Une initiation à la géométrie complexe

Alain Yger

Université de Bordeaux, Talence 33405, France
E-mail address: Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr

Résumé. Ce cours se veut un cours de première initiation à la géométrie complexe ; il vise à mettre l'accent sur un certain nombre de concepts inhérents au cadre complexe (notamment celui de positivité) et que le cadre réel n'offre pas. On mettra certains de ces concepts en situation dans des questions de géométrie algébrique effective ou de théorie des nombres où ils s'avèrent (souvent d'ailleurs exploités conjointement à des outils relevant de l'analyse réelle, par exemple de la théorie du potentiel), conjointement à la boite à outils qu'ils engendrent, souvent d'une grande utilité.

Table des matières

COURS 1

Variétés analytiques complexes

1.1. Le cadre réel versus le cadre complexe

L'Ecole Mathématique Africaine de Ziguinchor dans le cadre de laquelle a été dispensé ce cours étant dédiée tant à la géométrie réelle qu'à la géométrie complexe, il semble important de souligner pour commencer les articulations entre ces deux thématiques et pour se faire de pointer tout d'abord ce qui différencie les univers $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ et ce que le second nous apporte par rapport au premier.

Ces deux univers sont reliés entre eux de bien des manières ; on se contente ici d'en suggérer deux.

— On peut envisager au dessus de $\mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n}$ le « tube » complexe
$$\mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n} + i\mathbb{R}^n_{y_1,\dots,y_n} \ ;$$
ceci correspond à la représentation *cartésienne* des n-uplets de nombres complexes $z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. La projection $x + iy \mapsto x$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est ouverte et continue, mais elle n'est pas topologiquement propre.

— On peut également envisager l'application surjective (cette fois continue et topologiquement propre)
$$(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \longmapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \in \mathbb{R}^n$$
(correspondant à la représentation polaire $(z_1, \dots, z_n) = e^{x_1+i\theta_1}, \dots, e^{x_n+i\theta_n})$ des n-uplets de nombres complexes non nuls).

La première distinction entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ consiste en ce que le corps $\mathbb{C}$, corps de base pour la géométrie complexe, se trouve être *algébriquement clos* (c'est d'ailleurs la clôture algébrique de $\mathbb{R}$) alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas ; là se trouve une des raisons majeures qui ont présidé à l'apparition du calcul complexe. Le *théorème des zéros de Hilbert* assure, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une correspondance bijective entre les *idéaux radicaux* de l'algèbre polynomiale $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, c'est-à-dire les idéaux I tels que
$$I = \sqrt{I} := \{a \in I \,;\, \exists q_a \in \mathbb{N}^*,\ a^{q_a} \in I\}$$
et les *sous-ensembles algébriques* de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire les sous-ensembles fermés de $\mathbb{C}^n$ définis comme le lieu des zéros communs d'un nombre fini d'équations algébriques $p = 0$, où $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$: à un idéal radical I, on associe l'ensemble
$$V(I) = \{z \in \mathbb{C}^n \,;\, p(z) = 0 \quad \forall\, z \in I\}$$
tandis qu'au sous-ensemble algébrique V de $\mathbb{C}^n$, on associe l'idéal radical I_V constitué des polynômes $p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que la fonction polynomiale correspondante p soit identiquement nulle sur V. Pareille correspondance bijective n'existe pas dans le

cadre réel : les idéaux principaux (et radicaux) de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ engendrés respectivement par X_1 et $X_1(X_1^2 + X_2^2 + 1)$ ont même ensemble de zéros (l'axe des x_2) mais sont différents.

La seconde distinction est plus subtile : on dispose dans $\mathbb{C}^n$ d'une notion commode de *positivité*, ce dont on ne dispose pas sous une forme aussi simple dans $\mathbb{R}^n$. On dispose dans $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ de $2n$ degrés de liberté, ce que l'on matérialisera, plutôt que de considérer les $2n$ variables $x_1, y_1, ...x_n, y_n$ où $z_j = x_j + iy_j$ pour $j = 1, ..., n$, en couplant aux n variables $(z_1, ..., z_n)$ (dites fonctions coordonnées complexes) les n variables « fantômes » que sont $\bar{z}_1, ..., \bar{z}_n$. Bien sûr on ne saurait pourtant parler d'« d'indépendance » entre z_j et $\bar{z}_j$ car l'une est la conjuguée de l'autre ; et pourtant tout se comporte au niveau calculatoire comme s'il en était ainsi. Pourquoi alors ce qualificatif de variables « fantômes » pour désigner les variables antiholomorphes $\bar{z}_j$? Tout simplement par ce que si l'on introduit les opérateurs différentiels « algébriques » (ou encore « holomorphes »)

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \quad j = 1, ..., n$$

(prendre garde au signe car pourtant $z_j = x_j + iy_j$), on a

$$\frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} = 0 \quad \forall\, j, k = 1, ...n.$$

Autrement dit les coordonnées antiholomorphes $\bar{z}_k$, $k = 1, ..., n$, sont reconnues et traitées comme le seraient des constantes $\bar{\mathbf{z}}_k$ par les opérateurs différentiels algébriques $\partial/\partial z_j$, $j = 1, ..., n$.

Ainsi la forme hermitienne canonique

$$|z|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{\mathbf{z}}_j$$

peut être assimilée lors de calculs algébriques impliquant des ces opérateurs différentiels $\partial/\partial z_j$ $(j = 1, ..., n)$ à une forme linéaire en $z_1, ..., z_n$ à coefficients constants ; pareille forme hermitienne permet pourtant de retrouver la positivité car

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^n, \quad |z|^2 \geq 0.$$

Dans $\mathbb{R}^n$ au contraire, la forme quadratique positive canonique

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

demeure une vraie fonction polynomiale du second degré en les n variables réelles $x_1, ..., x_n$.

De même, la forme différentielle

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \Big[\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{\mathbf{z}}_j\Big] = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

est une *forme positive*, à savoir la forme volume sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ une fois que l'on a convenu d'orienter $\mathbb{C}^n$ de manière à ce que pour toute fonction continue $\varphi\ : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

à support compact

$$\int_{\mathbb{C}}^{n} \varphi \, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n := \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi \, dx_1 dy_1 \dots dx_n \, dy_n,$$

où $dx \, dy$ figure ici la mesure de Lebesgue $2n$-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^{2n}$.

On verra plus loin un autre avatar de cet intéressant concept de positivité dans $\mathbb{C}^n$ avec le fait que si $f = (f_1, ..., f_n)$ est une application holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n_z$ et que l'on considère dans l'ouvert correspondant $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$ la fonction

$$F = (F_1, ..., F_{2n}) := (\operatorname{Re} f_1, \operatorname{Im} f_1, ..., \operatorname{Re} f_n, \operatorname{Im} f_n)$$

que

$$\det \Big[\frac{\partial [F_1, F_2, ..., F_{2n}]}{\partial [x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]} \Big] = \Big| \det \Big[\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \Big]_{1 \leq j,k \leq n} \Big|^2 \geq 0.$$

1.2. Variétés analytiques complexes, exemples

1.2.1. Notion de variété analytique complexe

Se donner une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n, c'est se donner dans un premier temps un espace topologique séparé $\mathcal{X}$ (que l'on peut exhauster de la manière suivante : $\mathcal{X} = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$, où $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de compacts emboités les uns dans les autres : $K_0 \subset K_1 \subset \cdots$) ; on dit aussi qu'un tel espace est *dénombrable à l'infini*.

Il convient ensuite de se donner un *atlas* $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une collection de paires (U_ι, φ_ι), où les U_ι sont des ouverts de $\mathcal{X}$ dont l'union $\bigcup_\iota U_\iota$ est égale à $\mathcal{X}$ et, pour chaque indice ι, un homéomorphisme φ_ι entre U_ι et un ouvert $\varphi_\iota(U_\iota)$ de $\mathbb{C}^n$; les n applications coordonnées de φ_ι, toutes à valeurs complexes, sont dites *coordonnées locales complexes* dans l'ouvert de carte U_ι, la *carte* elle-même étant la donnée du couple $(U_\iota, \varphi_\iota \ : U_\iota \to \mathbb{C}^n)$.

Il reste le plus important : assurer la compatibilité des cartes entre elles et, ce faisant, le caractère « analytique complexe » ou encore « holomorphe » de la structure ainsi réalisée. On exige pour cela que, pour toute paire d'indices (ι_0, ι_1) telle que l'ouvert $U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1} = U_{\iota_0, \iota_1}$ soit un ouvert non vide de $\mathcal{X}$, l'application

$$\varphi_{\iota_0, \iota_1} \ : \zeta \in \varphi_{\iota_0}(U_{\iota_0, \iota_1}) \longmapsto \varphi_{\iota_1} \circ \varphi_{\iota_0}^{-1}(\zeta) \in \varphi_{\iota_1}(U_{\iota_0, \iota_1})$$

(qui se trouve être une bijection) soit *holomorphe* et d'inverse *holomorphe*. Reste à définir le qualificatif « holomorphe », ce que nous ferons ici de la manière *a priori* la moins « contraignante » possible : une application holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est une application $f = (f_1, ..., f_n)$ dont les applications coordonnées sont continues dans Ω (considéré ici comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, les variables réelles étant, dans cet ordre, $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n$ (où $z_\ell = x_\ell + i y_\ell$ pour $\ell = 1, ..., n$ et telles que les distributions-fonctions $[f_j]$ correspondantes vérifient de plus, au sens des distributions, le système d'équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\ell}([f_j]) = 0, \quad j = 1, ..., n, \ \ell = 1, ..., n,$$

où l'on note
$$\frac{\partial}{\partial \bar z_\ell} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\ell} + i\,\frac{\partial}{\partial \bar y_\ell}\Big) \quad (z_\ell = x_\ell + i\,y_\ell).$$
Cela équivaut en fait à dire que la fonction f est de classe C^∞ dans Ω et vérifie, tant que $\Delta(z_0, r(z_0)) := \overline{D(z_{0,1}, r_1(z_0))} \times \cdots \times \overline{D_{z_{0,n}}, r_n(z_0))} \subset \Omega$, la formule de Cauchy en plusieurs variables dans ce polydisque, soit

(1.1)
$$\forall\, z \in \mathrm{int}\,\big(\Delta(z_0, r(z_0))\big) \quad \big(\text{où } z_0 = (z_{0,1}, ..., z_{0,n})\big)$$
$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{(\mathbb{S}^1)^n} f\big(z_{0,1} + r_1(z_0)\,\zeta_1, \dots f(z_{0,n} + r_n(z_0)\,\zeta_n\big) \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{z_{0,j} + r_j(z_0)\zeta_j - z_j}$$
$$= \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\gamma_{z_0,r,1}\times\cdots\times\gamma_{z_0,r,n}} f(\zeta)\,\frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}$$
Ici $\mathbb{S}^1$ désigne le cercle unité réel et l'orientation imposée sur chaque facteur $\mathbb{S}^1$ est celle consistant (pour ζ_j) à parcourir le cercle unité réel du plan complexe
$$\big\{\zeta_j = z_{0,j} + i\,r_j(z_0)\,e^{i\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\big\}$$
dans le sens trigonométrique ; le n-cycle défini comme $\gamma_{z_0,r,1} \times \cdots \times \gamma_{z_0,r,n}$ (où $\gamma_{z_0,r,j}$ désigne le chemin $\gamma_{z_0,r,j} \ : \theta \in [0,1] \longmapsto z_{0,j} + r_j(z_0)\,e^{2i\pi\theta}$) est appelé *frontière de Shilov* (parfois aussi *squelette* mais on préfèrera ici « frontière de Shilov » car « squelette » peut signifier beaucoup d'autres choses) du polydisque $\Delta(z_0, r(z_0))$; on note que ce n'est en aucun cas la « frontière » (orientée en accord avec l'orientation de Ω, donc de C^n) du polydisque $\Delta(z_0, r(z_0))$, puisque cette frontière doit être un cycle de dimension réelle $2n-1$ et non (comme c'est le cas pour la frontière de Shilov) un cycle de dimension réelle n.

