UE MA4021, 2011-2012
Devoir surveillé, Jeudi 5 Avril 2012, 14h00-15h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice 1.

Pour les intégrales données ci-dessous, dessiner le domaine d'intégration dans $\mathbb{R}^2$ (la fonction f est chaque une fonction continue dans ce domaine). Reécrire ces intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration des variables :

$$\int_0^{2a}\Big(\int_{x-a}^{3a-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx \qquad (\text{où } a>0),$$
$$\int_0^{1}\Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx, \quad \int_1^{4}\Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

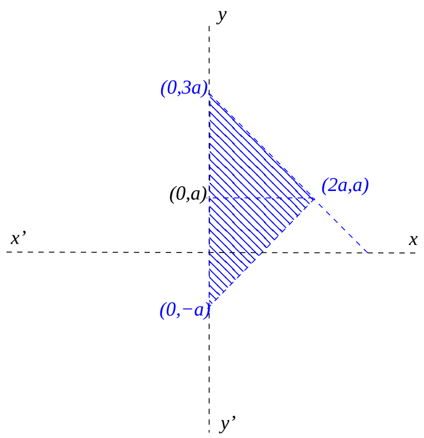

FIGURE 1 – Exercice 1, première intégrale

Pour la première intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure 1. L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2a}\Big(\int_{x-a}^{3a-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx &= \int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{y+a} f(x,y)\,dx\Big)\,dy \\ &\quad + \int_a^{3a}\Big(\int_0^{3a-y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.\end{aligned}$$

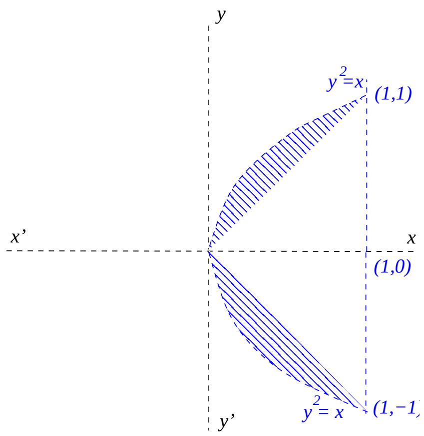

Figure 2 – Exercice 1, seconde intégrale

Pour la seconde intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure 2. L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx &= \int_{-1}^1 \Big(\int_{y^2}^1 f(x,y)\,dx \Big)\,dy \\ &= 2\int_0^1 \Big(\int_{y^2}^1 f(x,y)\,dx \Big)\,dy.\end{aligned}$$

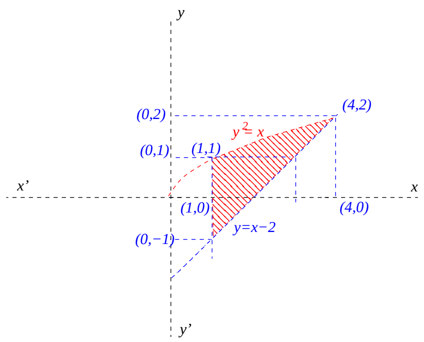

Figure 3 – Exercice 1, troisième intégrale

Pour la troisième intégrale, le domaine d'intégration est représenté sur la figure 3. L'interversion des variables d'intégration se lit sur cette figure et donne donc :

$$\int_1^4 \Big(\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy \Big)\, dx \;=\; \int_{-1}^1 \Big(\int_1^{y+2} f(x,y)\, dx \Big)\, dy + \int_1^2 \Big(\int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

Exercice 2. *Soit G le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$G := \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\, ;\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \big\}$$

a) *Représenter ce domaine G sur une figure.*

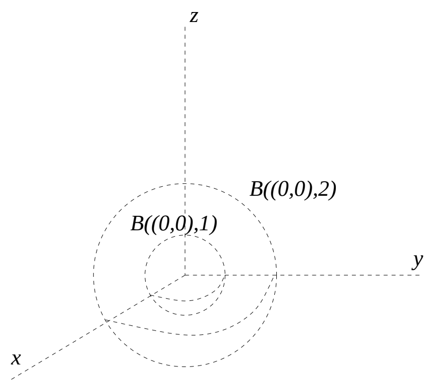

FIGURE 4 – Exercice 2 **a)**, le domaine G

Il s'agit du secteur de la sphère pleine de rayon 2 situé dans le domaine $\varphi \in [0,\pi/2]$ (longitude), $\theta \in [0,\pi/2]$ (colatitude), auquel on a retiré le secteur de la sphère pleine de rayon 1 située dans le même octant. Ce domaine a été représenté sur la figure 4.

