

# Algèbre 3 : groupes et anneaux

## MHT411

Mention	<b>Mathématiques</b> <b>parcours Mathématiques fondamentales</b>	Sem. 4	6 ECTS
---------	---	--------	--------

UFR de Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques Pures

Pré-requis : Mathématiques de base (UE MIS100), MHT201.

Enseignant référent : Qing Liu ([liu@math.u-bordeaux1.fr](mailto:liu@math.u-bordeaux1.fr)).

Objectifs : introduction aux structures algébriques fondamentales.

	1	3	5	7	9	11	13						
12 C (1h20)	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
1 DS									DS				
24 TD(1h20)		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2 DM					DM1					DM2			

## Programme

### 1. Théorie élémentaire des ensembles (2 cours)

- Opérations classiques sur les ensembles et propriétés usuelles des applications.
- Relations d'ordre. Relations d'équivalence. Quotient. Décomposition canonique d'une application.

### 2. Sur les groupes (6 cours)

- Groupes. Sous-groupes (dont ceux de  $\mathbf{Z}$ ). Groupe produit. Homomorphismes. Automorphismes intérieurs et sous-groupe normal. Sous-groupes monogènes et cycliques, ordre d'un élément.
- Classes *modulo* un sous-groupe, formule des indices et théorème de Lagrange pour les groupes finis.
- Groupe quotient. Décomposition canonique d'un homomorphisme de groupes ; applications aux groupes cycliques *via* les groupes quotients  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ .
- Groupes opérant sur un ensemble. Équation des classes. Centre d'un p-groupe.
- Sur le groupe symétrique  $S_n$ : théorème de Cayley et propriétés générales. Transposition, signature, groupe alterné.
- Exemples de groupes : groupe diédral; groupes linéaires.

### 3. Sur les anneaux (4 cours)

- Anneaux. Sous-anneaux. Éléments inversibles, diviseurs de zéro. Anneaux intègres. Anneau produit. Homomorphismes d'anneaux unitaires. Exemples :  $\mathbf{Z}$ ,  $A[X]$  où  $A$  est un anneau commutatif unitaire.
- Corps. Exemples de corps (dont  $\mathbf{F}_p$ ). Corps de fractions d'un anneau intègre (dont  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}(X)$ ,  $\mathbf{C}(X)$ ).
- Idéaux d'un anneau commutatif. Idéaux premiers, maximaux, nilpotents.
- Anneaux quotients. Théorème de factorisation et décomposition canonique des homomorphismes d'anneaux. -Caractérisation des idéaux premiers et des idéaux maximaux. Caractéristique d'un anneau.
- Théorème des restes chinois. Étude des inversibles de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Indicateur d'Euler.

### Modalités de contrôle des connaissances

Epreuves de la session 1	Durées	Coefficients
Examen	3h	0.7
Contrôle continu, note du DS	1h20	0.3

Epreuves de la session 2	Durées	Coefficients
Examen	3h	1