Feuille de TD 1 - Analyse complexe M1 - Alain Yger (semaine 38)

<u>THEMES</u> : formes différentielles, champs de vecteurs, coordonnées complexes z et $\overline{z}$, lemme de Poincaré, formule de Green-Riemann.

<u>Sources</u> : Amar-Matheron [Analyse complexe] (Cassini), Berenstein-Gay [Complex variables] (GTM 125, Springer), Hénaut-Yger [Éléments de Géométrie] (Ellipses), Yger [Analyse complexe et distributions](Ellipses), Marco & al [Mathématiques L2] (Pearson Education).

NOTA. Les étoiles indiquent le niveau de difficulté de l'exercice.

Exercice 1 (*) : la dualité champ de vecteurs/1-formes différentielles et les "coordonnées" $(z,\overline{z})$ en place de (x,y).

a) Un champ de vecteurs complexe dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'exprime sous la forme

$$u(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

où u et v sont deux fonctions de U dans $\mathbb{C}$[1]. Vérifier qu'un tel champ s'exprime aussi sous la forme

$$a(z)\frac{\partial}{\partial z}+b(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\,,$$

où les opérateurs $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial\overline{z}$ sont définis par

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\Big)\qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Big)$$

et $z=x+iy$. Calculer a et b en fonction de u et v.

b) Le crochet de dualité entre le champ de vecteurs $u\,\partial/\partial x+v\,\partial/\partial y$ et la 1-forme différentielle $Pdx+Qdy$ (P et Q étant des fonctions de U dans $\mathbb{C}$) est défini ponctuellement par

$$\Big\langle u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\,,\,Pdx+Qdy\Big\rangle_{(x,y)}=u(x,y)P(x,y)+v(x,y)Q(x,y).$$

Vérifier que l'on a, pour tout (x,y) dans U,

$$\begin{aligned}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x},dx\Big\rangle_{(x,y)}&=\Big\langle\frac{\partial}{\partial y},dy\Big\rangle_{(x,y)}=1\\ \Big\langle\frac{\partial}{\partial z},dz\Big\rangle_{z}&=\Big\langle\frac{\partial}{\partial \overline{z}},d\overline{z}\Big\rangle_{z}=1\end{aligned}$$

si $dz:dx+idy$ et $d\overline{z}:dx-idy$, ainsi que

$$\begin{aligned}\Big\langle\frac{\partial}{\partial x},dy\Big\rangle_{(x,y)}&=\Big\langle\frac{\partial}{\partial y},dx\Big\rangle_{(x,y)}=0\\ \Big\langle\frac{\partial}{\partial z},d\overline{z}\Big\rangle_{z}&=\Big\langle\frac{\partial}{\partial \overline{z}},dz\Big\rangle_{z}=0.\end{aligned}$$

Exercice 2 (*) : le "yoga" des calculs en les coordonnées z et $\overline{z}$. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ (les coordonnées y étant respectivement dénotées z et w), f une fonction différentiable de U

[1]Dans votre cours, vous considerez qu'un champ de vecteurs complexe sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une application de U dans $\mathbb{C}^2$, celle qui à (x,y) associe $(u(x,y),v(x,y))$. Les deux points de vue (celui ci et celui de votre cours) reviennent au même en ce qui concerne la définition des champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Cela change par contre si l'on se place sur une surface ; seul celui présenté ici garde un sens.

dans V, g une fonction différentiable de V dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\partial(g\circ f)/\partial z$ et $\partial(g\circ f)/\partial\overline{z}$ en fonction de f, g, $\partial f/\partial z, \partial f/\partial\overline{z}$, $\partial g/\partial w, \partial g/\partial\overline{w}$.
Indication : *exprimer plutôt l'action de la différentielle de $g\circ f$ sur $h=(h_1,h_2)\longleftrightarrow h_1+ih_2$.*

