Semestre 6, Année 2007-2008 SESSION 2

UE : MHT613

Date : 30 Juin 2008, 14 h-17 h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman) + **barème**

Nota : le barème est sur 26 points ; la note est considérée sur 20.

Exercice (sur les séries de Fourier) [6 pts]

1 (2 pts). *Soit $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$ la suite des sommes partielles de Fourier de $\dot{f}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|S_k[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} \leq (2k+1)\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$ et en déduire en utilisant l'inégalité triangulaire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,*

$$\Big\| \sum_{k=0}^{N} S_k[\dot{f}] \Big\|_{\mathbb{T},1} \leq (N+1)^2 \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}\,.$$

Comme la norme $\|\dot{e}_k\|_{\mathbb{T},1}$ de chaque classe $\dot{e}_k$ (correspondant à $\theta \longmapsto e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$) est égale à 1, on a

$$\|S_k[\dot{f}]\|_{\mathbb{T},1} = \Big\| \sum_{l=-k}^{k} c_l(\dot{f})\, \dot{e}_l \Big\|_{\mathbb{T},1} \leq \sum_{l=-k}^{k} |c_l(\dot{f})| \leq (2k+1)\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$$

puisque l'on a, pour tout $l \in \mathbb{Z}$,

$$|c_l(\dot{f})| = \frac{1}{2\pi}\Big| \int_{[0,2\pi]} f(\theta)e^{-il\theta}\, d\theta \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |f(\theta)|\, d\theta = \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}\,.$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{N}(2k+1) = 2\frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = (N+1)^2\,,$$

on a bien (par inégalité triangulaire) l'inégalité finale demandée.

2 (Cours, 2pts). *En utilisant un théorème du cours (que l'on citera avec soin), montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, on a en fait*

$$\Big\| \sum_{k=0}^{N} S_k[\dot{f}] \Big\|_{\mathbb{T},1} \sim N\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}\,.$$

C'est le théorème de Féjer (version L^1) qui assure que la suite des sommes de Féjer

$$T_N[\dot{f}] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k[\dot{f}],\ \ N = 1, 2, ...,$$

converge dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ vers $\dot{f}$; on a donc, en prenant les normes

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\Big\| \sum_{k=0}^{N} S_k[\dot{f}]\Big\|_{\mathbb{T},1}}{N+1} = \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}\,,$$

d'où le résultat demandé puisque $(N+1)\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1} \sim N\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3 (Cours, 2 pts). *Si $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, que fait la suite $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$? Converge t'elle dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et vers quoi ?*

Comme $S_N[\dot{f}]$ représente la projection orthogonale de $\dot{f}$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les $\dot{e}_k$, $k = -N, ..., N$, et que $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ constitue une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, la suite $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$ converge vers $\dot{f}$ dans le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Comme $\|\dot{g}\|_{\mathbb{T},1} \leq \|\dot{g}\|_{\mathbb{T},2}$ pour tout $\dot{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on a aussi convergence de la suite $(S_N[\dot{f}])_{N\geq 1}$ vers $\dot{f}$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (mais attention, ceci n'est vrai que parce que $\dot{f}$ est supposé dans cette question être un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, ce serait faux si $\dot{f}$ était simplement supposé, comme aux deux questions précédentes, être dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$).

Problème I (sur la transformation de Fourier) [10 pts]

I.1 (Cours, 2pts). *Comment est définie la transformée de Fourier d'un élément $\dot{\varphi}$ de l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$? celle d'un élément $\dot{\varphi}$ de l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$? On précisera bien dans les deux cas quel type d'objet (fonction, classe de fonction, etc.) est cette transformée de Fourier.*

Si $\dot{\varphi} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, la transformée de Fourier de $\dot{\varphi}$ est la fonction $\widehat{\varphi}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Si $\dot{\varphi} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, la transformée de Fourier de $\dot{\varphi}$ est l'élément $\widehat{\varphi}$ (donc la classe de fonction) de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ obtenu comme la limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ de la suite des classes des fonctions

$$\omega \longmapsto \int_{[-N,N]} \varphi(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,, \quad N = 1, 2, ...$$

I.2 (2 pts). *On se donne une fonction θ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement positive sur $]-2,-1[\cup]1,2[$ et identiquement nulle sur le complémentaire de cette union d'intervalles ouverts. Vérifier que $|\widehat{\theta}|$ et $|\widehat{\theta}|^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. En utilisant ensuite la formule d'inversion de*

Fourier, construire à partir de θ un élément $\dot\varphi$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ tel que $\widehat{\varphi}(\omega)\geq 0$ pour tout $\omega\in\mathbb{R}$ et de plus

$$\{\omega\,;\,\widehat{\varphi}(\omega)\neq 0\} =]-2,-1[\cup]1,2[\,.$$

On considère un tel élément dans la suite de l'exercice et on note φ un de ses représentants.

