\epsilon}} f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

puisque[3] l'ouvert $D(0,R)$ est simplement connexe (en particulier, le lacet $\gamma_{R-\epsilon}$ est homotope au lacet constant $t \in [0,1] \mapsto 0$) et que la forme $f(\zeta)\,d\zeta$ est localement exacte dans $D(0,R)$ (on applique alors la Proposition 1.12, volet 2). En faisant tendre ϵ vers 0 et en utilisant la continuité de f jusqu'au bord, on en déduit

$$\int_{\gamma_R} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

On a donc

$$\int_{\gamma_R} (\overline{\zeta} - f(\zeta))\,d\zeta = \int_{\gamma_R} \overline{\zeta}\,d\zeta = i\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = 2i\pi R^2.$$

On en déduit

$$2\pi R^2 = \Big|\int_{\gamma_R} (\overline{\zeta} - f(\zeta))\,d\zeta\Big| \leq 2\pi R \times \sup_{|\zeta|=R} |\overline{\zeta} - f(\zeta)|,$$

d'où l'inégalité demandée au second *item* en divisant par R. Si f s'annule en $z=0$, la fonction

$$z \in D(0,R)\setminus\{0\} \longmapsto f(z)/z$$

se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe dans $D(0,1)$ et continue dans $\overline{D(0,1)}$. Il résulte du second *item* (ici $R=1$, et f est remplacée par $\widetilde{f}$) que

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |e^{-i\theta} - \widetilde{f}(e^{i\theta})| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |e^{-i\theta} - e^{-i\theta} f(e^{i\theta})| = \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |1 - f(e^{i\theta})| \geq 1.$$

Exercice 3.

a) *Soit γ le lacet $t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}$. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \binom{2n}{n}.$$

Grâce à la formule du binôme,

$$(1+z)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k.$$

[3] On pourrait aussi justifier ce fait en invoquant la formule de Green-Riemann.

Comme la forme $z^{k-n-1}\,dz$ est exacte dans $\mathbb{C}^*$ pour $k \neq n$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\binom{2n}{n}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \binom{2n}{n}$$

(tous les autres termes du développement binomial de $(1+\zeta)^{2n}$ contribuent à une intégrale curviligne nulle, car intégrale curviligne d'une 1-forme exacte au voisinage du support du chemin).

b) *Déduire du* **a)** *la valeur du nombre*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\binom{2n}{n}.$$

On remarque (en utilisant le résultat établi au **a)**) que, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \Big(\sum_{n=0}^{N}\big(\frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta}\big)^n\Big)\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Comme la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0}\big(\frac{(1+z)^2}{6z}\big)^n$$

converge normalement sur le cercle $|\zeta| = 1$ car

$$\sup_{|\zeta|=1}\Big|\frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta}\Big| = \frac{2}{3} < 1,$$

on peut affirmer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\binom{2n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{1-\frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{6\,d\zeta}{4\zeta-\zeta^2-1}.$$

Or

$$4X - X^2 - 1 = (X-\alpha)(\beta - X), \quad \text{avec} \quad \alpha = 2-\sqrt{3}, \quad \beta = 2+\sqrt{3}.$$

En utilisant la formule de Cauchy avec la fonction

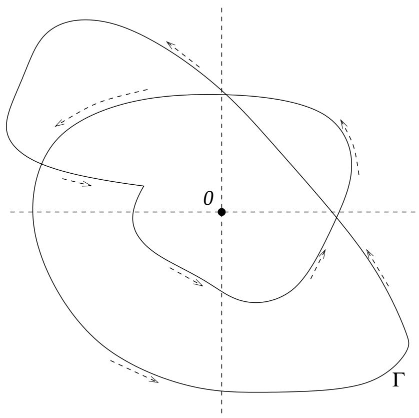
$$f\ : z \longmapsto \frac{6}{\beta - z}$$

(holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$), on trouve

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{6\,d\zeta}{4\zeta-\zeta^2-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} = f(\alpha) = \frac{6}{\beta-\alpha} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

c) *On remplace γ par le lacet continu Γ figuré sur la figure ci-dessous et parcouru une seule fois dans le sens indiqué. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale curviligne*

