ANNÉE 2009 -2010 SESSION DE Décembre 2009

UE : MHT 734

Épreuve : Analyse Complexe

Date : 14 Décembre 2009, 8h.30 *Durée :* 4 Heures

Épreuve de Monsieur : Philippe Charpentier

Tous Documents Interdits

Exercice I

1. (*Question de cours*) Soient Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans Ω qui ne s'annule pas.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe dans Ω telle que $e^h = f$. Ce résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus Ω simplement connexe (justifier la réponse).
   (b) Montrer que, pour tout entier m il existe une fonction k holomorphe dans Ω telle que $k^m = f$.
2. On cherche à déterminer l'existence ou non de fonctions entières f telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $f\left(f(z)\right) = e^z$. Soit f une telle fonction.
   (a) Montrer que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et en déduire qu'il existe une fonction entière h telle que $e^h = f$ puis qu'il existe une constante C telle que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $h(f(z)) = z + C$.
   (b) Conclure (remarquer que f est injective et h surjective).

Exercice II

1. (*Question de cours*) Soit $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe. Pour $a \in \mathbb{D}$, on pose $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $z \in \bar{D}$.
   (a) Montrer que φ_a est un automorphisme de $\mathbb{D}$ dont l'inverse est φ_{-a}.
   (b) Montrer que le groupe d'automorphismes de $\mathbb{D}$ est le groupe des transformations homographiques de la forme $h_\lambda \circ \varphi_a$ où λ est un nombre complexe de module 1, $h_\lambda(z) = \lambda z$ et $a \in \mathbb{D}$ (*Indication* : si f est un automorphisme de $\mathbb{D}$ et si $a = f^{-1}(0)$, appliquer le Lemme de Schwarz à $f \circ \varphi_{-a}$ et son inverse).
2. Soit f une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{D}$. En appliquant le Lemme de Schwarz à la fonction $g = \varphi_{f(z)} \circ f \circ \varphi_{-z}$ pour majorer $g'(0)$, montrer que $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$.
   (b) Montrer que s'il existe $z \in \mathbb{D}$ tel que l'on ait $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$ alors f est un automorphisme de $\mathbb{D}$.

Exercice III

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω.

1. (*Question de cours*) Donner une condition suffisante sur les fonctions f_n pour que le produit infini $\prod_n f_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

T.S.V.P.

2. Dans cette question on suppose que les séries $\sum_n (f_n - 1)$ et $\sum_n |f_n - 1|^2$ sont uniformément convergentes sur tout compact de Ω. On note $\log$ la détermination du logarithme dans le disque de rayon 1 centré en 1 qui vaut 0 en 1.
   (a) Soit K un compact de Ω. Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $\sup_K |f_n - 1| \leq 1/2$ et en déduire qu'il existe une constante C telle que, pour $p, q \geq n_0$, on a
$$\left| \sum_{n=p}^{q} \log f_n - \sum_{n=p}^{q} (f_n - 1) \right| \leq C \sum_{n=p}^{q} |f_n - 1|^2$$
   (*Indication* : remarquer qu'il existe une constante C telle que, pour $|w| \leq 1/2$ on a $|\log(1+w) - w| \leq C|w|^2$).
   (b) En déduire que la suite $n \mapsto \sum_{k=n_0}^{n} \log f_k$ converge uniformément sur K, puis qu'il en est de même de la suite $n \mapsto \prod_{k=n_0}^{n} f_k$.
   (c) Conclure que le produit infini $\prod_n f_n$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f holomorphe dans Ω.
3. On suppose que, soit la condition suffisante de la question 1., soit l'hypothèse de la question 2., est satisfaite, de sorte que le produit infini $\prod_n f_n$ converge uniformément, sur les compacts de Ω, vers une fonction f holomorphe dans Ω. Montrer que, en tout point $z \in \Omega$ tel que $f(z) \neq 0$, la dérivée logarithmique de f est $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_n \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ et que, pour tout compact K de Ω il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$ la suite $n \mapsto \sum_{k=n_0}^{n} \frac{f_k'}{f_k}$ converge uniformément sur K.
4. Pour $n \geq 1$ on pose $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}$. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Dans toute la suite de l'exercice on note $P(z) = z\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$. Vérifier que les zéros de P sont exactement les nombres $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, chacun étant de multiplicité 1.
5. Montrer que, sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{\pi^2 n^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=+N} \frac{1}{z - \pi n},$$
   et en déduire que $\frac{P'}{P}$ est périodique de période π.
6. Montrer que $g(z) = \frac{P(z)}{\sin z}$ est une fonction entière sans zéros et que $\frac{g'}{g}$ est une fonction entière périodique de période π (remarquer que $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \operatorname{cotg} z$).
7. Soit $A > 0$. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que, sur l'ensemble $B_A = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } -\pi/2 \leq \Re e z \leq \pi/2, |\Im m z| \geq A\}$ on a $\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right| \leq C_1 + C_2|z|$, et, quitte à changer les constantes C_1 et C_2, en déduire que cette inégalité a lieu sur la bande $B = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } -\pi/2 \leq \Re e z \leq \pi/2\}$.
8. Conclure que $\frac{g'}{g}$ est un polynôme de degré au plus 1 puis que $\frac{g'}{g}$ est constante, et, en remarquant que $\frac{P'}{P}$ est impaire que $\frac{g'}{g}$ est identiquement nulle. En déduire la formule suivante :
$$\sin z = z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Exercice IV

1. Soit f une fonction holomorphe non constante sur le disque $D(0,R)$ centré en 0 et de rayon R. On suppose $\Re e f \leq M$ sur ce disque. On pose
$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{M - \Re e f(0)} \text{ et } h(z) = \frac{g(z)}{2 - g(z)}.$$
   Montrer que $\Re e g \leq 1$ et que $|h| \leq 1$, puis, en appliquant le Lemme de Schwarz à la fonction $z \mapsto h(Rz)$, montrer que $|f(z)| \leq |f(0)| + (M - \Re e f(0)) \frac{2|z|}{R-|z|}$.
2. Déduire de la question précédente que si f est une fonction entière telle qu'il existe deux constantes A et B telles que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re e f(z) \leq A(1+|z|)^B$ alors f est un polynôme de degré $d \leq B$.
3. Soit f une fonction entière non constante telle qu'il existe deux constantes A et B telles que $|f(z)| \leq e^{A(1+|z|)^B}$, $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Déduire du 2. que, si f ne s'annule pas, il existe un polynôme P de degré $d \leq B$ tel que $f = e^P$.
   (b) Montrer que, soit f est surjective, soit il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que, $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, l'équation $f(z) = w$ a une infinité de racines.

FIN