b) *En utilisant un changement de variables approprié, calculer l'intégrale triple suivante :*

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz.$$

On effectue le changement de variables en coordonnées sphériques, ρ désignant la distance à l'origine, φ (longitude depuis le plan méridien $\{y=0\}$) et θ (colatitude mesurée depuis le pôle nord $(0,0,1)$) désignant les deux angles d'Euler. On a les formules :

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\, \cos\theta.$$

Le module du jacobien du changement de variables

$$(\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta)$$

vaut $\rho^2 \sin\theta$. Le domaine d'intégration en coordonnées sphériques est :

$$\Big\{(\rho, \theta, \varphi)\,;\, 1 \leq \rho \leq 2,\ \theta \in [0, \pi/2],\ \varphi \in [0, \pi/2]\Big\}.$$

L'intégrale à calculer vaut donc :

$$I = \iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_{\rho\in[1,2]} \int_{\theta\in[0,\pi/2]} \int_{\varphi\in[0,\pi/2]} \rho^3 (\sin\theta)^2\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

On utilise ensuite le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \rho^3\, d\rho \times \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \times \int_0^{\varphi/2} d\varphi \\ &= \Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_1^2 \times \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{15}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

On considère le secteur conique fermé :

$$C := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 4\big\}.$$

a) *Que vaut le demi-angle d'ouverture α de ce secteur conique ?*

Ce demi-angle α a pour tangente 1 ; on a donc $\alpha = \pi/4$.

b) *Exprimer le paramétrage de la surface*

$$\Sigma := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 = z^2,\ 0 < z \leq 4\big\}$$

en fonction des deux paramètres que sont la longitude φ (calculée avec comme plan méridien de référence le plan xOz) et la distance ρ du point courant à l'origine.

Sur cette surface, la colatitude θ est constante et vaut $\pi/4$. On a :

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{2}},\ \ y = \rho \sin\theta \sin\varphi = \frac{\rho \sin\varphi}{\sqrt{2}},\ \ z = \rho\cos\theta = \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Le paramètre ρ varie dans $[0, 4\sqrt{2}]$, tandis que le paramètre φ varie dans $[0, 2\pi]$. On a ainsi le paramétrage

$$(\varphi, \rho) \in [0, 2\pi] \times [0, 4\sqrt{2}] \mapsto \sigma(\varphi, \rho) \in \Sigma.$$

c) *On considère le champ de vecteurs :*

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x + y, 0, z).$$

Calculer (comme une intégrale de surface) le flux sortant de ce champ de vecteurs au travers du bord du secteur conique C, c'est-à-dire l'intégrale de surface :

$$\iint_{\partial C} \langle \vec{F}(x,y,z), \vec{n}_{\text{ext}}(x,y,z)\rangle \, d\sigma_{\partial C}(x,y,z),$$

où ∂C désigne le bord du secteur conique fermé C, $\sigma_{\partial C}$ la mesure de surface sur ce bord, $\vec{n}_{\text{ext}}(x,y,z)$ le vecteur normal unitaire pointant vers l'extérieur de C au point courant (x,y,z) du bord de ce secteur fermé.

Le bord du secteur conique C se compose de deux parties : la surface Σ_0 correspondant au disque de rayon 4 de centre $(0,0,4)$ situé dans le plan $\{z=4\}$, et la surface Σ introduite au **b)**.

La normale extérieure unitaire à la surface Σ_0 et pointant vers l'extérieur de C est le vecteur $(0,0,1)$. De plus, comme Σ_0 est un disque dans le plan horizontal paramétré par $(x,y) \mapsto (x,y,4)$, la contribution de cette surface Σ_0 au flux sortant est :

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 4} \left\langle \vec{F}(x,y,4), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dxdy = 4 \iint_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 4} dxdy = 64\,\pi.$$

Soit

$$(\varphi, \rho) \mapsto \sigma(\varphi, \rho)$$

le paramétrage de Σ donné au **b)**. On a

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\rho \sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ -\rho \end{pmatrix}.$$

