UE MH836

Devoir surveillé, Mardi 1 Novembre 2011, 9h30-12h30

Durée : 3 heures – Documents non autorisés

Texte (en *italiques*) et corrigé (en roman)

Question de cours. *On rappelle qu'une distribution T (à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite d'ordre fini s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall\, K \subset\subset \Omega,\ \exists C(K) \geq 0, \quad \text{t.q} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega, \mathbb{K}),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C(K)\, N_{K,p}(\varphi).$$

Montrer qu'une distribution T de support compact $K_0 \subset\subset \Omega$ est d'ordre fini. Que peut-on dire de T lorsque K_0 est un singleton ? [on ne demande pas pour ce dernier point de démonstration, seulement un énoncé].

Si T est une distribution à support compact inclus dans le compact K_0 et ρ_η une fonction plateau identiquement égale à 1 au voisinage de K_0 et de support inclus dans le compact $K_{0,\eta} := \{x\,;\, d(x, K_0) \leq \eta\}$ pour un certain $\eta > 0$ donné, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\langle T, \rho_\eta \varphi\rangle| \leq C_\eta N_{K_{0,\eta}\,,\, p(K_{0,\eta})}(\varphi)$$

(d'après le critère (1.14) de la Proposition 1.2 du cours). L'ordre de T est donc bien fini, majoré par $p(K_{0,\eta})$. Si K_0 est un singleton $\{x_0\}$, la distribution T est de la forme

$$T = P(\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n)\, [\delta_{x_0}],$$

où $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ (Proposition 3.4 du cours, on se ramène en effet au cas $x_0 = 0$ par changement d'origine dans $\mathbb{R}^n$).

Exercice 1.

1. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les séries*

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varphi(2^j) \qquad \& \qquad \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \varphi(2^{-j})$$

sont convergentes.

Comme $\operatorname{Supp} \varphi$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc inclus dans $[-R, R]$ pour un certain $R > 0$, on a $\varphi(2^j) = 0$ dès que $j > \log_2 R$. La première somme est en fait finie, donc convergente. Comme φ est de classe C^∞, elle est continue sur

$\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$ et $\lim_{j\to+\infty} \varphi(2^{-j}) = \varphi(0)$. La suite $(\varphi(2^{-j}))_{j\geq 1}$ est donc bornée en module par une constante M et on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\varphi(2^{-j})| \leq M \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = M < +\infty.$$

La seconde série est donc bien aussi convergente.

2. *Montrer que*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^j \varphi(2^j)$$

définit une distribution T d'ordre 0 *sur* $\mathbb{R}$.

Si $\mathrm{Supp}\, \varphi \subset [-R, R]$ pour $R > 0$, on a (si $[\ ]$ désigne la partie entière)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} 2^j |\varphi(2^j)| &= \sum_{j=-\infty}^{[\log_2 R]+1} 2^j |\varphi(2^j)| \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \times \sum_{-\infty}^{[\log_2 R]+1} 2^j \\
&\leq N_{[-R,R],0}(\varphi) \times (1 + 2[\log_2 R + 1]\, R).
\end{aligned}$$

Le critère quantitatif (1.14) de la Proposition 1.2 du cours est bien satisfait. On définit donc bien ainsi une distribution, par ailleurs d'ordre 0, c'est-à-dire en fait (voir la Remarque 1.20 du cours) une distribution-mesure.

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. *On rappelle que toute fonction de classe C^N sur $\mathbb{R}$ se développe en série de Taylor avec reste intégral sous la forme*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!}\, x^l + \frac{x^N}{(N-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau.$$

1. *Construire une distribution T_N d'ordre au plus N sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R}),\ \langle T_N, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx.$$

<u>*Indication.*</u> *On cherchera l'action de T_N sous la forme*

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \Big[\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx - R_N[\varphi; \epsilon] \Big]$$

où l'on explicitera le terme correctif $R_N[\varphi; \epsilon]$.

Si φ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral (rappelée par ailleurs dans l'énoncé), écrire

$$\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!}\, x^l + \frac{x^N}{(N-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau.$$