Comme θ est de classe C^2 et est identiquement nulle hors de $]-2,2[$, on a, après une double intégration par parties, pour tout $\omega\in\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(\omega)=\int_{\mathbb{R}}\theta(t)\,e^{-i\omega t}\,dt &= \int_{-2}^{2}\theta(t)e^{-i\omega t}\,dt=\frac{1}{i\omega}\int_{-2}^{2}\theta'(t)e^{-i\omega t}\,dt\\ &= -\frac{1}{\omega^2}\int_{-2}^{2}\theta''(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\,.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$|\omega|^2\,|\widehat{\theta}(\omega)|\leq 4\|\theta''\|_\infty$$

et donc l'appartenance de $\widehat{\theta}$ à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ et à $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ en vertu du critère de Riemann relatif à la convergence au voisinage de $\pm\infty$ des intégrales impropres $\int|\omega|^{-\alpha}\,d\omega$ lorsque $\alpha>1$. D'après la formule d'inversion de Fourier, on a donc,

$$\theta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\theta}(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\theta}(-\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\,,$$

ou encore, en échangeant les notations t et ω,

$$\theta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\theta}(-t)\,e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

La fonction

$$\varphi\ :t\longmapsto\frac{1}{2\pi}\widehat{\theta}(-t)$$

remplit donc toutes les exigences voulues.

I.3 (2 pts). *Pour $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$, on pose*

$$\varphi_{a,b}(t):=\frac{1}{a}\,\varphi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)\,,\ \forall\,t\in\mathbb{R}\,.$$

Vérifier que $\varphi_{a,b}\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\cap\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ et exprimer en fonction de $\widehat{\varphi}$, de a et de b la transformée de Fourier de $\dot\varphi_{a,b}$.

En utilisant la formule de changement de variables dans l'intégrale de Lebesgue, avec ici le changement de variables $t\longleftrightarrow u$, où $t-b=au$, *i.e*

$t = b+au$, on constate que $\varphi_{a,b}$ est tout aussi intégrable et de carré intégrable que φ et que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi_{a,b}}(\omega) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \varphi((t-b)/a)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-i\omega(au+b)}\, du = e^{-i\omega b}\widehat{\varphi}(a\omega)\,.$$

I.4 (1 pt). *Soit $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et f un de ses représentants. Justifier la convergence de l'intégrale*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{a,b}(t)\, dt$$

et exprimer différemment cette intégrale en utilisant la formule de Plancherel dans le cadre L^2 (on rappelera cette formule).

L'intégrale converge car le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). En utilisant la formule de Plancherel (dans le cadre L^2), il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{a,b}(t)\, dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\overline{\varphi_{a,b}(t)}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\, \overline{\widehat{\overline{\varphi_{a,b}}}(\omega)}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\widehat{\varphi}(-a\omega)\, e^{ib\omega}\, d\omega
\end{aligned}$$

(en reportant sous la dernière intégrale le résultat obtenu à la question **I.4** précédente).

I.5 (1 pt). *On rappelle (cours de MHT512, inégalités de Young) que la convolution entre un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ a un sens et que le résultat est un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$. En déduire que l'on peut définir la convolée $\dot{F}_a \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ de $\dot{f}$ et de $\dot{\psi}_a$, où $\psi_a(t) = (1/a)\varphi(-t/a)$. Rappeler comment.*

La fonction ψ_a est intégrable car $\varphi_{a,0}$ l'est. La convolée de $\dot{f}$ et de ψ_a est l'élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est la fonction (définie presque partout sur $\mathbb{R}$)

$$b \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)\psi_a(b-t)\, dt = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_{a,b}(t)\, dt\,.$$

I.6 (1 pt). *Vérifier en utilisant le résultat établi en* **I.4** *et la formule d'inversion de Fourier que la transformée de Fourier de $\dot{F}_a$ a pour représentant la fonction $\omega \longmapsto \Phi(\omega)\widehat{\varphi}(-a\omega)$ où Φ est un représentant de $\widehat{\dot{f}}$.*