$$\int_\Gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta.$$

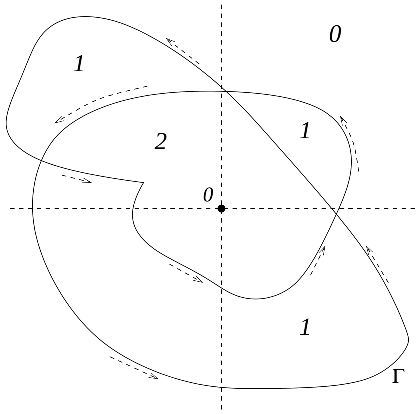


On a cette fois $\mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = 2$ (au vu de la figure). Donc, en reprenant les calculs du **a)**, on obtient cette fois

$$\int_\Gamma \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \binom{2n}{n} \times \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \binom{2n}{n} \times \mathrm{Ind}(\Gamma, 0) = 2 \times \binom{2n}{n}.$$

d) *Décrire explicitement, en calculant les valeurs qu'elle prend et en précisant où elle prend ces valeurs, la fonction*

$$z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}\,\Gamma \longmapsto \mathrm{Ind}(\Gamma, z).$$



Les valeurs prises par la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\Gamma, z)$ hors du support de Γ, sont $0, 1, 2$. Sur la figure, on a figuré les composantes connexes du complémentaire du support de Γ et les valeurs prises sur chacune de ces composantes par cette fonction.

Exercice 4.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $0 < |z_1| < |z_2|$ et $f\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière.

a) *Soit R un nombre strictement positif, distinct de $|z_1|$ et $|z_2|$. On note γ_R le lacet : $t \in [0,1] \longmapsto Re^{2i\pi t}$. Calculer, en fonction des valeurs de f aux points z_1 et z_2, l'intégrale curviligne*

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta$$

(on discutera la valeur de cette intégrale suivant les valeurs de R).

Cette intégrale se calcul grâce à la formule de Cauchy (version analytique, Théorème 2.5 du cours). On remarque (décomposition en éléments simples) que, pour tout nombre complexe $\zeta \neq z_1, z_2$, on a

$$\frac{1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2}\Big(\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2}\Big),$$

ce qui implique que l'on puisse écrire, pour tout $R > 0$ tel que $R \neq |z_1|, |z_2|$,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta = \frac{1}{z_1 - z_2}\Big(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta - \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2}\, d\zeta\Big). \qquad (\dagger)$$

On doit distinguer trois cas pour calculer cette intégrale.

– Si $R < |z_1| < |z_2|$, les deux fonctions $z \mapsto f(z)/(z - z_j)$, $j = 1, 2$, sont holomorphes au voisinage du disque fermé $\overline{D(0,R)}$. Les deux intégrales

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_j}\, d\zeta, \quad j = 1, 2,$$

sont donc nulles, car intégrales sur un lacet d'un ouvert localement connexe d'une forme localement exacte[4]. On a dans ce cas

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta = 0.$$

– Si $|z_1| < R < |z_2|$, on a toujours, pour les mêmes raisons que dans l'*item* précédent,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2}\, d\zeta = 0.$$

La formule de Cauchy (version analytique) dans $K = \overline{D(0,R)}$, donne

$$2i\pi f(z_1) = \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1}\, d\zeta.$$

On a donc, dans ce cas

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta = 2i\pi \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2}.$$

– Si $|z_1| < |z_2| < R$, on doit appliquer la formule de Cauchy (toujours dans $K = \overline{D(0,R)}$) à chacune des deux intégrales figurant au second membre de (†) et l'on obtient alors :

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta = 2i\pi\, \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}. \qquad (\dagger\dagger)$$

b) *On suppose qu'il existe $\epsilon \in]0,1[$ et $C > 0$ tels que la fonction f vérifie*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq C(1 + |z|)^{1-\epsilon}. \qquad (*)$$

Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta \Big) = 0.$$

Que peut-on dire alors des valeurs de f en z_1 et z_2 ?

[4] On peut aussi invoquer dans $K = \overline{D(0,R)}$ la formule de Green-Riemann.

On a, pour $|z_1| < |z_2| < R$, compte tenu du fait que le module d'une intégrale est majoré par l'intégrale du module, et de l'inégalité triangulaire « gauche » $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$, la majoration :

$$\Big|\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta\Big| \leq \frac{1}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \times 2\pi R \times \sup_{|\zeta| = R} |f|$$
$$\leq 2\pi C \times \frac{R(1+R)^{1-\epsilon}}{(R - |z_2|)^2}.$$

Comme

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{R(1+R)^{1-\epsilon}}{(R - |z_2|)^2} = 0$$

car $2 - \epsilon < 2$, on en déduit bien

$$\lim_{R \to +\infty} \Big(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, d\zeta\Big) = 0.$$

c) *Déduire du résultat établi au* **b)** *que, si f est une fonction entière vérifiant la condition $(*)$ pour un certain $\epsilon \in]0, 1[$ et une certaine constante $C > 0$, alors f est nécessairement constante.*

Si f vérifie la condition $(*)$ et si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes distincts (arbitraires), on conclut, en combinant les résultats obtenus au **b)** et dans le troisième *item* de la discussion **a)** (notons que la formule $(\dagger\dagger)$ est valable si $R > \max(|z_1|, |z_2|)$, même si z_1 et z_2 ont même module), que $f(z_1) = f(z_2)$. Comme z_1 et z_2 sont supposés distincts, mais arbitraires, on en déduit que f est constante dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5.