Si φ est de support dans $[-R,R]$, on peut écrire, pour $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx &= \int_{\epsilon\leq|x|\leq R} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!}\, x^{l-N} \Big)\, dx + \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_{\epsilon\leq|x|\leq R} \Big(\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau \Big)\, dx \\
&= -\sum_{0\leq l<N-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!(N-1-l)} \Big([x^{l-N+1}]_\epsilon^R + [x^{l-N+1}]_{-R}^{-\epsilon} \Big) \\
&\quad + \frac{\varphi^{(N-1)}(0)}{(N-1)!} \Big(\log \frac{R}{\epsilon} + \log \frac{\epsilon}{R} \Big) + \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_{\epsilon\leq|x|\leq R} \Big(\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau \Big)\, dx \\
&= 2 \sum_{\substack{0\leq l<N-1 \\ l\equiv N \pmod 2}} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!(N-1-l)} \Big(\frac{1}{\epsilon^{N-1-l}} - \frac{1}{R^{N-1-l}} \Big) \\
&\quad + \frac{1}{(N-1)!} \int_{\epsilon\leq|x|\leq R} \Big(\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau \Big)\, dx.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$R_N[\varphi;\epsilon] := 2 \sum_{\substack{0\leq l<N-1 \\ l\equiv N \pmod 2}} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!(N-1-l)}\, \frac{1}{\epsilon^{N-1-l}},$$

on remarque que la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ de

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx - R_N[\varphi;\epsilon] \tag{1}$$

existe et vaut

$$\begin{aligned}
&-2 \sum_{\substack{0\leq l<N-1 \\ l\equiv N \pmod 2}} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!(N-1-l)}\, \frac{1}{R^{N-1-l}} + \\
&+ \frac{1}{(N-1)!} \int_{[-R,R]} \Big(\int_0^1 (1-\tau)^{N-1} \varphi^{(N)}(\tau x)\, d\tau \Big)\, dx.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ceci est vrai pour toute fonction test de support dans $[-R, R]$. On remarque cependant que l'expression (1) ne fait aucunement intervenir R. Comme la quantité limite (2) est majorée en module par $C(R) \times N_{[-R,R],N}(\varphi)$ pour une certaine constante positive $C(R)$, il résulte du critère (1.14) de la Proposition 1.2 du cours que l'on définit bien ainsi une distribution T_N d'ordre au plus N. Si $\operatorname{Supp}\varphi \subset \mathbb{R}^*$, on a par définition

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x^N}\, dx$$

puisque $R_N[\varphi; \epsilon] = 0$ dans ce cas pour tout $\epsilon > 0$ (toutes les dérivées de φ en 0 sont nulles).

2. *Vérifier $x^N \cdot T_N = 1$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$, 1 désignant ici la distribution fonction correspondant à la fonction presque partout égale à 1 sur $\mathbb{R}$.*

On a, pour toute fonction test φ,

$$\begin{aligned} \langle x^N \cdot T_N, \varphi \rangle &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{x^N \varphi(x)}{x^N}\, dx - R_N[x^N \varphi; \epsilon] \Big) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \Big(\int_{|x| \geq \epsilon} \varphi(x)\, dx \Big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

puisque $R_N[x^N \varphi; \epsilon] = 0$ pour tout $\epsilon > 0$ du fait que la fonction $x^N \varphi$ s'annule en $x = 0$ à un ordre (en l'occurrence N) strictement supérieur à $N - 1$.

3. *Montrer qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $x^N \cdot T = 0$ (au sens des distributions sur $\mathbb{R}$) est nécessairement de support l'origine. En conclure que T est de la forme $T = P(d/dx)[\delta_0]$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré au plus $N - 1$.*

<u>Indication</u> : on pourra s'appuyer sur le résultat qui était demandé à la fin de la question de cours proposée en tête du texte.

Si φ est une fonction-test telle que $\operatorname{Supp}\varphi \subset \mathbb{R}^*$, la fonction

$$x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x^N}$$

est aussi une fonction-test. On a donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \Big\langle x^N \cdot T\,,\, \frac{\varphi(x)}{x^N} \Big\rangle = 0$$

puisque $x^N \cdot T = 0$ au sens des distributions. La distribution T est donc de support l'origine. D'après la Proposition 3.4 du cours (ce résultat a aussi été rappelé dans la question de cours), il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par hypothèses) tel que

$$T = P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\,[\delta_0]$$

au sens des distributions.

4. *Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $x^N \cdot T = 1$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$.*

Si T et S sont deux distributions solutions de $x^N \cdot T = 1$ au sens des distributions, on a $x^N \cdot (T - S) = 0$. Comme T_N est solution de $x^N \cdot T = 1$ (d'après la question **2**), toute autre solution de cette équation est de la forme $T = T_N + W$, où W est solution de $x^N \cdot W = 0$, *i.e.* est de la forme $W = P[d/dx]\,[\delta_0]$ (d'après la question **3**). Les solutions T de $x^N \cdot T = 1$ ($T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) sont donc les distributions de la forme

$$T = T_N + P\Big(\frac{d}{dx}\Big)\,[\delta_0], \quad P \in \mathbb{R}[X].$$

Problème (autour du laplacien perturbé).

