Semestre 3, Année 2007-2008 SESSION 1

UE : MHT304

Date : 07 Janvier 2008 Durée : 1h30, sans documents

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice I.

1. *Ecrire en langage algorithmique (en mettant en évidence boucles et tests logiques) les procédures retournant une approximation de l'unique zéro (sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$) d'une fonction f de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, lorsque cette fonction est telle que $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f' < 0$ sur $[a, b]$ et $f'' < 0$ sur $[a, b]$ (on pourra s'aider d'un dessin préalable) :*

- **1a.** *suivant la méthode de Newton ;*
- **1b.** *suivant la méthode de « fausse position ».*

On est dans la situation d'une fonction strictement décroissante sur $[a, b]$, avec $f(a)f(b) < 0$, telle que l'épigraphe, c'est-à-dire le sous-ensemble de $[a, b] \times \mathbb{R}$ situé sous le graphe, soit strictement convexe (puisque $f'' < 0$). La procédure conduisant à l'approximation de l'unique zéro de f sur $[a, b]$ *via* la méthode de Newton est donc (N désignant ici le nombre d'itérations) :

```
function x=Newton(init,N);
init=b;
x=init;
for i=1:N
    x = x - f(x)/f'(x);
end
```

Pour écrire la procédure conduisant à l'approximation de ce zéro *via* la méthode de « fausse position », on remarque que si l'on part de $x_0 = a$, $x_1 = b$, la suite $(x_{2k+1})_{k\geq 0}$ stationne en fait au point $x_1 = b$ du fait de la stricte convexité de l'épigraphe de f ; en effet la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (qui coupe l'axe des abscisses au point $(x_2, 0)$) est sous le graphe de f, ce qui prouve que le zéro de f se trouve entre x_2 et b (ou que $f(x_2)$ est du signe de $f(a)$, c'est-à-dire strictement positif). Suivant le cours, la procédure est donc :

```
function x=fausseposition(init,N);
init=a;
x=init;
for i=1:N
    x = b-f(b)*(b-x)/(f(b)-f(x)
end
```

2. *Trouver une approximation avec trois décimales exactes de l'unique zéro du polynôme*

$$P(x) := -\frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + 1$$

compris entre 1 *et* 3/2 *(pourquoi est-on assuré de son existence ?) en utilisant la méthode de Newton.*

On a $P'(x) = -2x^4 + x^2 = x^2(1-2x^2) < 0$ sur $[1, 3/2]$ tandis que l'on a $P''(x) = -8x^3 + 2x = 2x(1-4x^2) < 0$ sur ce même intervalle. Comme on aaussi $P(1) = 14/15 > 0$ et $P(3/2) \simeq -.912 < 0$, on est exactement dans la configuration du **1**. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un unique zéro de f dans $]1, 3/2[$ et on peut le calculer suivant la méthode de Newton avec la calculette en suivant cette routine :

```
x=3/2;
for i=1:N
    x = x - (-2*x^5/5 + x^3/3 +1)./(-2*x^4 + x^2);
end
```

On trouve (au bout de quatre itérations) que le zéro ξ satisfait $\xi < 1.356$; un calcul montre que $f(1.355) > 0$, ce qui implique $1.355 < x < 1.356$, donc que l'écriture de ξ avec trois décimales exactes est $\xi \simeq 1.355$ (en fait $\xi \simeq 1.3554$).

Exercice II.

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_N = b$$

$N+1$ points distincts de $[a, b]$.

1. *Rappeler la définition du polynôme d'interpolation de Lagrange P de f aux points $x_0, ..., x_N$. Quel est le degré de ce polynôme ?*

Le polynôme d'interpolation de Lagrange P de f aux points $x_0, ..., x_N$ est par définition l'unique polynôme P de degré exactement N tel que $P(x_k) = f(x_k)$ pour $k = 0, ..., N$ (soit $N+1$ contraintes). Il est donné explicitement (d'après le cours) par la formule

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{N} (X - x_l)}{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l\neq k}}^{N} (x_k - x_l)} f(x_k) .$$

2. *Soit Q le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, ..., x_{N-1}$, R le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_1, ..., x_N$; montrez la formule :*

$$P(X) = \frac{(X - x_0)R(X) - (X - x_N)Q(X)}{x_N - x_0} .$$

On note

$$\widetilde{P}(X) = \frac{(X - x_0)R(X) - (X - x_N)Q(X)}{x_N - x_0} .$$

Il suffit de remarquer que, pour $k = 1, ..., N - 1$,

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(x_k) &= \frac{(x_k - x_0)R(x_k) - (x_k - x_N)Q(x_k)}{x_N - x_0} \\ &= \frac{(x_k - x_0)f(x_k) - (x_k - x_N)f(x_k)}{x_N - x_0} = f(x_k) \end{aligned}$$

(puisqu'à la fois Q et R interpolent les valeurs de f aux points $x_1, ..., x_N$) et que d'autre part

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(x_0) &= \frac{-(x_0 - x_N)Q(x_0)}{x_N - x_0} = Q(x_0) = f(x_0) \\ \widetilde{P}(x_N) &= \frac{(x_N - x_0)R(x_N)}{x_N - x_0} = R(x_N) = f(x_N) \end{aligned}$$

puisque Q interpole f au point x_0 et que R interpole f au point x_N. Comme le degré de $\widetilde{P}$ est exactement égal à N (puisque Q et R sont deux polynômes unitaires de degré exactement $N - 1$), $\widetilde{P}$ coïncide bien avec le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0, ..., x_N$.