D'après la formule d'inversion pour la transformation de Fourier dans le cadre L^2 et la formule établie à la question **I.4**, on a, puisque, pour presque tout $b \in \mathbb{R}$ (*cf.* question précédente),

$$F_a(b) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi(\omega)\, \widehat{\varphi}(-a\omega)\, e^{ib\omega}\, d\omega\,,$$

le fait qu'un représentant de $\widehat{F_a}$ soit précisément la fonction

$$\omega \longmapsto \Phi(\omega)\widehat{\varphi}(-a\omega)\,.$$

I.7 (1 pt). *Vérifier que l'ensemble des classes des fonctions $\varphi_{a,b}$ pour $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$ engendre un sous-espace dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ (on raisonnera avec un élément $\dot f$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ orthogonal à toutes les classes $\dot\varphi_{a,b}$ pour $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$).*

Il suffit de démontrer que le seul élément $\dot f$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ orthogonal à toutes les classes $\dot\varphi_{a,b}$ est la classe nulle. Mais dire que $\dot f$ est orthogonal à toutes des classes $\dot\varphi_{a,b}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, équivaut à dire que pour tout $a>0$, la convolée de $\overline{f}$ avec ψ_a est nulle, donc que

$$\widehat{\Phi}(\omega)\,\widehat{\varphi}(a\omega)\equiv 0$$

si Φ est un représentant de la transformée de Fourier de $\overline{f}$ (questions **I.5** et **I.6**). On en déduit (en faisant varier $a>0$ et en utilisant le fait que $\widehat{\varphi}$ soit strictement positive sur $]-2,-1[\cup]1,2[$) que Φ est nulle sur $\mathbb{R}$, donc que $\overline{f}=\dot 0$ puisque la transformation de Fourier est uns isométrie bijective de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ dans lui-même (à la constante multiplicative $\sqrt{2\pi}$ près). L'orthogonal du sous-espace fermé engendré par les $\dot\varphi_{a,b}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, est donc réduit à $\dot 0$, ce qui équivaut à dire que les $\dot\varphi_{a,b}$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$, engendrent un sous-espace dense de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$.

Problème II (espaces de Hilbert et séries de Fourier) [10 pts]

Dans ce problème, on considère le $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ des classes de fonctions 2π-périodiques, à valeurs complexes, d'énergie finie sur $[0,2\pi]$.

II.1 (Cours,2 pts). *Rappeler comment est défini le produit scalaire $\langle \dot f\,,\ \dot g\rangle_{\mathbb{T},2}$ entre deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. On considère dans la suite le sous-espace K de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ défini par*

$$K := \Big\{\dot f\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})\,;\ \int_{[0,2\pi]} f(\theta)e^{ik\theta}\,d\theta = 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{N}^*\Big\}\,;$$

ce sous-espace K est il fermé ? Si oui, en donner une base hilbertienne. Plus généralement l'orthogonal d'un sous-espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est-il toujours fermé ? Peut-on définir l'opération de projection orthogonale sur un sous-espace quelconque de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$?

Le produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est défini par

$$\langle \dot f,\dot g\rangle_{\mathbb{T},2} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}\,d\theta\,,$$

où f et g sont des représentants respectifs de $\dot{f}$ et $\dot{g}$. Comme

$$\int_{[0,2\pi]} f(\theta)\, e^{ik\theta}\, d\theta = 2\pi \langle \dot{f}, e^{-ik(\cdot)} \rangle_{\mathbb{T},2}\ ,\ \ k = 1, 2, ...,$$

le sous-espace K est exactement l'orthogonal du sous-espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ engendré par les classes $\dot{e}_k$, $k \in -\mathbb{N}^*$, représentées par les harmoniques e_k : $\theta \longmapsto e^{ik\theta}$, $k = -1, -2, ...$ C'est un sous-espace fermé car l'orthogonal d'un sous-espace quelqonque d'un espace de Hilbert est toujours fermé. Une base hilbertienne de K est donnée par les $\dot{e}_k$, $k \in \mathbb{N}$, puisque l'on sait que $(\dot{e}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. On ne peut par contre, dans un espace de Hilbert, définir d'opérateur de projection orthogonale que sur un sous-espace fermé.