On considère, pour $a > 0$, la fonction

$$f_a \;\; : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longmapsto \frac{\exp(-a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

1. *Montrer que f_a est une fonction localement intégrable (définie presque partout) sur $\mathbb{R}^3$ et définit donc une distribution fonction T_a dans $\mathbb{R}^3$.*

La fonction

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

est localement intégrable sur $\mathbb{R}^3$ du fait du critère de Riemann ($X \mapsto \|X\|^\alpha$ est intégrable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\alpha > -n$, ici $-1 > -3$). Comme la fonction

$$(x, y, z) \mapsto \exp(-a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

figurant au numérateur est une fonction continue, donc localement bornée sur $\mathbb{R}^n$ (elle est même en fait bornée par 1), on a bien affaire avec f_a à une fonction localement intégrable (définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, donc presque partout dans $\mathbb{R}^3$), définissant donc une distribution-fonction T_a par

$$\langle T_a, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} f_a(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. *Montrer qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, deux constantes réelles α_n et β_n (que l'on déterminera en fonction de n) telles que la fonction :*

$$f_{a,n} = f_a \chi_{\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}>1/n\}} + \Big(\alpha_n(x^2+y^2+z^2)+\beta_n\Big)\,\chi_{\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq 1/n\}}$$

soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
<u>Indication</u> : on remarquera que toutes les fonctions impliquées dans l'expression de $f_{a,n}$ sont radiales, et que le problème se ramène par conséquent à ajuster α_n et β_n de manière à réaliser le raccord C^1 de deux fonctions d'une variable au point $r = 1/n$.
Pour réaliser le raccord continu entre f_a et $f_{a,n}$ en tout point X de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $1/n$, il faut que

$$f_{a,n}(X) = \frac{\alpha_n}{n^2} + \beta_n = f_a(X) = \frac{\exp(-a/n)}{1/n} = n\exp(-a/n). \tag{3}$$

Une fois ce raccord continu réalisé, pour réaliser le raccord C^1 de ces deux fonctions, il faut, puisqu'il s'agit de fonctions radiales, assurer le raccord C^1 en $1/n$ des deux fonctions

$$A(r) = \frac{\exp(-ar)}{r} \quad \& \quad A_n(r) = \alpha_n\, r^2 + \beta_n.$$

Ceci revient à assurer $A'(1/n) = A_n'(1/n)$, donc

$$(-n^2 - an)\,\exp(-a/n) = 2n\,\alpha_n.$$

On doit donc poser

$$\alpha_n = -\frac{n^2(a+n)}{2}\,\exp(-a/n)$$

et (en reportant dans (3))

$$\beta_n = \frac{3n+a}{2}\,\exp(-a/n).$$

3. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f_{a,n} \leq f_a$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, puis que la suite de fonctions $(f_{a,n})_{n\geq 1}$ tend simplement vers f_a dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. En déduire que, l'on a, T_a et $T_{a,n}$ désignant les distributions fonction sur $\mathbb{R}^3$ correspondant respectivement à f_a et $f_{a,n}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} T_{a,n} = T_a$$

au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

La fonction $r \in]0, \infty[\mapsto A(r)$ est une fonction convexe (on vérifie immédiatement que $A'' > 0$ sur $]0, +\infty[$), tandis que la fonction $r \mapsto A_n(r)$ est une fonction concave sur $]0, +\infty[$ du fait que $\alpha_n < 0$. Comme ces deux fonctions (l'une convexe, l'autre concave) se raccordent C^1 en $r = 1/n$, la fonction convexe A (dont le graphe reste au dessus de ses tangentes par convexité) domine sur $]0, 1/n[$ la fonction concave A_n (dont le graphe reste en dessous de ses tangentes par concavité). On a donc $f_{a,n} \leq f_a$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. La suite de fonctions $(f_{a,n})_{n \geq 1}$ converge simplement vers f_a puisque $f_{a,n}(X) = f_a(X)$ pour tout X tel que $\|X\| \geq 1/n$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f_{a,n}(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} f_a(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dxdydz$$

(on a $|f_{a,n}\varphi| \leq f_a|\varphi|$ presque partout dans $\mathbb{R}^3$ et f_a est localement intégrable). On a donc bien

$$\lim_{n \to +\infty} T_{a,n} = T_a$$

au sens du principe de convergence des suites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

4. *On rappelle que le Laplacien d'une fonction radiale*

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longmapsto g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

(avec g de classe C^2 dans $]0, +\infty[$) vaut $g''(r) + 2g'(r)/r$. En utilisant ce résultat, calculer $(\Delta - a^2\mathrm{Id})[f_a]$ *dans* $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Il s'agit d'un calcul immédiat (la fonction f_a est C^∞ hors de $(0,0,0)$). On utilise l'indication donnant l'expression du Laplacien d'une fonction radiale.