En fait, on aurait pu alléger encore les hypothèses et juste supposer que f était une distribution dans U. L'opérateur
$$\bar\partial \ : T \in \mathcal{D}'(\Omega) \longmapsto \sum_{l=1}^n \frac{\partial T}{\partial \bar z_j}\,d\bar z_j$$
est en effet un opérateur hypoelliptique, au sens où le support singulier de T est inclus dans le support singulier de $\bar\partial T$; auquel cas, dès que $\bar\partial T = 0$, le support singulier de T est vide, ce qui signifie que T est une distribution-fonction C^∞, donc (si l'on enchaîne avec ce qui précède) que T est en fait une distribution-fonction holomorphe dans Ω.

Une première observation (en relation précisément avec le concept de positivité) est que si $f = (f_1, ..., f_n) = \mathrm{Re}\, f + i\,\mathrm{Im}\, f$ est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et si
$$\frac{\partial}{\partial z_\ell} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\ell} - i\frac{\partial f}{\partial y_\ell}\Big), \quad \ell = 1, ..., n \quad (z_\ell = x_\ell + iy_\ell),$$
alors on a dans Ω (pensé ci comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$) l'identité (que l'on pourra vérifier en exercice) que l'on a déjà mentionné à la section 1.1 :
$$\bigwedge_{j=1}^n d\,[\mathrm{Re}\, f_j] \wedge d\,[\mathrm{Im}\, f_j] = \Big|\det\Big[\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\Big]\Big|^2 dx_1\wedge dy_1 \wedge\cdots\wedge dx_n \wedge dy_n. \tag{1.2}$$

Ainsi, lorsque l'on décide de choisir l'orientation sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ de manière à ce que la $2n$-forme différentielle $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ corresponde à la forme volume euclidien dans $\mathbb{R}^{2n}$, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x,y)\, dxdy, \tag{1.3}$$

où $dxdy$ figure la mesure de Lebesgue $2n$-dimensionnelle et φ désigne une fonction continue de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ à support compact (il y a deux orientations possibles pour $\mathbb{C}^n$, celle que l'on propose ici et celle pour laquelle les deux expressions dans (1.3) sont opposées), on est assuré que les matrices jacobiennes de toutes les applications de changement de cartes, considérées comme des bijections C^∞ et d'inverse C^∞ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$, sont de déterminant strictement positif en tout point. Ceci assure une cohérence au niveau des orientations des cartes. On dit qu'une variété analytique complexe de dimension n est *orientable*.

Si $\mathcal{X}$ est une variété analytique complexe de dimension n dont la structure est donnée par un atlas $(U_\iota, \varphi_\iota)_\iota$, on peut considérer chaque application φ_ι comme un homéomorphisme entre U_ι et un ouvert $\widetilde{\varphi_\iota(U_\iota)}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et ne retenir du fait que les morphismes de changement de cartes $\varphi_{\iota_1} \circ \varphi_{\iota_0}^{-1}$ sont biholomorphes que le fait qu'ils s'agisse de difféomorphismes de classe C^∞ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$. La structure géométrique (réelle cette fois) obtenue en suivant ce point de vue est ditevariété différentielle sous-jacente à la variété analytique complexe $\big(\mathcal{X}, (U_\iota, \varphi_\iota)_\iota\big)$. Il s'agit d'une variété différentielle de dimension (cette fois entendue comme réelle) $2n$.

1.2.2. Quelques exemples

Nous donnons ici quelques exemples importants de variétés analytiques complexes. Plusieurs de ces exemples sont des exemples de variétés analytiques complexes compactes.

Exemple 1.1 (l'espace affine $\mathbb{C}^n$)**.** L'espace $\mathbb{C}^n$ équipé de sa métrique hermitienne usuelle

$$\sum_{j=1}^n dz_j \otimes d\bar{z}_j \ : (\xi, \eta) \in \mathbb{C}^n \longmapsto \sum_{j=1}^n \xi_j \bar{\xi}_j$$

est une variété différentielle de dimension n ; l'atlas est ici un atlas à une carte $(\mathbb{C}^n, \mathrm{Id})$. La variété différentielle sous-jacente est la variété différentielle réelle $\mathbb{R}^{2n}$.

Exemple 1.2 (l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)**.** L'espace quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0,...,0)\}}{\mathbb{C}^*} \tag{1.4}$$

(deux éléments $(z_0, ..., z_n)$ et $(w_0, ..., w_n)$ sont dans la même classe dès qu'il existe $t \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = tw$), équipé de la métrique

$$d([z_0 : \ldots : z_n], [w_0 : \ldots w_n]) := \frac{\|z \wedge w\|}{\|z\|\,\|w\|}$$

(le produit extérieur de deux éléments de $\mathbb{C}^{n+1}$ étant un élément du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\binom{n+1}{2}$, $\mathbb{C}^{n+1} \wedge \mathbb{C}^{n+1}$, que l'on équipe de la norme hermitienne) hérite aussi d'une structure de variété analytique (ici compacte) de dimension n. L'atlas est ici constitué des $n+1$ ouverts $U_j := \{[z_0 : \ldots : z_n]\,;\, z_j \neq 0\}$, l'application φ_j étant l'application

$$\varphi_j \;: [z_0 : \ldots : z_n] \in U_j \longmapsto (z_{j+1}/z_j, ..., z_n/z_j, z_0/z_j, ..., z_{j-1}/z_j) \in \mathbb{C}^n.$$

On constate que les applications $\varphi_{\iota_0,\iota_1}$ de changement de cartes ne sont pas seulement biholomorphes, mais sont aussi des applications monoidales, en particulier rationnelles ; on dit que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété algébrique complexe lisse de dimension n. Il y a de plus une action du tore complexe $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^n$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: si $z = [z_0 : \ldots : z_n] \in U_j$ et $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$, on fait agir $(t_1, ..., t_n)$ sur z en posant

$$(t_1, ..., t_n) \bullet z = \varphi_j^{-1}\big((t_1(\varphi_j(z)))_1, ..., t_n(\varphi_j(z))_n\big).$$

Pour cette action, on constate que l'ouvert de U_0 constitué des $[1 : t_1 : \ldots : t_n]$ avec $t_j \in \mathbb{C}^*$ est une orbite dense T dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, orbite que d'ailleurs on peut naturellement identifier à $\mathbb{T}^n$ par $[1 : t_1 : \ldots : t_n] \leftrightarrow (t_1, ..., t_n)$; une telle variété algébrique complexe lisse $\mathcal{X}$ de dimension n, contenant une copie T du tore $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ comme ouvert dense et telle que $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ agisse sur $\mathcal{X}$ et que cette action correspond à la multiplication terme-à-terme sur T, est dite *variété torique lisse de dimension n*. On peut en fait identifier U_0 à $\mathbb{C}^n$ *via* la correspondance $[1 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_n] \leftrightarrow (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ et considérer ainsi ensemblistement $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme l'union disjointe

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \sqcup \big\{[0 : z_1 : \ldots : z_n]\,;(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}\big\} \simeq \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}).$$

On peut ainsi considérer $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme l'*hyperplan à l'infini* de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ en pointant la règle géométrique suivante : si $(z_0, ..., z_n)$ est un point de $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0, ..., 0)\}$, l'adhérence dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ de l'orbite du point $(z_0, ..., z_n)$ sous l'action de la multiplication par un élément de $\mathbb{C}^*$ (action définissant justement $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme le quotient géométrique (1.4)) « perce » l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ (que précisément on identifie ici à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) en un unique point, à savoir justement la classe d'équivalence $[z_0 : ... : z_n]$ de $(z_0, ..., z_n)$ dans le quotient (1.4) ; c'est sur cette règle que se fonde le principe de la perspective (ici dans le cadre complexe) que l'on doit aux artistes italiens de la Renaissance avant que ne le formalisent plus tard en termes d'espace projectif les mathématiciens tels Girard Desargues. Lorsque $n = 1$, la variété différentielle sous-jacente (c'est ici une variété différentiable orientable de dimension 2, c'est-à-dire une *surface orientable*) est ici la *sphère de Riemann* $\mathbb{S}^2$ (sphère unité de l'espace affine $\mathbb{R}^3$) avec deux cartes données respectivement par la projection stéréographique depuis le pôle nord N dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et la projection stéréographique depuis le pôle sud S (dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, composée avec la symétrie par rapport à l'axe $x'Ox$.

Exemple 1.3 (surfaces de Riemann)**.** Ce sont les variétés analytiques complexes de dimension 1 : par exemple $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (de surface sous-jacente la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$) ou bien les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda$ où $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$ avec ω_1 et ω_2 deux nombres complexes non nuls tels que $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ (de surface sous-jacente un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$), les courbes hyperelliptiques de surfaces sous-jacentes les tores à g trous (g est appelé alors *genre* de la courbe), etc. Notons que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s'identifie à une sphère décalottée auquel un ruban de Mœbius a été collé bord à bord et n'est donc pas orientable ; cette surface (le plan projectif réel) ne saurait donc porter de structure de surface de Riemann.

1.3. Convexité, pluri-sousharmonicité, opérateurs Hessien et dd^c

On rappelle qu'une *fonction convexe* à valeurs réelles dans un ouvert u de $\mathbb{R}^n$ est une fonction de u dans $\mathbb{R}$ telle que dès que x et y sont deux points de u avec $[x,y] \subset U$ et que λ, μ sont deux nombres positifs ou nuls de somme 1,

$$\varphi(\lambda x + \mu y) \leq \lambda\, \varphi(x) + \mu\, \varphi(y).$$

Toute fonction convexe dans un ouvert u de $\mathbb{R}^n$ est automatiquement continue dans cet ouvert.