II.2 (1 pt). *Calculer les projections orthogonales sur K des classes de*

$$\theta \longmapsto \frac{1}{1 - 2e^{i\theta}} \quad \text{et} \quad \theta \longmapsto \frac{1}{2 - e^{i\theta}}\,.$$

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les développements

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2e^{i\theta}} &= \frac{-1}{2e^{i\theta}} \times \frac{1}{1 - e^{-i\theta}/2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ik\theta}}{2^k} \\ \frac{1}{2-e^{i\theta}} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - e^{i\theta}/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{2^{k+1}}\,, \end{aligned}$$

tous les deux normalement convergents sur $\mathbb{R}$. Il résulte du premier développement (intégré terme à terme après multiplication par $\theta \longmapsto e^{ik_0\theta}$, $k_0 \in \mathbb{N}$) que la classe de

$$\theta \longmapsto \frac{1}{1 - 2e^{i\theta}}$$

est orthogonale à K ; sa projection sur K est donc $\dot{0}$. En revanche, il résulte du second développement que la classe de

$$\theta \longmapsto \frac{1}{2 - e^{i\theta}}$$

est un élément de K, dont la projection orthogonale sur K est par conséquent cet élément lui-même.

II.3 (1 pt). *Pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $[c_k(\dot{f})z^k]_{k\geq 0}$ est au moins égal à 1 (ici les $c_k(\dot{f})$, $k \in \mathbb{Z}$, désignent les coefficients de Fourier complexes de $\dot{f}$). En utilisant la formule* *de Plancherel (que l'on rappellera), montrer que, si z est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, il existe un unique élément $\dot{f}_z$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ (que l'on calculera) tel que, pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$,*

$$\langle \dot{f}, \dot{f}_z \rangle_{\mathbb{T},2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\dot{f})\, z^k \,.$$

Calculer $\langle f_z, f_w \rangle_{\mathbb{T},2}$ si z et w sont deux nombres complexes de module strictement inférieur à 1.

On a $|c_k(\dot{f})|^2 \leq \|\dot{f}\|^2_{\mathbb{T},2}$ d'après le théorème de Pythagore, donc $|c_k(\dot{f}) z^k| \leq \|\dot{f}\|_{\mathbb{T},2} \times |z|^k$, et par conséquent convergence de la série entière $[c_k(\dot{f}) z^k]_{k \geq 1}$ dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe. Le rayon de convergence de cette série entière est donc au moins égal à 1. Si $|z| < 1$, la série $\sum_{k \geq 0} |z|^{2k}$ est convergente et l'on définit un élément $\dot{f}_z$ de K en posant

$$\dot{f}_z = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z}^k\, \dot{e}_k \,.$$

On a $c_k(\dot{f}_z) = \overline{z}^k$ si $k \in \mathbb{N}$, $c_k(\dot{f}_z) = 0$ sinon (ce qui explique pourquoi $\dot{f}_z \in K$). D'après la formule de Plancherel, on a

$$\langle \dot{f}, \dot{f}_z \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}) \overline{c_k(\dot{f}_z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\dot{f})\, z^k$$

pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, pour tout z de module strictement inférieur à 1. Si z et w sont deux nombres complexes de module strictement inférieur à 1, on a $c_k(\dot{f}_z) = \overline{z}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$\langle \dot{f}_z, \dot{f}_w \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{z}^k w^k = \frac{1}{1 - \overline{z} w} \,.$$

On considère maintenant un sous-espace fermé H de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ tel que, pour tout $\dot{h} \in H$ (de représentant h), les classes des fonctions $\theta \longmapsto e^{\pm i\theta} h(\theta)$ soient dans ce sous-espace H.

II.4 (Cours, 1 pt). *Comment est définie la projection orthogonale $\dot{f} =$* $\mathrm{Proj}_H[\dot{1}]$ *sur H de la classe de la fonction constante égale à 1 ? On en note f un représentant dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.*

C'est l'unique élément $\dot{f}$ de H qui vérifie les conditions

$$\int_0^{2\pi} (1 - f(\theta)) h(\theta)\, d\theta = 2\pi \langle \dot{1} - \dot{f}, \dot{h} \rangle_{\mathbb{T},2} = 0$$

pour tout $\dot{h} \in H$, pour tout h représentant de $\dot{h}$.

II.5 (1 pt). *Montrer que la fonction* $\overline{f}(1-f)$ *est dans* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ *et définit donc un élément de* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ *; après avoir vérifié*

$$\langle \dot{1} - \dot{f}\,,\, he^{ik\theta}\rangle_{\mathbb{T},2} = 0\,,\ \forall\, \dot{h} \in H\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z} \qquad (\dagger)$$

montrer que tous les coefficients de Fourier de $\overline{f}(1-f)$*sont nuls.*

Comme H contient toutes les classes de fonctions $\theta \longmapsto e^{ik\theta}h(\theta)$ dès que $\dot{h} \in H$ (puisque H contient les classes de $\theta \longmapsto e^{\pm i\theta}h(\theta)$ et que l'on peut indéfiniment réitérer cette opération, on a, d'après la caractérisation de la projection orthogonale rappelée en **II.4**,

$$\int_0^{2\pi} (1-f(\theta))e^{-ik\theta}\overline{h(\theta)}\,d\theta = 0$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\dot{h} \in H$, ce qui est le résultat (†) mentionné. Si l'on prend $\dot{h} = \dot{f} \in H$, on déduit de (†) que tous les coefficients de Fourier de $(1-f)\overline{f}$ sont donc nuls.