Exercice 3 (*) : le laplacien dans le plan ; coordonnées cartésiennes et polaires.
a) Vérifier que, pour toute fonction F de classe C^2 et à valeurs complexes dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z}\circ\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big)[F]=\Big(\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\circ\frac{\partial}{\partial z}\Big)[F]=\frac{1}{4}\Delta[F]\,,$$

où

$$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

désigne l'opérateur de Laplace (ou *laplacien*) en dimension 2.
b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et Ω son image réciproque par l'application

$$(r,\theta)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}\longmapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Vérifier que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour $(r,\theta)\in\Omega$,

$$\Delta_{(x,y)}[F](r\cos\theta,r\sin\theta)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)[G](r,\theta)$$

si $G(r,\theta):=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Déterminer toutes les fonctions F de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, radiales ($F(x,y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2+y^2}$), et solutions de $\Delta[F]\equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
c) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et f une fonction de classe C^2 de U dans $\mathbb{C}$; on note toujours Ω cette fois l'image réciproque de U par l'application

$$(r,\theta)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}\longmapsto re^{i\theta}\in\mathbb{C}^*.$$

Vérifier que, si f est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a, pour tout (r,θ) dans Ω,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)[g](r,\theta)\\ \frac{\partial}{\partial\overline{z}}[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)[g](r,\theta).\end{aligned}$$

Vérifier que, si $\theta_0\in\mathbb{R}$, la fonction

$$f_{\theta_0}\ :z=(x+iy)\longmapsto\log|z|+i\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$

est une fonction de classe C^2 dans $U_{\theta_0}:=\mathbb{C}\setminus\{te^{i\theta_0}\,;\,t\geq 0\}$, telle que $(\partial/\partial\overline{z})[f_{\theta_0}]\equiv 0$ dans U_{θ_0}.
Exercice 4 (**) : fonctions positivement homogènes. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $r\in\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, pour tout $t>0$, on a

$$f(tx)=t^rf(x).$$

a) Montrer que si f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$, dire qu'elle est positivement homogène de degré $r\in\mathbb{R}$ équivaut à dire qu'elle satisfait l'*équation d'Euler* :

$$df(x).x=\sum_{j=1}^n x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)=rf(x)\,,\ \forall\,x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

b) Si g est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, positivement homogène de degré $r > 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, trouver toutes les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$df(x).x = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = g(x)\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 5 (*) : le "pullback" d'une forme différentielle. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$ et Φ une application de classe C^1 de U dans V. Exprimer $\Phi^*[d\overline{z} \wedge dz]$ en termes de $|\partial\Phi/\partial z|$ et de $|\partial\Phi/\partial\overline{z}|$.

Exercice 6 (*) : formes exactes, formes fermées. La 1-forme

$$\omega = 2xzdx + 2yzdy - (x^2 + y^2 + 1)dz$$

est-elle fermée dans $\mathbb{R}^3$? exacte ? Trouver explicitement un *facteur intégrant*, c'est-à-dire une fonction $F\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tel que $F\omega$ soit exacte dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (*) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$). Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la forme

$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{|z|^\alpha}\,,\ z = x + iy\,,$$

est elle fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Exercice 8 (*) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de classe C^1 de U dans $\mathbb{C}$; montrer que $f(z)\,dz$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial\overline{z} \equiv 0$ et que $f(z)d\overline{z}$ est fermée si et seulement si $\partial f/\partial z \equiv 0$.