La *convexité* véhicule une notion de *positivité* dans $\mathbb{R}^n$: si φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles dans un ouvert u de $\mathbb{R}^n$, dire que φ est convexe dans u équivaut en effet à dire qu'en tout point de l'ouvert u, la *matrice Hessienne* $\mathrm{Hess}(u)$ (définie comme la matrice jacobienne du gradient $\nabla\varphi\ : u \to \mathbb{R}^n$ de φ) est une matrice symétrique positive (c'est-à-dire induisant une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$). Nous montrerons plus loin comment attacher à toute fonction convexe dans un ouvert u de $\mathbb{R}^n$ une mesure positive dans U, dite de *Monge-Ampère* ; lorsque φ est C^2 et convexe, cette mesure de Monge-Ampère sera la mesure $\det(\mathrm{Hess}[\varphi](x))\, dx_1 \dots dx_n$ (à densité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ le hessien, c'est-à-dire le déterminant de la matrice Hessienne de la fonction convexe φ).

Si $n = 1$ et que φ est une fonction à valeurs réelles dans un ouvert u de $\mathbb{R}$, dire que φ est convexe dans u équivaut aussi à dire que φ vérifie le *propriété de la sous-moyenne* dans u, c'est-à-dire que pour tout segment $[x,y]$ de $\mathbb{R}$ inclus dans U, on a

$$\varphi((x+y)/2) \leq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}.$$

En dimension réelle égale cette fois à 2, il faut penser différemment le fait qu'une fonction à valeurs réelle vérifie la propriété de sous-moyenne en tout point de U. Il faut cette fois remplacer les segments $[x,y]$ par des disques fermés $\overline{D(z_0,r)}$ (on choisit le disque du fait que c'est la seule forme isotrope). Dire alors qu'une fonction φ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est *sous-harmonique* dans $U \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ revient à dire que φ est semi-continue supérieurement dans U (ce qui signifie que l'image réciproque $\varphi^{-1}(\{]-\infty,\alpha[\})$ est un ouvert de u, ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ou encore que $\varphi^{-1}([\alpha,+\infty[)$ est un fermé de U) et que de plus pour tout disque $\overline{D(z_0,r(z_0))}$ inclus dans une telle composante connexe,

$$\varphi(z_0) \leq \int_{\mathbb{S}^1} f(z_0 + u)\, d\sigma_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r(z_0)\, e^{i\theta})\, d\theta.$$

Dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ une fonction φ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *pluri-sous-harmonique* dans U si

- — φ est semi-continue supérieurement dans U ;
- — pour toute droite D de $\mathbb{C}^n$, la restriction de φ à l'ouvert $U \cap D$ est une fonction sous-harmonique dans $U \cap D$ (considéré comme un ouvert de $\mathbb{C}$ après paramétrisation affine de D).

Les fonctions à valeurs réelles harmoniques dans $U \subset \mathbb{C}$ (f est continue et vérifie la propriété de la moyenne en tout point) sont nécessairement de classe C^∞ et telles que

$\Delta f \equiv 0$, où

$$\Delta = 4\,\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Un opérateur agissant sur les distributions pour les transformer en $(1,1)$-courants, en l'occurrence $dd^c := (i/(2\pi)\,\partial \circ \bar\partial$ (d^c pour « d-conjugué ») est intimement lié à la notion de pluri-sous-harmonicité. Si T est une distribution dans U, $dd^c[T]$ est le courant (forme différentielle à coefficients distributions)

$$dd^c T := \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)\,\partial\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \bar z_j}\,d\bar z_j\Big) = \Big(\frac{i}{2\pi}\Big)\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial z_k \partial \bar z_j}\,dz_k \wedge d\bar z_j.$$

Si $n = 1$, on a en particulier

$$dd^c T = \frac{i}{2\pi} \times \frac{\Delta T}{4} \times (-2i\,dx \wedge dy) = \Delta[T]\,\frac{dx \wedge dy}{4\pi}.$$

La raison de la présence de i tient au fait que l'on souhaite (par exemple lorsque T est la distribution $T = [\varphi]$ associée à une fonction sous-harmonique localement intégrable, auquel cas ΔT est une mesure positive) assurer la positivité de $dd^c T$.

La raison de la normalisation par la constante transcendante $1/(2\pi)$ est tout autre ; elle est simplement de nature algébrique. Elle est juste là pour assurer que la (n,n)-forme

$$\big(dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)\big)^{\wedge^n}$$

(qui est bien définie dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ car les expressions de carte en carte se recollent pour $dd^c[\log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)]$ alors que $[z_0 : \ldots : z_n] \longmapsto \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)$ ne définit pas une fonction globalement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) soit telle que

$$\int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \big(dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)\big)^{\wedge^n} = 1.$$

Ceci s'interprète comme le fait que le degré de la variété algébrique compacte $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ soit égal à 1.

Remarque 1.1 (le noyau de Bochner-Martinelli)**.** La $2n$-forme volume convenablement normalisée

$$\omega_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} = \big(dd^c \log(1 + |z_1/z_0|^2 + \cdots + |z_n/z_0|^2)\big)^{\wedge^n}$$

dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ induit une forme très importante dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ...0)\}$ si l'on reprend le point de vue de la perspective introduit dans l'exemple 1.2, où $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ apparait comme l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$, point de vue selon lequel l'adhérence dans $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ de l'orbite de $(z_0, z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ sous l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ « perce » l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ justement au point $[z_0 : \ldots : z_n]$. On observe que

$$\begin{aligned} &\frac{\big(dd^c \log(1 + |z_1/z_0|^2 + \cdots + |z_n/z_0|^2)\big)^{\wedge^n}}{n!} \wedge \frac{dz_0}{z_0} = \\ &\pm \frac{1}{(2i\pi)^n}\,\mathrm{BM}_{n+1}(z_0, ..., z_n) \wedge dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où

$$\mathrm{BM}_{n+1}(z_0,...,z_n) := \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \bar{z}_k\, [d\bar{z}]_k}{(|z_0|^2+\cdots+|z_n|^2)^{n+1}}, \tag{1.6}$$

avec, pour tout $k=0,...,n$,

$$[dz]_k := \bigwedge_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n} d\bar{z}_\ell.$$

La $(n,n+1)$-forme différentielle BM_{n+1} est appellée *noyau de Bochner-Martinelli* en $(n+1)$ variables. On la retrouve dans les représentations intégrales ainsi : si f est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$, on peut grâce à la formule de Cauchy affirmer que si $\eta_0,...,\eta_n$ sont $n+1$ nombres strictement positifs assez petits

$$f(0,...,0) = \frac{1}{(2i\pi)^{n+1}} \int_{\Gamma(\eta^2)} f(\zeta_0,...,\zeta_n) \bigwedge_{k=0}^{n} \frac{d\zeta_k}{\zeta_k}, \tag{1.7}$$

où $\Gamma(\eta^2)$ est la frontière de Shilov du polydisque de centre l'origine et de multi-rayon $(\eta_0^2,...,\eta_n^2)$. En moyennisant les formules (1.7) lorsque $(\eta_0^2,...,\eta_n^2)$ parcourt le simplexe

$$\Sigma_n(\epsilon^2) := \{(u_1,...,u_n)\,;\, \eta_j>0 \quad \forall\, j=0,...,n,\ \sum_{j=0}^{n} u_j = \epsilon^2\}$$

lorsque $\epsilon>0$ est assez petit, on obtient la représentation

$$f(0,...,0) = \frac{n!\,(-1)^{n(n+1)/2}}{(2i\pi)^{n+1}} \int_{|\zeta|^2=\epsilon} f(\zeta_0,...,\zeta_n)\, \mathrm{BM}_{n+1}(\zeta_0,...,\zeta_n) \wedge d\zeta_0\wedge\cdots\wedge d\zeta_n. \tag{1.8}$$

En effet, une forme volume sur $\Sigma_n(\epsilon^2)$ est donnée par

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k\, du[k]}{u_0+\cdots+u_n} = \omega_n(u)$$

puisque

$$\omega_n(u)\wedge (d[u_0+\cdots+u_n]) = du_0\wedge\cdots\wedge du_n.$$

La mesure de Lebesgue normalisée sur $\Sigma_n(\epsilon^2)$ correspond à la n-forme $\omega_n(u)n!/\epsilon^{2n}$. On a donc

$$f(0) = \int_{(|\eta_0|^2,...,|\eta_n|^2)\in\Sigma_n(\epsilon^2)} \Big(\frac{n!}{(2i\pi)^{n+1}} \int_{\Gamma(\eta_0^2,...,\eta_n^2)} \frac{d\zeta_0}{\zeta_0}\wedge\cdots\wedge\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\Big)\wedge \frac{\omega_n(|\eta_0|^2,...,|\eta_n|^2)}{\epsilon^{2n}}.$$

En effectuant les calculs, on trouve bien la formule de représentation intégrale (1.8).

On montrera que le fait qu'une fonction φ localement intégrable dans $U\subset\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ soit pluri-sous-harmonique dans U équivaut à ce que $dd^c[\varphi]$ soit un $(1,1)$-courant positif, ce qui traduira une fois encore la richesse du concept de positivité dans $\mathbb{C}^n$.

Pour revenir à $\mathbb{R}^n$, signalons qu'il est équivalent de dire qu'une fonction φ (nécessairement continue dans u car u est ouvert) d'un ouvert u de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe et que son prolongement

$$x + iy \in u \oplus i\mathbb{R}^n \longmapsto \varphi(x)$$

est pluri-sous-harmonique dans le tube $u + i\mathbb{R}^n$. Les notions de *convexité* dans le cadre réel de $\mathbb{R}^n$ et de *pluri-sous-harmonicité* dans le cadre complexe de $\mathbb{C}^n$ sont ainsi liées. Dans le cadre réel, on traduira la convexité d'une fonction φ à valeurs réelles dans un ouvert $u \subset \mathbb{R}^n$ par le fait que l'on sache associer à φ une certaine mesure positive, dite de *Monge-Ampère réelle*. Dans le cadre complexe, on traduira la pluri-sous-harmonicité d'une fonction réelle localement intégrable dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ par le fait que l'on sache lui associer (par le biais de l'action de l'opérateur dd^c) un $(1,1)$ courant positif fermé (cette notion étant à définir).

1.4. Exercices

Exercice 1.1 (convexité *versus* plurisous-harmonicité)**.**

(1) Montrer que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, il est équivalent de dire que f est convexe dans U ou que la fonction définie par $\tilde{f}\ : (x + i\xi, y + i\eta) \mapsto f(x,y)$ est plurisous-harmonique dans le tube $\widetilde{U} = U \oplus i\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{C}^2_{z,w}$ ($z = x + i\xi$, $w = y + i\eta$) au dessus de U.