En justifiant toutes les étapes du raisonnement avec précision, démontrer, pour tout z dans $D(0,1) \setminus \{0\}$, les formules :

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\bar{z}} &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\, d\zeta + \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}\Big) \\
&= z^2 + \frac{1}{\pi z} \Big(\iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta}\Big) \\
&= z^2 + \frac{1}{\pi z} \iint_{|\zeta| \leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}
\end{aligned}$$

(où $\gamma\ : t \in [0,1] \longmapsto e^{2i\pi t}$).

Soit $z \in D(0,1) \setminus \{0\}$. Considérons $0 < \epsilon < |z|$, le compact à bord orienté $K_\epsilon := \overline{D(0,1)} \setminus D(0, \epsilon)$, et la fonction

$$\varphi\ : z \mapsto \frac{z}{\bar{z}},$$

de classe C^1 au voisinage de K_ϵ. Notons $\gamma_\epsilon \ : t \in [0,1] \mapsto \epsilon e^{2i\pi t}$. La formule de Cauchy-Pompeiu (Proposition 1.6 du cours) nous assure que

$$\begin{aligned}
\frac{z}{\overline{z}} &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_\gamma \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big) - \frac{1}{\pi}\iint_{\epsilon\leq|\zeta|\leq 1} \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\Big[\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big](\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\\
&= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_\gamma \zeta^2\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big) + \frac{1}{\pi}\iint_{\epsilon\leq|\zeta|\leq 1} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}^2}\,\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)}\\
&= \frac{1}{2i\pi}\Big(\int_\gamma \zeta^2\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big) + \frac{1}{\pi}\iint_{\epsilon\leq|\zeta|\leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}
\end{aligned}$$

(on note que $\overline{\zeta} = 1/\zeta$ si $|\zeta| = 1$, ce que l'on a utilisé en passant de la ligne 1 à la ligne 2 pour transformer la première intégrale curviligne au second membre). On remarque ensuite que

$$\Big|\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big| \leq 2\pi\epsilon \times \frac{1}{|z| - \epsilon} \times \sup_{|\zeta|=\epsilon} |\zeta/\overline{\zeta}| = \frac{2\pi\epsilon}{|z| - \epsilon}.$$

Cette majoration implique

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}\Big) = 0,$$

et l'on déduit des égalités ci dessus (résultant de la formule de Cauchy-Pompeiu dans K_ϵ), en faisant tendre ϵ vers 0, que

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\,d\zeta + \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\pi}\iint_{\epsilon\leq|\zeta|\leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}\Big). \tag{$\star$}$$

On peut d'ailleurs noter que l'intégrale double

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}$$

est convergente au sens de Lebesgue (car $z \neq 0$) et que ($\star$) s'exprime aussi :

$$\frac{z}{\overline{z}} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{\pi}\iint_{\overline{D(0,1)}} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\zeta}}\Big)^2\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \tag{$\star'$}$$

grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'après la formule de Cauchy (version analytique) dans $K = \overline{D(0,1)}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z}\,d\zeta = z^2. \tag{$\star\star$}$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\Big),$$

on peut bien aussi écrire

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{D(0,1)}} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\overline{\zeta}}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{\pi z}\Big(\iint_{|\zeta|\leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\overline{\zeta}}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \iint_{|\zeta|\leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\overline{\zeta}}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta}\Big). \tag{$\star\star\star$}$$

La seconde ligne des égalités demandées est bien justifiée (on reporte juste $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ dans $(\star')$). En utilisant les coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on remarque enfin pour conclure que

$$\iint_{|\zeta|\leq 1} \Big(\frac{\zeta}{\overline{\overline{\zeta}}}\Big)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = \int_{r\in[0,1]} \int_{\theta\in[0,2\pi]} e^{4i\theta} \frac{1}{re^{i\theta}}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} e^{3i\theta}\, d\theta = 0.$$

Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 des égalités demandées est justifié.