Comme la dernière coordonnée (suivant la direction verticale) est négative, ce vecteur est bien dirigé comme l'est la normale extérieure au secteur conique C au point courant $\sigma(\varphi, \rho)$ de la surface Σ. La contribution de la surface Σ

au flux sortant du champ de vecteurs $\vec{F}$ est donc :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\varphi\in[0,2\pi]}\int_{\rho\in[0,4\sqrt{2}]} \Big\langle \vec{F}(\sigma(\varphi,\rho))\,,\ \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ -\rho\end{pmatrix}\Big\rangle\, d\varphi d\rho = \\
= & \frac{1}{2}\int_{\varphi\in[0,2\pi]}\int_{\rho\in[0,4\sqrt{2}]} \rho^2(5\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-1)\,d\varphi\,d\rho \\
= & \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{4\sqrt{2}} \times \int_0^{2\pi}(5\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi-1)\,d\varphi \\
= & \frac{64}{3}\times 2\pi\Big(\frac{5}{2}-1\Big) = 64\,\pi.
\end{aligned}$$

En ajoutant les contributions des deux portions surfaces Σ_0 et Σ, on trouve que le flux sortant du champ de vecteurs $\vec{F}$ au travers du bord de C vaut $64\,\pi + 64\,\pi = 128\,\pi$.

d) *A quelle intégrale volumique ce flux est-il égal ? Calculer cette intégrale volumique et retrouver de cette manière le résultat de la question* **c)** *[on rappelle que le volume d'un secteur conique de révolution est égal à $hA/3$, où A désigne l'aire de la base et h la hauteur].*

Ce flux sortant est égal, d'après la formule de Green-Ostrogradski, à l'intégrale volumique de la divergence du champ $\vec{F}$ dans le secteur conique C. Or cette divergence est ici constante, égale :

$$\frac{\partial}{\partial x}[5x+y] + \frac{\partial}{\partial y}[0] + \frac{\partial}{\partial z}[z] \equiv 6.$$

L'intégrale volumique correspondant au flux calculé au **c)** vaut donc

$$\iiint_C 6\,dxdydz = 6\,\mathrm{vol}_3(C) = 6\times\frac{4\times 16\pi}{3} = 128\,\pi.$$

On retrouve bien le résultat établi à la question **c)**.

Exercice 4.

On considère la courbe plane Γ d'équation $x^3+y^3-3xy=0$.

a) *Déterminer, si t désigne un paramètre strictement positif, l'unique point d'intersection différent de $(0,0)$ de la courbe Γ avec la droite d'équation $y = tx$.*

En cherchant l'intersection de la courbe Γ avec la droite d'équation $y = tx$ ($t>0$), on trouve que l'abscisse du point d'intersection vérifie

$$x^3(1+t^3) - 3tx^2 = 0.$$

Si l'on suppose $x \neq 0$ (on cherche en effet le point d'intersection différent de $(0,0)$), on trouve

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = tx = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

b) *Montrer que le chemin paramétré*

$$\gamma \ : t \in [0,+\infty[\longmapsto \Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

ne passe pas par deux fois le même point. Que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$?

Si $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$ avec $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$, on a $y(t_1)/x(t_1) = t_1 = y(t_2)/x(t_2) = t_2$. L'application

$$t \in]0,\infty[\mapsto \Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

est donc injective, ce qui implique que la courbe paramétrée sur $[0,\infty[$ comme indiqué ne passe pas deux fois par le même point (car l'origine correspond à la seule valeur $t = 0$ du paramètre). Lorsque t tend vers $+\infty$, le point de coordonnées

$$\Big(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\Big)$$

tend vers $(0,0)$.

c) *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx)$$

après avoir remarqué que $xdy - ydx = x^2 dt$ si $y(t) = tx(t)$. En déduire la surface de la boucle de la courbe Γ qui se trouve enserrée par le lacet $\gamma([0,+\infty])$ [on pensera à appliquer ici, après l'avoir rappelé, la formule de Green-Riemann].

L'intégrale curviligne vaut

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}\, x^2(t)\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (y/x)'(t)\, x^2(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2(t)\, dt,\end{aligned}$$

avec :

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \ y(t) = tx(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

En reportant, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\gamma (xdy - ydx) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{1+u}\Big]_0^\infty = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Comme la courbe paramétrée $\gamma\ : t \in [0, +\infty[\mapsto (x(t), y(t))$ est paramétrée injectivement et que

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0,0) = (x(0), y(0)),$$

cette courbe se prolonge à $[0, +\infty]$ un en lacet enserrant un domaine fermé. D'après la formule de Green-Riemann (que l'on applique ici en prenant $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ et K désignant le domaine enserré), on obtient, en remarquant que le paramétrage de γ correspond à un parcours dans le sens trigomométrique (la pente t de la droite $y = tx$ augmente en effet lorsque t croit) :

$$\frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx = \iint_K \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy = \mathrm{vol}_2(K).$$

L'aire de K vaut donc $3/2$.