(2) Soit $f\ : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire que f est convexe dans U et que la fonction $\tilde{f}\ : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ vérifie que, pour toute 1-forme Υ constante dans $\mathbb{C}^2_{z,w}$, pour toute fonction continue $\varphi\ : \widetilde{U} \to [0, +\infty[$ de classe C^∞,

$$i \int_{\widetilde{U}} \tilde{f}(\zeta, \varpi)\, \Upsilon \wedge \bar{\Upsilon} \wedge dd^c\varphi(\zeta, \varpi)\ \geq 0.$$

Exercice 1.2 (pluri-sousharmonicité)**.**

(1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\ : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction de classe C^2. Montrer que $\log f$ est sous-harmonique dans Ω si et seulement si pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $z = x + iy \in U \mapsto f(z)e^{\lambda x + \mu y}$ est sous-harmonique dans Ω.

(2) En exploitant le principe de la régularisation par convolution montrer que l'assertion établie à la première question subsiste lorsque $f\ : \Omega \to [0, +\infty[$ (la valeur 0 est cette fois tolérée pour f) est seulement supposée semi-continue supérieurement dans U.

(3) Montrer que si $F_1, ..., F_M$ sont M fonctions holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, la fonction $\log |F|^2$, où $|F|^2 := \sum_1^M |F_j|^2$ est pluri-sous-harmonique dans l'ouvert U.

COURS 2

L'algèbre linéaire « en famille » sur une variété complexe

2.1. Fibrés complexes localement triviaux

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ une variété analytique complexe de dimension (complexe) n avec son atlas $\mathcal{A}$ consistant en une famille de cartes locales $(U_\iota, \varphi_\iota)_\iota$ comme au Cours 1 (sous-section 1.2.1). Si m est un entier strictement positif, $\mathcal{X} \times \mathbb{C}^m$ hérite d'une structure de variété analytique complexe de dimension $n + m$.

On peut représenter ensemblistement cet ensemble produit $\mathcal{X} \times \mathbb{C}^m$ comme

$$\mathcal{X} \times \mathbb{C}^m = \bigcup_{z \in \mathcal{X}} (\{z\} \times \mathbb{C}^m) = \bigcup_{z \in \mathcal{X}} E_z \quad (E_z = \{z\} \times \mathbb{C}^m).$$

Se donner une fonction $f\ : \mathcal{X} \to \mathbb{C}^m$ revient à se donner, au dessus de chaque point $z \in \mathcal{X}$, un point $e = (z, \xi)$ de la « fibre » $\{z\} \times \mathbb{C}^m$.

Pour pouvoir faire de l'algèbre linéaire « en famille » sur une variété analytique complexe, nous allons introduire la notion de *fibré complexe localement trivial de rang* m au dessus de $\mathcal{X}$. Cela signifie basiquement que nous allons nous affranchir du fait que la fibre E_z se trouvait dans le cas précédent être la fibre très particulière $E_z = \{z\} \times \mathbb{C}^m$ (tout en préservant cependant ce modèle localement quitte à « redresser » la situation par un C^∞ difféormorphime pour précisément s'y ramener).

Ultérieurement dans le cours, la « base » $\mathcal{X}$ (support d'indexation des fibres) pourra être un *espace analytique complexe* (c'est-à-dire une variété analytique complexe où l'on tolère la présence de singularités, comme le *cusp* $z^3 - w^2 = 0$ paramétré par $z = t^2$, $w = t^3$), voire même un objet hors du champ de la géométrie complexe, par exemple un *espace analytique au sens de Berkovich sur un corps valué* $\mathbb{K}$, la valeur absolue définie comme l'exponentielle de l'opposée de valuation étant non archimédienne (par exemple $|\ |_p$ dans $\mathbb{Q}_p$). Les fibres E_z pourront être alors des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec des choix de $\mathbb{K}$ autres que celui fait ici de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ avec sa valeur absolue ultramétrique p-adique $|\ |_p$ ou la clôture intégrale de ce corps, le corps des séries de Puiseux en une variable à coefficients complexes ou dans un corps de nombres, etc.). Mais par contre toute la structure de variété analytique définie sur $\mathbb{K}$ ou d'espace analytique défini sur $\mathbb{K}$ devra être entièrement repensée dès le départ (définition ensembliste, notion d'atlas, de carte locale, etc. Il faudra dans ce cas remplacer les notions de fonction C^∞ ou de fonction holomorphe avec lesquelles on travaille ici avec celle de fonction régulière (au sens *section du faisceau structurant*[1] de l'espace de base $\mathcal{X}$ au dessus duquel on prétend travailler).

1. Voir la section 3.2 plus loin.

Pour ≪ mesurer ≫ les objets, il sera aussi important par la suite d'équiper chaque fibre E_z d'une métrique (ici hermitienne car les fibres sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels), la métrique sur E_z dépendant de manière cohérente (C^∞ ou continue) du point de base z.

Définition 2.1 (fibré complexe localement trivial de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n). Du point de vue ensembliste, *se donner un fibré complexe localement trivial de rang m au dessus d'une variété analytique complexe de dimension n* revient à se donner, pour chaque $z \in \mathcal{X}$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E_z de dimension m de manière à ce que :

— d'une part, l'ensemble

$$E := \bigcup_{z\in\mathcal{X}} (\{z\} \times E_z)$$

porte une structure de variété différentielle réelle de dimension réelle $2(n+m)$, la projection $\pi\ : (z,\xi) \mapsto z$ étant naturellement continue ;

— d'autre part, pour tout $z \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage ouvert U_z de z ainsi qu'un *difféomorphisme C^∞ de trivialisation* $\theta_z\ : \pi^{-1}(U_z) \subset E \longleftrightarrow U_z \times \mathbb{C}^m$ de manière à ce que

$$\forall e \in \pi^{-1}(U_z), \quad \pi_{|\pi^{-1}(U_z)}(e) = \mathrm{proj}_{\mathcal{X}}(\theta_z(e))$$

où

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{X}}(z', v) = z' \quad \forall z' \in \mathscr{U}_z,\ \forall\, v \in \mathbb{C}^m$$

et, pour chaque $z' \in U_z$, $(\theta_z)_{|\{z'\}\times E_{z'}}$ réalise un $\mathbb{C}$-isomorphisme entre la fibre $\{z'\} \times E_{z'}$ et $\{z'\} \times \mathbb{C}^m$.

On dit alors que $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ est un fibré complexe localement trivial de rang m au dessus de la variété analytique complexe $\mathcal{X}$.

Étant donné un tel fibré $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ de rang m au dessus de $\mathcal{X}$, on appelle *section C^∞ de E dans un ouvert U de $\mathcal{X}$* toute application s de classe C^∞ de U dans E (E étant équipé ici de sa structure différentielle réelle de dimension réelle $2(n+m)$) telle que, pour tout $z \in U$, $s(z) \in E_z$. On note $C^\infty(U,E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sections C^∞ de E dans l'ouvert U et $\mathcal{D}(U,E)$ le $\mathbb{C}$-sous-espace de $C^\infty(U,E)$ dont les éléments sont les sections de E qui sont C^∞ et à support compact dans l'ouvert U. On peut introduire plus généralement le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^k(U,E)$ des sections de U dans E qui sont de classe C^k ($k = 0, 1, \ldots$).

Si θ_z désigne le morphisme de trivialisation de E au dessus d'un voisinage U_z d'un point z (voir la définition 2.1), les applications

$$z' \in U_z \mapsto \theta_z^{-1}(z', e_j) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

(où $\{e_1, \ldots, e_m\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^r$) forment ce que l'on appelle un *repère*[1] pour le fibré E au dessus de U_z. Dans ce repère, toute section s de classe C^∞ du fibré E dans un ouvert U contenant U_z s'exprime dans U_z sous la forme

$$s(z') = \sum_{j=1}^m s_{U_z,j}(z') \otimes e_j(z') = \sum_{j=1}^m s_j(z') \otimes e_j(z'),$$

1. Le terme anglo-saxon est *frame*.

où les fonctions $z' \mapsto s_{U_z,j}(z')$ $(j = 1, ..., m)$ sont des fonctions C^∞ de U_z (considéré comme ouvert de la variété analytique complexe $\mathcal{X}$) à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$.

Si le fibré est supposé équipé d'une métrique hermitienne, on peut exprimer la forme sesquilinéaire polarisant cette métrique hermitienne sous la forme

$$z' \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} h_{j,k}(z')\, e_j^*(z') \otimes e_k^*(z'),$$

où $(e_1^*, ..., e_n^*)$ désigne le repère dual de $(e_1, ..., e_m)$ et où la matrice $[h_{j,k}]_{1 \leq j,k \leq m}$ est une matrice hermitienne $[m, m]$ définie positive dont les entrées varient de manière C^∞ (si la métrique est « lisse ») ou simplement continue en fonction de $z' \in U_z$; il est également possible d'orthonormaliser le repère $(e_1, ..., e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt et de disposer ainsi d'un repère orthonormé dans U_z.

2.1.1. Fibrés localement triviaux holomorphes

Comme $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est une variété analytique complexe de dimension n et que l'on dispose donc d'une structure complexe que nous n'avons pas encore exploité, on peut également introduire, dans la classe des $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux de rang m au dessus de $\mathcal{X}$ une sous-classe d'« êtres rigides » qui nous sera bien utile, celle des *fibrés holomorphes de rang* m. Cette fois, nous allons exploiter la structure complexe de $\mathcal{X}$, ce que nous n'avions pas encore fait jusque là.

Définition 2.2 (fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe). Du point de vue ensembliste, *se donner un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe* $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ *de dimension* n revient à se donner, pour chaque $z \in \mathcal{X}$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E_z de dimension m de manière à ce que :

— d'une part, l'ensemble

$$E := \bigcup_{z \in \mathcal{X}} (\{z\} \times E_z)$$

porte une structure de variété analytique complexe de dimension $n + r$, la projection $\pi\ : (z, \xi) \mapsto z$ étant cette fois une application holomorphe [1] ;

— d'autre part, pour tout $z \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage ouvert U_z de z ainsi qu'un *morphisme biholomorphe* [2] *de trivialisation* $\theta_z\ : \pi^{-1}(U_z) \subset E \longleftrightarrow U_z \times \mathbb{C}^m$ de manière à ce que

$$\forall e \in \pi^{-1}(U_z), \quad \pi_{|\pi^{-1}(U_z)}(e) = \mathrm{proj}_{\mathcal{X}}(\theta_z(e))$$

où

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{X}}(z', v) = z' \quad \forall z' \in U_z,\ \forall\, v \in \mathbb{C}^m$$

1. Ceci signifie qu'en composant π avec l'inverse d'une carte locale Φ_ι pour E à droite, puis avec une carte locale $\varphi_{\iota'}$ (pour $\mathscr{X}$ cette fois) à gauche, on obtient une collection d'applications holomorphes.

2. Même remarque que précédemment : ceci signifie holomorphe après composition à gauche et à droite avec les cartes locales ou leurs inverses. Il faut aussi noter que si on se limite au contexte de la géométrie algébrique, les seules applications biholomorphes qui entrent en jeu ici sont les applications rationnelles considérées hors de leur lieu polaire, d'inverse une fraction rationnelle considérée hors de son lieu polaire.

et, pour chaque $z' \in U_z$, $(\theta_z)_{|\{z'\}\times E_{z'}}$ réalise un $\mathbb{C}$-isomorphisme entre la fibre $\{z'\}\times E_{z'}$ et $\{z'\}\times \mathbb{C}^m$.