3. *Comment (à partir de la formule établie à la question précédente) peut-on réaliser (sous le langage MAPLE) une procédure récursive*

```
F=proc(N,f,a,b)
```

qui retourne, N, f, a, b étant donnés, le polynôme d'interpolation $P_N[f]$ de f aux $N + 1$ points régulièrement espacés

$$x_k := a + k\,\frac{b - a}{N} , \quad k = 0, ..., N\,?$$

D'après la question précédente, la procédure récursive suivante :

```
function F=proc(N,f,a,b)
if N>1
   F = [(X-a)*proc(N-1,f, a+(b-a)/N,b)
                        -(X-b)*proc(N-1,f,a,b-(b-a)/N)]/(b-a)
if N=1
   F = [(X-a)*f(a) - (X-b)*f(b)]/(b-a)
```

conduit au calcul du polynôme d'interpolation $P_N[f]$.

Exercice III.

Soit $[a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

une subdivision régulière de pas $h := (b-a)/N$.

1. *Calculer les nombres* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *de la formule d'approximation de Newton-Cotes à quatre points*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \simeq$$

$$\alpha_0 f(x_k) + \alpha_1 f\Big(x_k + \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\Big) + \alpha_2 f\Big(x_k + \frac{2(x_{k+1}-x_k)}{3}\Big) + \alpha_3 f(x_{k+1})$$

pour le calcul de l'intégrale sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, *d'une fonction continue* $f\ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *? Pour quelles fonctions* f *cette formule approchée est-elle, pour chaque segment* $[x_k, x_{k+1}]$, *une formule exacte ?*

Si $x_k = 0$ et $x_1 = 1$, les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cherchés doivent satisfaire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dt &= 1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
\int_0^1 t\,dt &= \frac{1}{2} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{2\alpha_2}{3} + \alpha_3 \\
\int_0^1 t^2\,dt &= \frac{1}{3} = \frac{\alpha_1}{9} + \frac{4\alpha_2}{9} + \alpha_3 \\
\int_0^1 t^3\,dt &= \frac{1}{4} = \frac{\alpha_1}{27} + \frac{8\alpha_2}{27} + \alpha_3
\end{aligned}$$

puisque la formule doit être exacte pour les fonctions polynômiales de degré au plus égale à 3. On trouve comme solution $\alpha_0 = \alpha_3 = 1/8$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/8$. La formule d'approximation à quatre points s'écrit donc

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \simeq (x_{k+1} - x_k) \times$$

$$\times \Big(\frac{f(x_k)}{8} + \frac{3[f((2x_k + x_{k+1})/3)) + f(((x_k + 2x_{k+1})/3)]}{8} + \frac{f(x_{k+1})}{8} \Big).$$

Comme on l'a déjà dit, cette formule approchée est exacte pour les fonctions polynômiales de degré au plus 3.

2. *La méthode de Simpson est une méthode de Newton-Cotes à combien de points ? A t-on un réel intérêt à utiliser la méthode à quatre points par rapport à la méthode de Simpson si l'on se refère au contrôle d'erreur ?*

La méthode de Simpson est une méthode de Newton-Cotes à trois points. Si l'on se réfère au calcul d'erreur, l'erreur dans cette méthode de Simpson (lors du calcul approché de l'intégrale sur $[a,b]$) est en $((b-a)/2)^5$ tandis que pour la méthode à quatre points, où $N = 3$ est impair, cette erreur est en $((b-a)/3)^{N+2} = ((b-a)/3)^5$. L'exposant (ici 5) de $h = (b-a)/N$ (exposant représentant l'ordre de l'erreur) étant le même pour la méthode de Simpson et la méthode à quatre points, on n'a pas un réel intérêt à utiliser la méthode à quatre points plutôt que la méthode de Simpson.

3. *On rappelle que la méthode de Simpson est une méthode d'ordre* 5. *On suppose que l'on dispose du calcul approché l'intégrale de f sur $[a,b]$ suivant la méthode de Simpson composite :*
- *d'une part après le découpage de $[a,b]$ en les N segments $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, de longueur $h = (b-a)/N$;*
- *d'autre part après le découpage raffiné de $[a,b]$ en $2N$ segments de longueur $h/2 = (b-a)/(2N)$*

(la méthode de Simpson étant ensuite appliquée pour calculer une approximation de l'intégrale sur chaque sous-segment). Comment (suivant Richardson) doit-on combiner les deux valeurs approchées $I(h)$ et $I(h/2)$ dont on dispose pour avoir une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$ avec une erreur en $o(h^4)$?

La méthode de Richardson consiste à combiner les deux calculs approchés $I(h)$ et $I(h/2)$ de manière à former la nouvelle approximation

$$\widetilde{I}(h) = \frac{I(h) - 2^{5-1} I(h/2)}{1 - 2^{5-1}} = \frac{16 I(h/2) - I(h)}{15}$$

(l'ordre de la méthode de Simpson composite étant $p - 1 = 5 - 1 = 4$). On dispose ainsi d'une valeur approchée $\widetilde{I}(h)$ de l'intégrale de f sur $[a,b]$ avec une erreur en $o(h^4)$ et non en $O(h^4)$ comme l'était l'erreur prédite si l'on utilisait comme approximation $I(h)$ ou $I(h/2)$.