M1MI2011
Exercices sur le calcul d'intégrales (Riemann)

Exercice 1.

1. Soit $x > 0$. Calculer $\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}$ en fonction de x.
2. Montrer que la limite suivante existe : $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}.\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}$.
3. En déduire que $\int_{[0,x]} e^t dt = e^x - 1$ pour $x > 0$ quelconque.

Exercice 2.

1. Etablir les égalités suivantes, où $x \in \mathbb{R}$ et $n > 0$ entier :

$$\sum_{p=1}^{n} \sin\frac{x}{2n}\sin\frac{px}{n} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2n} - \cos\frac{2n+1}{2n}x\right), \quad \sum_{p=1}^{n} \sin\frac{x}{2n}\cos\frac{px}{n} = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2n} + \sin\frac{2n+1}{2n}x\right).$$

2. Utiliser ces résultats pour établir pour $x > 0$ quelconque :

$$\int_{[0,x]} \sin t dt = 1 - \cos x, \quad \int_{[0,x]} \cos t dt = \sin x.$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Décomposer le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}$.
2. En déduire que $a^{2n} - 1 = (a^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$.
3. On suppose $a^2 \neq 1$. A l'aide des sommes de Riemann montrer que :

$$I(a) = \int_{[0,\pi]} \ln(a^2 - 2a\cos t + 1)dt = \begin{cases} 0 & , \quad |a| < 1, \\ 2\pi\ln|a| & , \quad |a| > 1. \end{cases}.$$

Exercice 4. Montrer que

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}dt = \ln 3, \quad \lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2.$$

Exercice 5. On pose :

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx\,, \quad J = \int_0^2 e^{x^2}dx\,, \quad K = \int_0^1 e^{-x^2}\sin(x)dx.$$

Montrer que :

1. $0 \leq I \leq 1$.
2. $I \leq J$.
3. $|K| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

Exercice 6. Soit f une fonction continue sur $I=[a,b]$. On considère une fonction g positive intégrable sur I et telle que :

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

Montrer que $\exists c \in I$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$

Exercice 7. Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n ds.$

1. Etudier le sens de variation de I_n.
2. Montrer que la suite I_n est minorée. Que pouvez-vous en déduire ?

Exercice 8. Pour tout entier non nul n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$
3. Montrer que si $n \geq 2$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}.$
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L qui vérifie $1 \leq L \leq 2$.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour tout entier n non nul, et pour tout réel x positif, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^a+1)^n}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. On suppose $a=2$. Montrer que :

$$I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} \cos^{2n-2}(t)dt.$$

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\,, \quad J = \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x^2-x+1}\,, \quad K = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx\,, \quad L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}dx.$$

Exercice 11.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}.$
2. Soit f une fonction continue sur $I=[a,b]$ telle que $\forall x \in I,\ f(a+b-x) = f(x)$.
   Exprimer $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_a^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin(x)}.$