On dit alors que $E_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ *est un fibré holomorphe de rang* m *au dessus de la variété analytique complexe* $\mathcal{X}$.

Si $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ est un fibré holomorphe de rang m au dessus de $\mathcal{X}$, il existe, pour chaque $z \in \mathcal{X}$ un voisinage U_z de z dans lequel on dispose d'un repère

$$\{z' \mapsto e_1(z'), ..., z' \mapsto e_m(z')\}$$

constitué de *sections holomorphes* du fibré holomorphe E dans l'ouvert U_z. Si E est de plus équipé d'une métrique hermitienne C^∞ ou continue, il est bien sûr possible d'orthonormaliser (pour cette métrique) un tel repère holomorphe $(e_1, ..., e_m)$ dans U_z mais le prix à payer est que l'on perd bien sûr la propriété d'holomorphie pour le repère ainsi modifié de manière à être rendu orthonormé (sauf si l'application définie par $z' \to [h_{j,k}(z)]_{1\leq j,k\leq m}$ correspondant à la métrique (fonction de z') exprimée dans le repère orthonormé $(e_1, ..., e_m)$ se trouve rester constante lorsque $z' \in U_z$.

2.1.2. Construction de fibrés complexes localement triviaux de rang m à partir de cocycles

Se donner un fibré complexe localement trivial de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ de dimension n revient à se donner un recouvrement [1] $\mathcal{X} = \bigcup_\iota \widetilde{U}_\iota$ de $\mathcal{X}$ et, pour chaque paire d'indices (ι_0, ι_1), une application de classe C^∞

$$g_{\iota_0,\iota_1} : \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \to \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$$

de manière à ce que soit vérifiée la *condition de cocycle* [2] :

$$\forall\, \iota_0, \iota_1, \iota_2, \quad [g_{\iota_0,\iota_1} \circ g_{\iota_1,\iota_2}](x) = g_{\iota_0,\iota_2}(x) \quad \forall\, x \in \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \cap \widetilde{U}_{\iota_2}. \tag{2.1}$$

Une fois en effet que l'on dispose de ce *cocycle à valeurs dans* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, on construit le fibré $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ au dessus de $\mathcal{X}$ qui lui correspond en considérant dans un premier temps l'union disjointe

$$\bigsqcup_\iota (\widetilde{U}_\iota \times \mathbb{C}^m)$$

puis en quotientant ensuite cette union disjointe par la relation d'équivalence qui consiste à identifier les couples (z, v) et $(z, g_{\iota_0,\iota_1}(x).v)$ pour toute paire d'indices (ι_0, ι_1) et tout point z de $\widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1}$.

Lorsque le fibré $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ est un fibré holomorphe au dessus de la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n, la donnée de E est équivalente à celle d'un cocycle

$$(\widetilde{U}_\iota)_\iota, \quad (g_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$$

---

1. Ce recouvrement n'a rien à voir *a priori* avec le recouvrement par les ouverts de carte donné par l'atlas $\mathcal{A}$; ce dernier est en relation avec la variété $\mathcal{X}$ tandis que le recouvrement $(\widetilde{U}_\iota)_\iota$ est attaché au fibré ; d'où la différence de notations ($\widetilde{U}_\iota$ au lieu de U_ι).

2. On observera (en prenant $\iota_0 = \iota_1 = \iota_2$) que $g_{\iota,\iota} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^m}$ pour tout ι, puis en prenant $\iota_0 = \iota_2$ et ι_1 libre que $g_{\iota_0,\iota_1} = g^{-1}_{\iota_1,\iota_0}$.

où les applications g_{ι_0,ι_1} ne sont plus seulement C^∞ mais cette fois, pour chaque paire d'indices (ι_0,ι_1), holomorphes [1] de $\widetilde{U}_{\iota_0}\cap\widetilde{U}_{\iota_1}$ dans l'ouvert de $\mathbb{C}^{m^2}$ correspondant au groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbb{C},m)$ des matrices inversibles de taille $[m,m]$.

Exemple 2.1 (le fibré *tautologique* sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$)**.** Nous présenterons dans la section suivante les exemples classiques des fibrés tangent et cotangent au dessus d'une variété analytique complexe, puis des fibrés tangents holomorphe et anti-holomorphe, cotangent holomorphe et anti-holomorphe. Donnons pour l'instant ici l'exemple d'un fibré holomorphe de rang 1 (on dit aussi un ≪ fibré en droites ≫) au dessus de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, celui du *fibré tautologique*. On rappelle que la variété analytique complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété analytique complexe de dimension n définie comme le quotient géométrique de l'ouvert affine $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{(0,...0)\}$ par le groupe $\mathbb{C}^*$, la relation d'équivalence traduisant la co-linéarité des vecteurs (voir l'exemple 1.2). Au point $z=[z_0:\dots:z_n]$ de coordonnées homogènes $(z_0,...,z_n)$, on attache la $\mathbb{C}$-droite vectorielle $E_z=\mathbb{C}\cdot(z_0,...,z_n)=\{(\lambda z_0,...,\lambda z_n)\,;\,\lambda\in\mathbb{C}\}$. On équipe $\bigcup_{z\in\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}\{z\}\times E_z$ d'une structure de fibré. Ce fibré s'obtient en se basant sur la construction abstraite précédente à partir du recouvrement par les ouverts $U_j=\{[z_0:\dots:z_n]\,;\,z_j\neq 0\}$: on prend pour dfinir le cocycle les fonctions holomorphes (ici rationnelles) :

$$g_{j_1,j_2}\ :[z_0:\dots:z_n]\in U_{j_1}\cap U_{j_2}\longmapsto z_{j_1}/z_{j_2}\in\mathbb{C}^*=\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}).$$

Ce fibré est aussi noté $\mathcal{O}(-1)$ car c'est le dual du fibré dont les sections holomorphes sont les polynômes homogènes de degré 1.

2.1.3. Opérations algébriques sur les $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux

Si $E\xrightarrow{\pi}\mathcal{X}$ est un fibré complexe localement trivial de rang m au dessus de $\mathcal{X}$ on peut associer à E d'après la sous-section 2.1.2 un *cocycle* à valeurs dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ subordonné à un recouvrement $(\widetilde{U}_\iota)_\iota$ suffisamment fin de $\mathcal{X}$. On note ce cocycle $(g^E_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}=g^E$ en sous-entendant ici le recouvrement de $\mathcal{X}$ à partir duquel ce cocycle est construit.

Soient maintenant deux fibrés $E_1\xrightarrow{\pi_1}\mathcal{X}$ et $E_2\xrightarrow{\pi_2}\mathcal{X}$ localement triviaux de rangs respectifs m_1 et m_2 au dessus de $\mathcal{X}$. On peut construire à partir des deux recouvrements $(\widetilde{U}_\iota^{E_j})_\iota$ $(j=1,2)$ adaptés aux cocycles g^{E_1} et g^{E_2} un recouvrement plus fin de manière à ce que les deux cocycles g^{E_j} $(j=1,2)$ soient tous deux adaptés à ce nouveau recouvrement.

La construction abstraite d'un fibré localement trivial de rang m à partir d'un recouvrement de $\mathcal{X}$ et d'un cocycle adapté à valeurs dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ va nous permettre de conduire un certain nombre de constructions algébriques relevant de l'algèbre linéaire.

1. *La somme $E_1\oplus_{\mathbb{C}}E_2$ de deux $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux.*

On suppose que E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux de rangs respectifs m_1 et m_2. On combine les deux cocycles g^{E_1} et g^{E_2} attachés au même recouvrement

1. Si l'on pense au cadre de la géométrie algébrique, il faut remplacer ≪ holomorphe ≫ par ≪ rationnelle considérée hors du lieu polaire ≫. Ceci vaut dans toutes les constructions ci-dessous, lorsque les objets maniés seront des objets relevant d'un point de vue ≪ rigide ≫, par exemple comme ici les fibrés holomorphes sur une variété analytique complexe.

$(\widetilde{U}_\iota)_\iota$ en le cocycle $(G_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$, où, pour toute paire d'indices (ι_0,ι_1) :

$$G_{\iota_0,\iota_1}\ : z \in \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \longmapsto \begin{bmatrix} g^{E_1}_{\iota_0,\iota_1}(z) & 0 \\ 0 & g^{E_2}_{\iota_0,\iota_1}(z) \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}, m_1+m_2).$$

À partir de ce cocycle (à valeurs cette fois dans $\mathrm{GL}(m_1+m_2,\mathbb{C})$), on construit comme dans la sous-section 2.1.2 le fibré $\mathbb{C}$-fibré $E_1 \oplus_{\mathbb{C}} E_2$ (localement trivial et de rang m_1+m_2).

2. *Le produit tensoriel $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$ de deux $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux.*

On suppose encore que E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux de rang respectifs m_1 et m_2. On combine les deux cocycles g^{E_1} et g^{E_2} attachés au même recouvrement $(\widetilde{U}_\iota)_\iota$ en le cocycle $(G_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$, où, pour toute paire d'indices (ι_0,ι_1) :

$$G_{\iota_0,\iota_1}\ : z \in \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \longmapsto$$
$$\Big[e_j \otimes e_k \mapsto (g^{E_1}_{\iota_0,\iota_1}(z)\cdot e_j) \otimes (g^{E_2}_{\iota_0,\iota_1}(z)\cdot e_k)\Big]_{\substack{1\le j\le m_1\\ 1\le k\le m_2}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_1}\otimes\mathbb{C}^{m_2}, \mathbb{C}^{m_1}\otimes\mathbb{C}^{m_2}).$$

Il s'agit ici d'un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}(m_1\times m_2,\mathbb{C})$ auquel on associe grâce à la construction abstraite de la sous-section 2.1.2 un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang $m_1\times m_2$ dit *produit tensoriel* $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$.

3. *Puissances extérieures $\bigwedge^\rho E$ $(1\le\rho\le m)$ d'un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang m.*

Soit E un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang m au dessus de $\mathcal{X}$ et $1\le\rho\le m$. On associe au cocycle g^E attaché à E le cocycle $(G_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1}$:

$$G_{\iota_0,\iota_1}\ : z \in \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \longmapsto$$
$$\Big[\sum_{\{J\subset\{1,\dots,m\}\,;\,\#J=\rho\}} \lambda_J \bigwedge_{\ell=1}^{\rho} e_{j_\ell} \longmapsto \sum_J \lambda_J \bigwedge_{\ell=1}^{\rho} g^E_{\iota_0,\iota_1}(z)\cdot e_{j_\ell}\Big] \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\Big(\bigwedge^{\rho}\mathbb{C}^m, \bigwedge^{\rho}\mathbb{C}^m\Big).$$

Le $\mathbb{C}$-fibré localement trivial associé à ce cocycle suivant la construction de la sous-section 2.1.2 est un fibré localement trivial de rang $\binom{m}{\rho}$ noté $\bigwedge^\rho E$ et appelé *puissance extérieure de E à l'ordre ρ*. Lorsque $\rho=m$, c'est un fibré de rang 1 appelé *fibré déterminant de E* et noté $\det E$.

