M1MI2011
Exercices sur les suites

Exercice 1. Soit p un réel strictement positif. On pose :

$$A = \left\{ \frac{1}{1+|x|}, |x| < p \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{1}{1+|x|}, |x| > p \right\}$$

1. Déterminer $\max A$ et $\sup A$.
2. Déterminer $\sup B$. L'ensemble B admet-il un maximum ?

Exercice 2. Pour tout entier n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Exercice 3. Pour tout entier n, on pose $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$. Montrer, en revenant à la définition, que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\dfrac{3}{2}$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 5. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]1, +\infty\right[\\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n^2 + 7u_n\right)} - 1. \end{cases}$$

On distinguera les cas $u_0 < 2$, $u_0 = 2$ et $u_0 > 2$.

Exercice 6. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par

$$u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}, \; v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

Montrer que ces suites convergent vers une même limite qui n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 7. Soient $0 < a < b$, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les deux suites définies par

$$u_0 = a, \; v_0 = b, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 8.

1. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les deux sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes vers la même limite.
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si les trois sous-suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ sont convergentes.

Exercice 9. Etudier la convergence des suites $(u_n)_n$ de terme général :

1. $u_n = (-1)^n$,
2. $u_n = i^n$,
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 10. Montrer que la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente de limite l. Montrer que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ est également convergente de limite l.

Exercice 12.

Soit $(u_n)_n$ montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ n'est pas une suite de Cauchy. Que peut-on dire de u_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 13. Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ vérifiant, $\forall n$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ est de Cauchy.

Exercice 14. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que, $\forall p, q$, $|u_{p+q} - u_p - u_q| \leq 1$.

1. Montrer que, $\forall q$, $\forall k \geq 1$, $|u_{kq} - ku_q| \leq k - 1$.
2. Montrer que, pour $r \in \mathbb{N}$, $|u_{kq+r} - u_{kq}| \leq |u_r| + 1$.
3. En déduire que si k et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par $q \neq 0$, on a $\left|u_n - \frac{n}{q} u_q\right| \leq \frac{r}{q} |u_q| + |u_r| + k$.
4. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ est convergente.

Exercice 15. Calculer $\sup\{u_p,\, p \geq n\}$, $\inf\{u_p,\, p \geq n\}$, $\overline{\lim_n}\, u_n$ et $\underline{\lim_n}\, u_n$ pour les suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = (-1)^n$;
2. $u_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$;
3. $u_n = \left(2 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) \sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$;
4. $u_n = n^{(-1)^n}$.

Exercice 16. Soit f une application de $[0,1]$ dans lui-même telle qu'il existe un réel positif $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1]\,, \; |f(x) - f(y)| \leq k\, |x - y|\,.$$

Soit $a \in [0,1]$. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que, $\forall n$, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ et conclure que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.
2. Montrer que $l = \lim_{n \to +\infty} x_n$ est l'unique point fixe de la fonction f.