SCOLARITÉ ET DE LA VIE ÉTUDIANTE
DIRECTION DE LA
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
Sciences Technologies
LICENCE

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011/2012
PREMIÈRE SESSION DE PRINTEMPS

ETAPE : L1 **UE : MI 2011**
Épreuve : DS Terminal
Date : 11 Juin 2012
Heure : 14 Heure *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Messieurs : P. Charpentier & A. Yger
Tous Documents Interdits

Département Licence
DL

Exercice I

1. *Questions de cours.*
   (a) Donner la définition d'une suite de Cauchy.
   (b) Énoncer le critère (ou théorème) de Cauchy pour les suites numériques.
2. Montrer que la suite $n \mapsto u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy (considérer $u_{2n} - u_n$).
3. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes vérifiant, pour tout entier n, $|u_{n+1} - u_n| \leq q^n$ avec $q \in [0,1[$. Montrer que cette suite converge.

Exercice II

1. Donner le développement limité à l'origine, à l'ordre n, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(\cos x) - (1 - x^2/2)}{x^3}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. En déduire la tangente, et la position par rapport à celle-ci, à l'origine, de la courbe d'équation $y = f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de la courbe d'équation $y = (x-2)\,e^{1/x}$. On déterminera les éventuelles asymptotes et la position de la courbe par rapport à celles-ci.

Exercice III

1. *Questions de cours.*
   (a) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{C}$. Que signifie « f est uniformément continue » ?
   (b) Toute fonction continue f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ? Justifier la réponse par un exemple, et énoncer un théorème donnant une condition suffisante pour l'uniforme continuité d'une telle fonction.

Soit f une fonction réelle uniformément continue sur $[0,+\infty[$. Soit $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq 1$. Soit $x > 0$ fixé.

2. Vérifier qu'il existe un unique entier n_x tel que $\frac{x}{\delta} \leq n_x < \frac{x}{\delta} + 1$.
3. En écrivant $f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{n_x - 1} \left(f\left(\frac{(k+1)x}{n_x}\right) - f\left(\frac{kx}{n_x}\right)\right)$, montrer que $|f(x) - f(0)| \leq \frac{x}{\delta} + 1$.
4. En déduire qu'il existe deux constantes $a > 0$ et $b > 0$ telles que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $|f(x)| \leq ax + b$.
5. La fonction exponentielle est-elle uniformément continue sur $[0,+\infty[$?
6. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est-elle uniformément continue sur $[0,+\infty[$?

Exercice IV

1. *Questions de cours*. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$.
   (a) Que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$?
   (b) Donner une condition suffisante portant sur f pour que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ soit dérivable en un point x_0. Que vaut alors cette dérivée ?

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+ =]0,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction F que l'on ne cherchera pas à calculer.

2. Étudier le signe, la continuité et la dérivabilité de la fonction F.
3. Que vaut $F'(x)$?
4. (a) *Question de cours*. Énoncer, pour une fonction h, la formule de Taylor-Young en un point x_0 à l'ordre $p+1$, en précisant les hypothèses sur h.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 3 de F au point 1.
5. Soit $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$, $t > 0$. En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $x > 0$,
$$F(x) = (\ln x)(\ln(1+x)) - \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$
6. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
7. En utilisant un changement de variables montrer que, pour $x > 0$, $F\left({}^1\!/\!_x\right) = \displaystyle\int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\ln u\,du.$
8. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln^2 x} = {}^1\!/\!_2$.
9. On pose $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t\,dt$, $k \in \mathbb{N}$.
   (a) En utilisant le développement limité à l'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ montrer que
$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k(x) + \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} \ln t}{1+t} dt.$$
   (b) En calculant $I_k(x)$, en déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $\displaystyle\left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \int_0^1 t^{n+1} \ln\left({}^1\!/\!_t\right) dt.$
   (c) Conclure que $F(0) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_1^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Exercice V

1. *Question de cours.*
   (a) Donner la définition d'une subdivision d'un segment $[a,b]$ et, pour une fonction f définie sur $[a,b]$, d'une somme de Riemann de f associée à cette subdivision.
   (b) Énoncer le théorème reliant les sommes de Riemann d'une fonction intégrable sur un segment $[a,b]$ et son intégrale.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ en en déduire que
$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}.$$
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k(n-k)}{n^2} = \int_0^1 x(1-x)\,dx.$
4. En admettant que $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = {}^\pi\!/\!_8$, en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2(n-2)}}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{\sqrt{(n-2)2}}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{(n-1)}}{n^2}\right) = e^{\pi/8}.$$

FIN