4. *Dual d'un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang m.*

Soit $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang m et g^E un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ adapté à E et au recouvrement $(\widetilde{U}_\iota)_\iota$. On appelle *fibré dual* de E le $\mathbb{C}$-fibré de même rang m que E construit comme à la section 2.1.2 à partir du cocycle $(g^E)^*$ où

$$g^*_{\iota_0,\iota_1}\ :\ z \in \widetilde{U}_{\iota_0} \cap \widetilde{U}_{\iota_1} \longmapsto {}^t[g_{\iota_0,\iota_1}(z)]^{-1} \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C}).$$

5. *Fibré* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C},1}, E_{\mathbb{C},2})$.

Il existe un isomorphisme entre $\mathbb{C}^{m_2}\otimes(\mathbb{C}^{m_1})^*$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{m_1},\mathbb{C}^{m_2})$ car tout $\mathbb{C}$-homomorphisme de $\mathbb{C}^{m_1}$ dans $\mathbb{C}^{m_2}$ est représenté par sa matrice à m_1 colonnes et m_2 lignes dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{C}^{m_1}$ et $\mathbb{C}^{m_2}$ respectivement à la source et au but. Si E_1 et E_2 sont deux $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux de rangs respectifs m_1 et m_2, on note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1,E_2)$ le $\mathbb{C}$-fibré localement trivial $E_2\otimes_{\mathbb{C}} E_1^*$; c'est un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang $m_1\times m_2$.

Toutes les opérations ci-dessus peuvent être considérées entre fibrés holomorphes au-dessus d'une variété analytique complexe. Si E_1 et E_2 sont deux tels fibrés holomorphes, les cocycles associés le sont, ainsi que les cocycles permettant de construire $E_1 \oplus_{\mathbb{C}} E_2$, $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$, $\bigwedge^\rho E_1$, E_1^*, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_1, E_2)$. Tous les fibrés construits ainsi seront donc eux aussi holomorphes dès que E_1 et E_2 le sont.

2.1.4. L'opérateur $\bar\partial_E = D''_E$ sur un fibré holomorphe

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$ un fibré holomorphe de rang m au dessus de $\mathcal{X}$. Au voisinage de chaque point z de $\mathcal{X}$, on dispose d'un repère holomorphe $(e_1, ..., e_n)$. Si $s\ : U \subset \mathcal{X} \to E$ est une section C^∞ du fibré E au dessus d'un ouvert U, on peut exprimer s dans un voisinage U_z d'un point arbitraire de U dans un repère holomorphe local $(e_{z,1}, ..., e_{z,n})$ dans U_z par

$$s(z') = \sum_{j=1}^m s_{z,j}(z') \otimes e_{z,j}(z') \quad \forall\, z' \in U_z \cap U,$$

où les fonctions C^∞ coordonnées $s_{z,j}$, $j = 1, ..., m$, sont à valeurs complexes. On observe que, du fait que les $e_{z,j}$ soient holomorphes, on peut définir une $(0,1)$-forme C^∞ à valeurs dans E globalement dans U en posant, dans l'ouvert U_z :

$$\bar\partial s(z') := \sum_{j=1}^m \bar\partial s_{z,j}(z') \otimes e_{z,j}(z') \quad \forall\, z' \in U_z \cap U.$$

Le fait que les e_j soient holomorphes fait que le repère est traité comme le serait un repère constant par les opérateurs $\partial/\partial \bar z_j$, $j = 1, ..., n$, désignant les n coordonnées locales. Dès lors, la définition globale dans U de $\bar\partial s$ est licite. On peut tout aussi bien supposer que les s_j, $j = 1, ..., m$, sont des distributions ou même des courants. Il existe donc naturellement un opérateur $\bar\partial$ attaché simplement au fibré holomorphe $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{X}$. Ceci vaut aussi si s est une distribution à valeurs dans E, voir un courant à valeurs dans E (il s'agit donc ici de vecteurs de distributions ou de vecteurs de courants, tous du même bidegré).

On définit ainsi un opérateur $D''_E = \bar\partial_E$ associé au fibré holomorphe E et transformant les (p,q)-formes (ou les (p,q) courants par dualité avec $\mathcal{D}^{p,q}(U,E)$) en $(p, q+1)$ courants à valeurs dans E ; on note cet opérateur D''_E (ou parfois $\bar\partial_E$). Si E n'est plus holomorphe, tout cela s'écroule car il faut exploiter une *connexion* pour être à même de définir un opérateur $C^{p,q}(U,E) \to C^{p,q+1}(U,E)$ (du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des (p,q)-formes C^∞ dans $\mathcal{X}$ à valeurs dans E dans le $\mathbb{C}$-espace des $(p, q+1)$ formes C^∞ à valeurs dans E). Dès que E est un fibré holomorphe, pareil opérateur D''_E ne dépend que du fibré E (pas d'une métrique éventuelle dont E serait équipé comme fibré holomorphe au dessus de la variété analytique complexe $\mathbb{C}^n$). Le scindage entre les « vraies » coordonnées locales $z_1, ...z_n$ et leurs « fantômes » $\bar{\mathtt{z}}_1, ..., \bar{\mathtt{z}}_n$ est alors, ici encore, éloquent et fort utile.

2.2. Le fibré tangent et son scindage

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et z un point de $\mathcal{X}$.

On peut introduire l'*anneau local des germes en z des fonctions C^∞ au voisinage de z dans $\mathcal{X}$ et à valeurs dans* $\mathbb{C}$. On rappelle qu'un germe $\dot\varphi$ en z de fonction C^∞

au voisinage de z dans $\mathcal{X}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est la classe d'équivalence d'un couple (U, φ) (U voisinage ouvert de z dans $\mathcal{X}$ et $\varphi\ : U \to \mathbb{C}$ de classe C^∞) pour la relation

$$(U_1, \varphi_1) \sim (U_2, \varphi_2) \Longleftrightarrow U_1 \subset U_2 \text{ et } (\varphi_2)_{|U_1} = \varphi_1.$$

On note cet anneau $\mathcal{E}_{\mathcal{X},z}$. Ce n'est pas un anneau nœthérien (voir l'exercice 2.1) et de ce fait il ne saurait hériter des propriétés de finitude (il existe par exemple des idéaux de cet anneau qui ne sont pas de type fini) indispensables pour travailler dans le cadre de l'algèbre. C'est un anneau local, l'idéal maximal $\mathscr{M}_z$ étant engendré par les fonctions $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ figurant les coordonnées locales réelles centrées en z (c'est-à-dire s'annulant en z). Une $\mathbb{C}$-*dérivation* de cet anneau (qui est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) est une application $\mathbb{C}$-linéaire Φ de $\mathcal{E}_{\mathcal{X},z}$ se pliant à la *règle de Leibniz*, ce qui signifie :

$$\Phi(fg) = f(z)\,\Phi(g) + g(z)\,\Phi(f) \quad \forall\, f, g\ \mathcal{E}_{\mathcal{X},z}.$$

Le $\mathbb{C}$-espace des dérivation $T_z(\mathcal{X})$ est de dimension $2n$ et une base en est donnée par les $2n$ dérivations

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_z,\ \Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)_z, \quad j = 1, ..., n.$$

La base duale (base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $T_z(\mathcal{X})^*$) est notée $(d_z x_1, d_z y_1, ..., d_z x_n, d_z y_n)$ (on peut l'interpréter comme la liste des différentielles en z des applications coordonnées locales réelles $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$).

Au contraire de cet anneau local $\mathcal{E}_{\mathcal{X},z}$, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ des germes de fonctions holomorphes au voisinage de z dans $\mathcal{X}$ (même concept que précédemment mais avec cette fois des paires (U, f) où U est un voisinage de z dans U et f est holomorphe dans U, ce qui a un sens puisque $\mathcal{X}$ porte une structure de variété analytique complexe) est, lui, un anneau nœtherien [1] ; il est donc candidat naturellement à fournir un cadre pour l'algèbre. Le $\mathbb{C}$-espace des dérivations de cet anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ est un sous-espace vectoriel $T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})$ du $\mathbb{C}$-espace des dérivations de l'anneau $\mathcal{E}_{\mathcal{X},z}$: c'est le sous-espace de dimension n engendré par les dérivations, dites *holomorphes*, au point z :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)_z, \quad j = 1, ..., n.$$

Le $\mathbb{C}$-espace dual a pour base $(d_z x_1 + i d_z y_1, ..., d_z x_n + i d_z y_n)$. On constate que l'on a le scindage

$$T_z(\mathcal{X}) = T_z^{(1,0)}(\mathcal{X}) \oplus_{\mathbb{C}} \overline{T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})},$$

et l'on pose

$$T_z^{(0,1)}(\mathcal{X}) := \overline{T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}\,\Big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big)_z.$$

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $T_z(\mathcal{X})$ et $T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})$ s'incarnent aussi géométriquement, de manière cette fois ≪ visuelle ≫ et non plus ≪ fonctionnelle ≫. Il est important de disposer des deux points de vue.

Pour incarner $T_z(\mathcal{X})$, on introduit l'ensemble des chemins paramétrés

$$\gamma\ : t \in]-\epsilon, \epsilon[\longmapsto \gamma(t) \in \mathcal{X}$$

1. Tout idéal est de type fini, ou encore toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

de classe C^∞ tels que $\gamma(t) \in \mathcal{X}$ et que $\gamma(0) = z$, c'est-à-dire les courbes paramétrées (par un paramètre réel t) tracées sur $\mathcal{X}$ au voisinage de z et dont le support passe par z (dire que γ est C^∞ équivaut à dire que $\varphi_\alpha \circ \gamma$ l'est lorsque l'on compose avec la carte φ_α adaptée). On introduit ensuite le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension $2n$) des *classes de tangence des germes de ces courbes paramétrés au point* z ; une telle classe de tangence est matérialisée comme la classe de $d_0[\varphi_\alpha \circ \gamma](1) \in \mathbb{R}^n$: deux germes (I_1, γ_1) et (I_2, γ_2) sont identifiés pour cette équivalence si $d_0(\varphi_\alpha \circ \gamma_1) = d_0(\varphi_\alpha \circ \gamma_2)$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $T_z(\mathcal{X})$ s'incarne comme le complexifié de ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $4n$, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$.

On raisonne de même similaire pour incarner $T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})$, sauf que l'on introduit cette fois l'ensemble des « disques »[1]

$$\Gamma \; : w \in D(0, \epsilon) \to \mathcal{X} \qquad (\epsilon > 0)$$

holomorphes (ceci signifiant que $\varphi_\alpha \circ \Gamma$ est holomorphe dans $D(0,1)$ pour une carte φ_α adaptée) tels que $\Gamma(0) = z$. Le $\mathbb{C}$-espace $T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})$ s'incarne comme le $\mathbb{C}$-espace des classes de tangence $d_0(\varphi_\alpha \circ \Gamma)(1)$ des germes de disques Γ en z.