II.6 (1 pt). *Déduire de la question* **II.5** *(en citant le théorème du cours adéquat) que* f *prend* $d\theta$*-presque partout ses valeurs dans* $\{0,1\}$. *En conclure qu'il existe un sous-ensemble mesurable* A *de* $[0,2\pi[$ *tel que* $\dot{f}$ *ait pour représentant la fonction* 2π*-périodique définie par*

$$f(\theta) = 1 \text{ si } \theta \in A + 2\pi\mathbb{Z}\,,\ f(\theta) = 0 \text{ sinon}\,.$$

Comme la transformation de Fourier est injective de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ dans $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (voir par exemple le théorème de Féjer, version L^1), il résulte de **II.5** que la fonction $\overline{f}(1-f)$ est nulle $d\theta$-presque partout, donc que f prend $d\theta$-presque partout ses valeurs dans $\{0,1\}$. Il suffit de poser $A = \{\theta \in [0,2\pi[\,;\ f(\theta) = 1\}$ et l'on a immédiatement la conclusion voulue.

II.7 (1 pt.). *Montrer en combinant* (†) *avec le résultat établi en* **II.6** *que*

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A} \overline{h}\, e^{ik\theta}\, d\theta = 0\,,\ \forall\, \dot{h} \in H\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

et en déduire que si $\dot{h} \in H$, $\dot{h}$ *admet un représentant identiquement nul sur le complémentaire de* $A + 2\pi\mathbb{Z}$.

On a, pour tout $\dot{h} \in H$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A} \overline{h(\theta)}\, e^{ik\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} (1-f(\theta))\overline{h(\theta)}\, e^{ik\theta}\, d\theta = 0$$

puisque toutes les classes de fonctions $\theta \longmapsto e^{-ik\theta}h(\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont dans H et que $1 - f = \chi_{[0,2\pi]\setminus A}$ $d\theta$-presque partout sur $[0, 2\pi]$ (on utilise finalement (†) pour établir la dernière égalité). Comme les $\dot{e}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, constituent une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, on a

$$\dot{h} = \lim_{N\to+\infty} S_N[\dot{h}]$$

dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et par conséquent

$$\int_{[0,2\pi]\setminus A} |h(\theta)|^2 \, d\theta = \lim_{N\to+\infty} \int_{[0,2\pi]\setminus A} \overline{h(\theta)} S_N[\dot{h}](\theta) \, d\theta = 0 \, .$$

Il en résulte bien que $\dot{h}$ admet un représentant nul presque partout sur l'ensemble $[0, 2\pi] \setminus A$ et, par périodicité, sur le complémentaire de $A + 2\pi\mathbb{Z}$.

II.8 (1 pt). *Montrer que si un élément $\dot{h}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ a un représentant identiquement nul sur le complémentaire de $A + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\dot{h} \in H$ (on montrera pour cela au préalable que*

$$\int_A |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta = \int_{[0,2\pi]\setminus A} |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta = 0 \,)$$

Si h est nul presque partout sur $[0, 2\pi] \setminus A$, on a

$$\begin{aligned}\int_{[0,2\pi]\setminus A} |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - f(\theta)) |\mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta \\ = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} (1 - f(\theta)) S_N[\mathrm{Pr}_H[\dot{h}]](\theta) &\overline{\mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)} \, d\theta = 0\end{aligned}$$

du fait de (†) et de ce que $\mathrm{Pr}_H[\dot{h}] \in H$. D'autre part

$$\begin{aligned}\int_A |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta \\ = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta) S_N[\dot{h} - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}]](\theta)} \, &(h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)) \, d\theta = 0\end{aligned}$$

puisque toutes les classes des fonctions $\theta \longmapsto f(\theta)e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont dans H, donc orthogonales à $\dot{h} - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}]$. En ajoutant, on trouve

$$\int_{[0,2\pi]} |h(\theta) - \mathrm{Pr}_H[\dot{h}](\theta)|^2 \, d\theta = 0 \, ,$$

donc $\dot{h} = \mathrm{Pr}_H[\dot{h}] \in H$.