Exercice 9 (**) : formes exactes, formes fermées (dans $\mathbb{R}^2$).

a) Soit p un entier relatif et $\omega_p = z^p dz$, considérée comme une 1-forme de classe C^∞ dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour quelles valeurs de p cette forme est-elle fermée dans $\mathbb{C}^*$? exacte dans $\mathbb{C}^*$? Pour les valeurs de p pour lesquelles elle est exacte, déterminer toutes les fonction $F\ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, de classe C^1, telles que $dF = \omega_p$ dans $\mathbb{C}^*$.

b) Soit θ_0 un nombre réel, U_{θ_0} l'ouvert

$$U_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0}\,;\, t \geq 0\}$$

(le plan complexe "fendu" le long de la demi-droite issue de l'origine et dirigée par $e^{i\theta_0}$) et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la 1-forme différentielle dans U_{θ_0} définie par

$$\omega_\alpha(z) = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)}\, dz.$$

Pourquoi cette forme est-elle exacte dans U_{θ_0} quelque soit la valeur de α ? Vérifier en utilisant le résultat établi à l'exercice **3.c)** que les fonctions F de classe C^1 dans U_{θ_0} telles que $dF = \omega_\alpha$ sont de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \frac{|z|^{\alpha+1}}{\alpha+1} \exp\Big(i(\alpha+1)\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)\Big)$$

si $\alpha \neq -1$ (C étant une constante arbitraire) et de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \log|z| + i\arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)$$

si $\alpha = -1$ (C désignant toujours une constante arbitraire).

Exercice 10 (**) : formes différentielles et équations différentielles. Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ et $Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^1 fermée dans U. Écrire ce que cela signifie sur P et Q. On désigne par F une primitive de $Pdx + Qdy$ dans U, c'est-à-dire une fonction de classe C^2 dans U telle que $dF = Pdx + Qdy$. Pourquoi existe-t-il bien une telle primitive ? Quelle est l'équation cartésienne du graphe de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

lorsque (x_0, y_0) est un point de U où Q ne s'annule pas ?

Exercice 11 (***) : la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^2$ pour un simplexe "tordu" positivement orienté. Soit Δ_0 le simplexe

$$\Delta_0 := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \,;\, t \geq 0, s \geq 0, t + s \leq 1\}$$

et $\Phi = (\varphi, \psi)$ une application de classe C^2 au voisinage de Δ_0, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $d\Phi(t,s)$ soit inversible en tout point de Δ_0 et de jacobien strictement positif en tout point. On suppose aussi que Φ réalise une bijection entre $\overline{\Delta}_0$ et $\Phi(\overline{\Delta}_0)$. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta}_0)$, vérifier la formule de Stokes (ou de Green-Riemann puisque l'on est ici en dimension 2) :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} d[Pdx + Qdy] &= \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} d[Pdx + Qdy] \\
&= \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx \wedge dy := \iint_{\Phi(\overline{\Delta}_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy \\
&= \iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy \\
&= \iint_{\Delta_0} \Phi^*[d\omega] = \int_{\partial\Delta_0} \Phi^*[\omega] = \int_{\partial[\Phi(\overline{\Delta}_0)]} (Pdx + Qdy)
\end{aligned}$$

après avoir justifié le fait que la frontière $\partial[\Phi(\overline{\Delta})]$ de $\Phi(\overline{\Delta})$ est C^1 par morceaux (les frontières sont ici toutes orientées dans le sens trigonométrique).

Indication : *on traitera dans un premier temps le cas où Φ est l'identité de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.*

Peut-on s'affranchir de la condition "ω de classe C^2 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta})$" et la remplacer par la condition plus faible "ω de classe C^1 au voisinage de $\Phi(\overline{\Delta})$" ?

Exercice 12 (*) : retour au lemme de Schwarz sur la symétrie des dérivées partielles. Dans l'exercice précédent, le lemme de Schwarz (sur le fait que l'on puisse permuter l'action de $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ pour une fonction deux fois différentiable en un point) a joué un rôle essentiel (même s'il est caché par la propriété $d \circ d = 0$) pour prouver

$$\iint_{\Phi(\Delta_0)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy = \iint_{\Delta_0} \Big(\frac{\partial A}{\partial s} - \frac{\partial B}{\partial t}\Big)\, dsdt$$

si $Ads + Bdt := \Phi^*[Pdx + Qdy]$ comme conséquence de la formule de changement de variables dans l'intégration relativement à la mesure de Lebesgue. Dans cet exercice, nous proposons de montrer pourquoi la formule de Green-Riemann pour les rectangles suffit à impliquer le lemme de Schwarz.