On peut équiper $T(\mathcal{X}) := \bigcup_{z\in\mathcal{X}} T_z(\mathcal{X})$ et $T^{(1,0)}(\mathcal{X}) := \bigcup_{z\in\mathcal{X}} T_z^{(1,0)}(\mathcal{X})$ respectivement d'une structure de $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang $2n$ et de fibré holomorphe localement trivial de rang n. Les morphismes de trivialisation s'expriment facilement :

— dans le premier cas, on se place au dessus d'un ouvert de carte U_α : si $z \in U_\alpha$ et que $\dot{\xi}$ est la classe de tangence d'un germe de courbe $\gamma \;\; :] - \epsilon, \epsilon[\to \mathcal{X}$ tel que $\gamma(0) = z$, on définit

$$\theta_{U_\alpha}(z, \xi) = \big(z, d_0[\varphi_\alpha \circ \gamma](1)\big) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^{2n} = U_\alpha \times \mathbb{C}^n \;;$$

— dans le second cas, on procède de même : si $z \in U_\alpha$ et que $\dot{\Xi}$ est la classe de tangence d'un germe de disque $\Gamma \;\; : D(0, \epsilon) \to \mathcal{X}$ tel que $\gamma(0) = z$, on définit encore

$$\theta_{U_\alpha}(z, \xi) = \big(z, \frac{d(\varphi_\alpha \circ \Gamma)}{dz}(0)\big) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^n.$$

On a le scindage de $\mathbb{C}$-fibrés localement triviaux :

$$T(\mathcal{X}) = T^{(1,0)}(\mathcal{X}) \oplus_{\mathbb{C}} T^{(0,1)}(\mathcal{X}).$$

Les sections de $T(\mathcal{X})$ dans un ouvert U s'expriment en coordonnées locales dans un voisinage U_z d'un point arbitraire $z \in U$ comme

$$\sum_{j=1}^n \xi_j(z) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \eta_j(z) \, \frac{\partial}{\partial y_j}$$

où $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ sont des coordonnées réelles locales dans U_z et les fonctions coordonnées

$$\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$$

sont des fonctions C^∞ dans U_z.

1. On appelle ainsi les « nappes » paramétrées holomorphiquement par un paramètre w complexe.

Les sections de $T^{(1,0)}(\mathcal{X})$ dans un ouvert U s'expriment en coordonnées locales dans un voisinage U_z d'un point arbitraire $z \in U$ comme

$$z' \mapsto \sum_{j=1}^{n} \tau_j(z') \frac{\partial}{\partial z_j}$$

où $z_j = x_j + iy_j$ sont des coordonnées complexes locales dans U_z et les fonctions coordonnées $\tau_1, ..., \tau_n$ sont des fonctions C^∞ dans U_z à valeurs complexes. Le fibré $T(\mathcal{X})$ est dit *fibré tangent* (complexe), le fibré holomorphe $T^{(1,0)}(\mathcal{X})$ est dit *fibré tangent holomorphe à* $\mathcal{X}$ tandis que son conjugué $T^{(0,1)}(\mathcal{X})$ est appelé *fibré tangent antiholomorphe* (c'est un fibré cette fois antiholomorphe).

Les sections dans un ouvert $U \subset \mathcal{X}$ du *fibré cotangent complexe* $[T(\mathcal{X})]^*$ sont dites 1-formes différentielles (C^∞) dans U ; on note ce $\mathbb{C}$-espace de sections $\Lambda^1(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$; une telle 1-forme différentielle s'exprime au voisinage d'un point arbitraire z de U sous la forme

$$z' \mapsto \sum_{j=1}^{n} \xi_j(z')\, dx_j + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(z') dy_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\xi}_j(z')\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\eta}_j(z') d\bar{z}_j$$

où $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ sont des coordonnées réelles locales au voisinage de z, où les $\xi_j, \eta_j, \tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j$ sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes au voisinage de z.

Si $E \to \mathcal{X}$ est un $\mathbb{C}$-fibré de rang m au dessus de $\mathcal{X}$, on introduit respectivement les fibrés

$$\Lambda^k(\mathcal{X}; E) := \Big(\bigwedge^k T^*(\mathcal{X}) \Big) \otimes_{\mathbb{C}} E, \quad k = 0, ..., 2n$$

et

$$\Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; E) := \Big(\bigwedge^p [T^{(1,0)}]^* \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q [T^{(0,1)}]^* \Big) \otimes_{\mathbb{C}} E, \quad 0 \le p, q \le n.$$

Les sections du fibré $\Lambda^k(\mathcal{X}, E)$ au dessus d'un ouvert U de $\mathcal{X}$ sont les *k-formes différentielles C^∞ dans U et à valeurs dans le fibré E*. Les sections du fibré $\Lambda^{p,q}(\mathcal{X}, E)$ sont dites *(p,q)-formes différentielles C^∞ dans U et à valeurs dans le fibré E*. On note les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels que constituent ces espaces de sections respectivement $\Lambda^k(\mathcal{X}; U, E)$ ou $\Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; U, E)$. Lorsque E est le fibré trivial $\mathcal{X} \times \mathbb{C}$ (ou ne figure pas, ce qui revient au même), on parle simplement de k-forme différentielle (à valeurs complexes) dans U ou de (p,q) forme différentielle (toujours à valeurs complexes) dans U ; les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels seront alors notés $\Lambda^k(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ et $\Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$. Une (p,q)-forme à valeurs dans E s'exprime au voisinage d'un point z dans lequel on dispose d'un repère $(e_1, ..., e_m)$ pour E (que l'on peut supposer holomorphe si E est holomorphe) et de coordonnées locales complexes $z_1, ..., z_n$, sous la forme

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n}} \omega^k_{I,J}(z')\, (dz_I \wedge d\bar{z}_J) \otimes e_k(z'),$$

où les fonctions coordonnées $\omega^k_{I,J}$ sont C^∞ et où l'on a noté en abrégé :

$$dz_I := \bigwedge_{\ell=1}^{p} dz_{i_\ell}, \quad d\bar{z}_J = \bigwedge_{\ell'=1}^{q} d\bar{z}_{j_{\ell'}}.$$

On observe que, pour $k = 0, ..., 2n$, on a le scindage en somme directe de fibrés

$$\Lambda^k(\mathcal{X}; E) = \bigoplus_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=k}} \Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; E) \quad (0 \le k \le 2n),$$

d'où l'on déduit, pour chaque ouvert U de $\mathcal{X}$, la décomposition des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de sections :

$$\Lambda^k(\mathcal{X}; U, E) = \bigoplus_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=k}} \Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; U, E) \quad (0 \le k \le 2n).$$

2.3. Les courants dans un ouvert U de $\mathcal{X}$

La dualité fonctions-tests/distributions se révèlera pour nous un formidable outil (ne serait ce que par ce que nous avons seulement envisagé les formes différentielles comme étant C^∞, alors qu'elles ne pourraient fort bien n'être que continues).

Si E est un fibré complexe sur $\mathcal{X}$, U un ouvert de $\mathcal{X}$ et $0 \le k \le 2n$, on note $\mathcal{D}^{2n-k}(\mathcal{X}; U, E^*)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des $(2n-k)$-formes différentielles dans U, à valeurs dans E^* et à support compact $K \subset\subset U$. On introduit de même les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{D}^{n-p,n-q}(\mathcal{X}; U, E^*)$ pour $0 \le p, q \le n$ des $(n-p, n-q)$-formes différentielles dans U, à valeurs dans E^* et à support compact $K \subset\subset U$.

Définition 2.3 (courants de degré k ou de bidegré (p,q)). Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n, $E \to \mathcal{X}$ un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial de rang m et U un ouvert de $\mathcal{X}$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $'\mathcal{D}^k(\mathcal{X}; U, E)$ $(0 \le k \le 2n)$ des *courants de degré k (ou de dimension $2n-k$), dans U et à valeurs dans E* est le dual du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^{2n-k}(\mathcal{X}; U, E^*)$. De même le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $'\mathcal{D}^{p,q}(\mathcal{X}; U, E)$ $(0 \le p, q \le n)$ des *courants de bidegré (p,q) (ou de bidimension $(n-p, n-q)$) dans U, à valeurs dans E*, est le dual du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}^{n-p,n-q}(\mathcal{X}; U, E^*)$.

Pour matérialiser la dualité, on peut ne traiter que le cas (p,q). On peut exprimer un (p,q)-courant T (dans U et à valeurs dans E) au voisinage d'un point z de U dans lequel on dispose d'un repère $(e_1, ..., e_n)$ pour E et de coordonnées complexes locales $z_1, ..., z_n$ sous la forme

$$T = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n}} T^k_{I,J}\,(dz_I \wedge d\bar{z}_J) \otimes e_k$$

où les $T^k_{I,J}$ sont des distributions dans ce voisinage U_z de z. Une forme test appartenant à $\mathcal{D}^{n-p,n-q}(\mathcal{X}; U_z, E^*)$, à support compact dans U_z (par partition de l'unité, on peut toujours se ramener à ne traiter que ce cas) s'exprime dans U_z sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{1 \le i'_1 < \cdots < i'_{n-p} \le n \\ 1 \le j'_1 < \cdots < j'_{n-q} \le n}} \varphi^k_{I',J'}\,(dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}) \otimes e^*_k,$$

où les $\varphi^k_{I',J'}$ sont dans $\mathcal{D}(\mathcal{X}; U_z, \mathbb{C})$, espace des fonctions-test C^∞ et à support compact dans U_z. Le crochet de dualité se lit dans U_z comme

$$\langle T, \varphi \rangle = (-2i)^n \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I,J \\ \#I=p, \#J=q}} \epsilon(I,J) \, \langle T^k_{I,J}, \varphi^k_{I^c,J^c} \rangle \,,$$

où $I^c = \{1, ..., n\} \setminus I$, $J^c = \{1, ..., n\} \setminus J$ et

$$dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge dz_{I^c} \wedge d\bar{z}_{J^c} = (-2i)^n \epsilon(I,J) \bigwedge_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j \quad (\epsilon(I,J) = \pm 1).$$

2.4. Les complexes de de Rham et de Dolbeault

Étant donné une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n et un ouvert U de $\mathcal{X}$, on dispose des complexes de de Rham (tant au niveau des formes différentielles que des courants).