5. *On rappelle la formule de Green-Ostrogradski : si F et G sont deux fonctions de classe C^2 au voisinage d'un fermé borné $\overline{U}$ à frontière C^1 de $\mathbb{R}^3$,*

$$\iiint_{\overline{U}} (F\Delta G - G\Delta F)\, dxdydz = \iint_{\partial U} \Big\langle F\nabla G - G\nabla F, n_{\mathrm{ext}}(x, y, z)\Big\rangle d\sigma_{\partial U},$$

où $d\sigma_{\partial U}$ désigne la mesure de Lebesgue induite sur $\partial\overline{U}$ par la mesure euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ (Δ désigne le Laplacien, ∇ la prise de gradient). Soit $R > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(B((0,0,0), R), \mathbb{R})$. Soit $n \geq 1$. En découpant l'intégrale

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (\Delta - a^2\mathrm{Id})[f_{a,n}](x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, dxdydz$$

en une intégrale sur la boule fermée $\overline{B((0,0,0), 1/n)}$ et l'intégrale sur la couronne fermée $\{1/n \leq \sqrt{x^2 + y^2 + y^2} \leq R\}$, puis en appliquant à chacune *de ces intégrales la formule de Green-Ostrogradski rappelée précédemment, montrer que*

$$\Big\langle (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[T_{a,n}], \varphi \Big\rangle =$$
$$\iiint_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 1/n} \Big(6\alpha_n - a^2 \Big(\alpha_n(x^2+y^2+z^2) + \beta_n\Big)\Big)\, \varphi(x,y,z)\, dxdydz.$$

En déduire

$$(\Delta - a^2 \mathrm{Id})[T_a] = -4\pi \delta_{(0,0,0)}$$

au sens des distributions sur $\mathbb{R}^3$.

La fonction $f_{a,n}$ n'est pas de classe C^2 (le raccord réalisé à la question **2** est seulement C^1) et il faut donc exprimer $(\Delta - a_2 \mathrm{Id})\,[T_{a,n}]$ au sens des distributions (et non au sens des fonctions !)[1]. Cela donne, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$,

$$\Big\langle (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[T_{a,n}], \varphi \Big\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f_{a,n}(X)\, (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[\varphi](X)\, dxdydz$$
$$= \int_{\|X\| \leq 1/n} (\alpha_n \|X\|^2 + \beta_n)\, (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[\varphi](X)\, dxdydz$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} f_a(X)\, (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[\varphi](X)\, dxdydz.$$

Chacune des deux intégrales au membre de droite ci-dessus se transforme par la formule de Green-Ostrogradski (mentionnée dans l'indication). Comme les normales extérieures à la boule $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1/n)$ et à son extérieur (en un point de la sphère de centre l'origine et de rayon $1/n$) sont opposées et que les gradients des fonctions $f_{a,n}$ et f_a impliqués coincident sur la sphère de centre l'origine et de rayon $1/n$ (le raccord est C^1, voir la question **2**), on en déduit

$$\Big\langle (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[T_{a,n}], \varphi \Big\rangle = \int_{\|X\| \leq 1/n} \varphi(X)\, (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[f_{a,n}](X)\, dxdydz$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(X)\, (\Delta - a^2 \mathrm{Id})[f_a](X)\, dxdydz$$
$$= \int_{\|X\| \leq 1/n} \varphi(X) \Big(6\,\alpha_n - a^2(\alpha_n \|X\|^2 + \beta_n)\Big)\, dxdydz$$

(on utilise aussi ici le résultat établi à la question **4**). Lorsque n tend vers l'infini, la limite de cette expression est la même que celle de

$$\int_{\|X\| \leq 1/n} (6\alpha_n - a^2 \beta_n)\, \varphi(X)\, dxdydz.$$

[1] L'indication ici était équivoque et il en a été tenu compte dans le barème.

Comme φ est continue en $(0,0,0)$, on obtient la même limite en remplaçant φ par la constante $\varphi(0,0,0)$. La limite vaut donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{n^3} \times (6\alpha_n - a^2\beta_n) = -4\pi\,\varphi(0,0,0).$$

Comme $(\Delta - a_2\,\mathrm{Id})\,[T_{a,n}]$ converge au sens des distributions vers $(\Delta - a^2\mathrm{Id})\,[T]$ (continuité de l'opérateur de dérivation des distributions, voir la Proposition 2.5 du cours), on a bien

$$\Big\langle (\Delta - a_2\,\mathrm{Id})\,[T_a], \varphi \Big\rangle = -4\pi\,\varphi(0,0,0),$$

d'où (au sens des distributions) la formule

$$(\Delta - a^2\mathrm{Id})[T_a] = -4\pi\delta_{(0,0,0)}.$$