a) Montrer que si G_1 et G_2 sont deux fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que

$$\iint_R G_1(x,y)\, dxdy := \iint_R G_2(x,y)\, dxdy$$

pour tout rectangle fermé plein R inclus dans U, alors $F \equiv G$ dans U.

b) Déduire de **a)** que si F est une fonction de classe C^2 dans U, à valeurs complexes, alors on a $(\partial^2/\partial x \partial y)[F] \equiv (\partial^2/\partial y \partial x)[F]$ dans U.

Exercice 13 (*) : appliquer le lemme de Poincaré pour les 1-formes (en dimension n). Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et $F\ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 ne s'annulant pas. Montrer que la 1-forme dF/F est exacte dans U.

Exercice 14 (*) : facteurs intégrants locaux dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit ω une 1-forme de classe C^1 dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que $\omega(z_0) \neq 0$ (ce qui signifie $(P(x_0,y_0), Q(x_0,y_0)) \neq 0$ si $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$). Montrer qu'il existe un voisinage $V_{(x_0,y_0)}$ de (x_0,y_0) dans U, une fonction f_{x_0,y_0} de classe C^1 dans ce voisinage, telle que la forme $f_{(x_0,y_0)} \times \omega$ soit exacte dans $V_{(x_0,y_0)}$.
Indication : *on effectuera un changement de variable de manière à ce que (localement) $\omega = Pdx$, puis on exploitera le lemme de Poincaré dans un ouvert étoilé.*

Exercice 15 (***) : autour du lemme de Poincaré dans $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, étoilé par rapport à l'origine, et ω

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

une p-forme de classe C^1 dans U. Montrer que l'on définit une $(p-1)$-forme $I[\omega]$ de classe C^2 sur U en posant

$$I[\omega] = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \left[\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \Big(\int_0^1 t^{p-1} \alpha(tx_1, ..., tx_n)\, dt \Big)\, x_{i_k} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} dx_{i_k} \right].$$

Vérifier la formule $I[d\omega] + d[I[\omega]] = \omega$ et en déduire le lemme de Poincaré.
Indication : *expliquer d'abord pourquoi il est possible de se ramener à supposer la forme ω du type $\omega = \alpha\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$.*

Exercice 16 (*) : une application directe de Green-Riemann. Soit Γ le bord du carré $[-1,1]^2$ orienté dans le sens trigonométrique. Calculer

$$\int_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Indication : *remarquer que la 1-forme sous cette intégrale curviligne est fermée dans $\mathbb{C}^*$ et que par conséquent on peut remplacer $[-1,1]^2$ par le disque de centre 0 et de rayon ϵ, avec ϵ arbitraire ; on expliquera pourquoi.*

Exercice 17 (**) : encore une application directe de Green-Riemann. Calculer l'aire de la boucle du folium de Descartes d'équation cartésienne $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (a désignant un paramètre réel).
Indication : *on paramètrera cette courbe en cherchant le point d'intersection avec la droite d'équation $y = tx$, t désignant le paramètre que l'on utilisera ; la boucle correspond, on le montrera, aux valeurs du paramètre entre 0 et $+\infty$.*

Exercice 18 (**) : de Green-Riemann à Green-Ostrogradski. Soit U un ouvert borné du plan dont la frontière est consitiué d'un nombre fini de lacets simples (courbes de Jordan) $\gamma_1, ..., \gamma_N$, de classe C^1 et réguliers (chaque lacet est paramétré par une fonction $\gamma\ : t \in [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe

C^1 sur $[0,1]$ et telle que $d\gamma$ ne s'annule en aucun point de $[0,1]$). Soit $F = (P,Q) = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$ un champ de vecteurs de classe C^1 au voisinage de $\overline{U}$. Vérifier la formule de Green-Ostrograski :

$$\iint_U \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)\, dxdy = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \langle n_{\rm ext}(\gamma_j(t)), F(\gamma_j(t))\rangle\, |\gamma_j'(t)|\, dt\,,$$

où $n_{\rm ext}(\gamma_j(t))$ désigne le vecteur normal unitaire (pointant vers l'extérieur de U) à l'arc géométrique paramétré par γ_j et $\langle\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, en langage de physicien, l'intégrale (surfacique) de la divergence du champ de vecteurs F est égal au flux sortant de ce champ au travers du bord.
Indication : *on appliquera Green-Riemann avec la forme $Pdy - Qdx$.*

Exercice 19 (***) : une approche au théorème du point fixe de L. Brouwer. Soit $f = (P,Q)$ une application définie et de classe C^2 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et telle que

$$f(\overline{D(0,1)}) \subset \{(x,y)\,;\, x^2+y^2=1\} = \partial\overline{D}$$

(f réalise une *rétraction* du disque fermé sur son bord).
a) Si l'on suppose en plus des hypothèses ci-dessus que la restriction de f à $\partial\overline{D(0,1)}$ est l'identité, déduire de la formule de Green-Riemann que, si Γ désigne le lacet $\theta \in [0,2\pi] \mapsto e^{i\theta}$,

$$\int_\Gamma PdQ = 0.$$

Indication : *on montrera que la forme $Pdx + Qdy$ est fermée dans le disque unité ouvert $D(0,1)$.*
Montrer que l'hypothèse additionnelle implique $\gamma^*[PdQ] = \gamma^*[xdy]$ et en déduire

$$\int_\Gamma PdQ = \pi\,.$$

Que peut-on en conclure ?
b) Soit F une application définie et de classe C^2 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que $F(\overline{D(0,1)}) \subset \overline{D(0,1)}$ et que $F(x,y) \neq (x,y)$ pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$. Pour tout (x,y) dans $\overline{D(0,1)}$,on note $G(x,y)$ le point d'intersection du cercle unité $\partial\overline{D(0,1)}$ avec la demi-droite issue de $F(x,y)$ et dirigée par le vecteur (non nul par hypothèses) $(x,y) - F(x,y)$. Vérifier que $(x,y) \mapsto G(x,y)$ se prolonge en une fonction (P,Q) de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ qui vérifie les hypothèses de l'en-tête de l'exercice et du **(a)**. En déduire que F admet nécesssairement un point fixe dans $\overline{D(0,1)}$ (*i.e.* un point (x_0,y_0) tel que $F(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$).

Exercice 20 (**) : primitives de formes et connexité. Soient $U_1,...,U_N$ des ouverts de $\mathbb{C}$ tels que, pour chaque $k = 1,...,N-1$, l'intersection de $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ avec U_{k+1} soit connexe. Soit ω une 1-forme continue sur l'union des U_k. Montrer qu'il est équivalent de dire que ω est exacte et de dire que, pour chaque $k = 1,...,N$, la restriction de ω à U_k est exacte.

Exercice 21 (**) : la division des formes.
a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), f une fonction de classe C^1 dans U telle que $df(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Soit $p \geq 2$ et ω une p-forme continue sur U. Montrer qu'il existe une $(p-1)$-forme ξ continue sur U telle que $\omega = df \wedge \xi$. Trouver toutes les $p-1$-formes continues solutions de l'équation $df \wedge \xi = 0$.
b) À quelle condition une 2-forme continue $\omega = Fdx \wedge dy$ dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ s'écrit-elle sous la forme $\omega = d|z|^2 \wedge \xi$, où ξ est une 1-forme continue sur U (on distinguera les cas où $0 \in U$ et $0 \notin U$) ?