Dans le contexte des formes différentielles, ce complexe est le suivant :

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \Lambda^0(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) := C^\infty(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \dots \\ &\dots \xrightarrow{d} \Lambda^{2n-1}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \Lambda^{2n}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où l'image d'une application est chaque fois incluse dans le noyau de la suivante puisque l'on a à tous les crans $d \circ d = 0$. Les groupes abéliens

$$H^{k,\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) := \frac{\{\omega \in \Lambda^k(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \,;\, d\omega = 0\}}{d\big(\Lambda^{k-1}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})\big)} = \frac{\mathscr{Z}^{k,+\infty}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})}{\mathscr{B}^{k,+\infty}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})}, \quad k = 0, ..., 2n$$

(on oublie ici la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour ne retenir que la structure de groupe abélien et on utilise la lettre calligraphique $\mathscr{Z}$ pour « cycle » ou *forme fermée*, la lettre calligraphique $\mathscr{B}$ pour « bord » ou *forme exacte*) sont les *groupes de cohomologie* de l'ouvert U (ici à valeurs dans $\mathbb{C}$) ; ils « quantifient » le défaut d'exactitude du complexe de de Rham (2.2). On a toujours $H^{0,+\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n_U}$, où n_U est le nombre de composantes connexes de l'ouvert U.

La liste des groupes de cohomologie $H^{k,+\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ ($k = 0, ..., 2n$, U ouvert de $\mathcal{X}$) est un attribut de la variété différentielle réelle sous-jacente de dimension $2n$ (orientable) $\mathcal{X}^{\text{sous}-\text{jacente}}$. L'orientabilité de cette variété analytique sous-jacente impose d'ailleurs $H^{2n,+\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Dans le contexte des courants, le complexe est analogue :

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}^0(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) := \mathcal{D}'(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} {}'\mathcal{D}^1(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \dots \\ &\dots \xrightarrow{d} {}'\mathcal{D}^{2n-1}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} {}'\mathcal{D}^{2n}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

et les groupes de cohomologie correspondants $H^{k,-\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ sont isomorphes aux précédents. Les groupes de cohomologie $H^{k,\pm\infty}_{\mathrm{DR}}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ sont aussi les groupes de cohomologie de Čech $\check{H}^k(U, \mathbb{C})$ du faisceau (dans U) de groupes $\mathbb{C}$ (il s'agit ici d'un faisceau dit « constant », voir la section 3.2 ci-dessous pour la notion de faisceau) : c'est le théorème de de Rham, assurant les égalités

$$H_{\mathrm{DR}}^{k,\pm\infty}(\mathcal{X};U,\mathbb{C}) = \check{H}(U,\mathbb{C}) \quad \forall U \text{ ouvert de } \mathcal{X},\ \forall k=0,...,2n.$$

Lorsque $\mathcal{X}$ est compacte, les groupes de cohomologie de de Rham $H_{\mathrm{DR}}^{k,\pm\infty}(\mathcal{X};\mathcal{X},\mathbb{C})$ sont les groupes additifs sous-jacents à des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. La suite des dimensions $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}} H_{\mathrm{DR}}^{k,\pm\infty}(\mathcal{X};\mathcal{X},\mathbb{C})$, $k=0,...,n$, est alors la suite des *nombres de Betti* de la varété différentielle compacte $\mathcal{X}$.

Ces complexes de de Rham sont toujours localement exacts d'après le lemme de Poincaré assurant qu'ils le sont pour un ouvert étoilé de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Si $E \to \mathcal{X}$ est un fibré holomorphe, on peut lui attacher (on l'a vu à la section 2.1.4) un opérateur $\bar\partial_E = D''_E$ et par conséquent introduire de manière analogue, pour tout $p=0,...,n$, les deux *complexes de Dolbeault* :

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \Lambda^{p,0}(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \Lambda^{p,1}(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\bar\partial_E} \Lambda^{p,n-1}(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \Lambda^{n,n}(\mathcal{X};U,E) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow {}'\mathcal{D}^{p,0}(\mathcal{X};U,E) := \mathcal{D}'(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} {}'\mathcal{D}^{p,1}(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} \dots \\ &\dots \xrightarrow{\bar\partial_E} {}'\mathcal{D}^{p,n-1}(\mathcal{X};U,E) \xrightarrow{\bar\partial_E} {}'\mathcal{D}^{p,n}(\mathcal{X};U,E) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

On introduit comme précédemment les *groupes de cohomologie de Dolbeault*

$$H^{p,q,\pm\infty}(\mathcal{X};U,E), \quad 0 \le p,q \le n,$$

et l'on a encore

$$H^{p,q,+\infty}(\mathcal{X};U,E) = H^{p,q,-\infty}(\mathcal{X};U,E) \quad \forall\, 0 \le p,q \le n.$$

Le *théorème d'isomorphisme de Dolbeault* stipule de plus que ces deux groupes de cohomologie sont tels que

$$H^{p,q,+\infty}(\mathcal{X};U,E) = H^{p,q,-\infty}(\mathcal{X};U,E) = \check{H}^q(U,\Omega^p \otimes E) \quad \forall\, 0 \le p,q \le n, \tag{2.6}$$

où Ω^p désigne la restriction à U du faisceau des $(p,0)$-formes différentielles à coefficients holomorphes (on dit aussi le *faisceau des* $(p,0)$*-formes abéliennes*).

Si $E = \mathcal{X} \times \mathbb{C}$, les complexes de Dolbeault sont aussi localement exacts. En effet, lorsque $\mathcal{X}$ est une variété de Stein (voir la définition un peu plus loin dans la section 3.2, disons juste pour l'instant qu'il s'agit d'une variété analytique complexe sur laquelle on puisse disposer d'un vivier « suffisamment riche » de fonctions holomorphes [1]), les groupes de cohomologie de Čech $\check{H}^q(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ du faisceau structurant $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ (même en fait de tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules, pourvu qu'il soit *cohérent*) sont nuls dès que $q \ge 1$ (c'est le théorème B d'Henri Cartan).

1. C'est le cas de $\mathbb{C}^n$, d'un ouvert pseudo-convexe tel un polydisque de $\mathbb{C}^n$, mais par exemple pas d'une variété analytique complexe compacte comme $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

2.5. La notion de connexion ; connexion, forme et classe de Chern

Si $E \to \mathcal{X}$ est un $\mathbb{C}$-fibré localement trivial et de rang m, il faut s'octroyer une possibilité de ≪ différentier ≫ les sections de E pour pouvoir réaliser les complexes de de Rham ou de Dolbeault $\Lambda^\bullet(\mathcal{X};U,E)$ ou $\mathcal{D}^\bullet(\mathcal{X};U,E)$ $\Lambda^{\bullet,\bullet}(\mathcal{X};U,E)$ ou $'\mathcal{D}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{X};U,E)$ (U ouvert de $\mathcal{X}$). Conformément à la règle de Leibniz, nous introduirons pour cela une application $\mathbb{C}$-linéaire D

$$D\ : \Lambda^0(\mathcal{X};\mathcal{X},E) \to \Lambda^1(\mathcal{X};\mathcal{X},E).$$

Cette règle conditionnera ensuite une ≪ promenade ≫ dans la gamme des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\Lambda^k(\mathcal{X};U,E)$ ou $'\mathcal{D}^k(\mathcal{X};U,E)$ (U étant un ouvert de $\mathcal{X}$, k variant de 0 à $2n$) suivant les règles suivantes (en cascade).

— Tout d'abord, si f est une fonction C^∞ de U dans $\mathbb{C}$ ou T une distribution sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$ (cette fonction ou cette distribution peuvent être localisées par partition de l'unité dans un ouvert u au dessus duquel existe un repère pour E et dans lequel on dispose de coordonnées locales réelles $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$), il convient, si l'on souhaite respecter la règle de Leibniz, de définir l'action de $D = D_0$ au cran 0 en respectant la règle

$$D[f\otimes e] = df\otimes e + f\,D[e], \qquad D[T\otimes e] = dT\otimes e + T\,D[e]$$

pour toute section e de E au dessus de l'ouvert U.

— Si l'action de

$$D = D_{k-1}\ : \Lambda^{k-1}(\mathcal{X};U,E) \text{ ou } {'\mathcal{D}^{k-1}}(\mathcal{X};U,E) \longrightarrow \Lambda^k(\mathcal{X};U,E) \text{ ou } {'\mathcal{D}^k}(\mathcal{X};U,E)$$

(pour $k \in \mathbb{N}^*$) a été définie, on définit l'action de

$$D = D_k\ : \Lambda^k(\mathcal{X};U,E) \text{ ou } {'\mathcal{D}^k}(\mathcal{X};U,E) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(\mathcal{X};U,E) \text{ ou } {'\mathcal{D}^{k+1}}(\mathcal{X};U,E)$$

en posant :

$$D_k[\omega\wedge\omega_{k-1}] = d\omega\wedge\omega_{k-1} - \omega\wedge D_{k-1}[\omega_{k-1}]$$

pour tout élément ω_{k-1} de $\Lambda^{k-1}(\mathcal{X};U,E)$ (respectivement de $'\mathcal{D}^{k-1}(\mathcal{X};U,E)$, pour tout élément ω de $\Lambda^1(\mathcal{X};U,\mathbb{C})$ (respectivement de $'\mathcal{D}^1(\mathcal{X};U,\mathbb{C})$).

On a donc au final les règles calculatoires suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall\,\omega\in\Lambda^\ell(\mathcal{X}\ ;U,\mathbb{C}),\quad \forall\,s\in\Lambda^k(\mathcal{X}\ ;U,E)\\ &D[\omega\wedge s] = D_{\ell+k}[\omega\wedge s] = d\omega\wedge s + (-1)^\ell\,\omega\wedge D_k[s] = d\omega\wedge s + (-1)^\ell\,\omega\wedge D[s]\end{aligned} \tag{2.7}$$

et

(2.8)
$$\begin{aligned} &\forall\,T\in{'\mathcal{D}^\ell}(\mathcal{X}\ ;U,\mathbb{C}),\quad \forall\,s\in{'\mathcal{D}^k}(\mathcal{X}\ ;U,E)\\ &D[T\wedge s] = D_{\ell+k}[T\wedge s] = dT\wedge s + (-1)^\ell\,T\wedge D_k[s] = dT\wedge s + (-1)^\ell\,T\wedge D[s].\end{aligned}$$

pour tout choix des entiers k, ℓ tels que $k+\ell \le n$.

Si l'on se fixe un repère $(e_1, ..., e_m)$ au dessus d'un ouvert u et que l'on introduit la matrice A de la connexion dans ce repère, soit la matrice de 1-formes $a_{j,k}$ dans u

telles que

$$D[e_k] = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} \otimes e_j, \quad k = 1, ..., m, \tag{2.9}$$

on note donc que, toujours dans u :

$$D\Big[\sum_{k=1}^{m} \omega_k \otimes e_k\Big] = \sum_{k=1}^{m} \Big(d\omega_k + \sum_{j=1}^{m} a_{k,j} \wedge \omega_j\Big) \otimes e_k$$

si $\omega_1, ..., \omega_m$ sont des formes différentielles ou des courants dans u, à valeurs complexes, tous de même degré.

Du fait que $d \circ d = 0$, on observe que l'action de D^2 sur une k-forme différentielle ω ou un courant T de degré k (dans un ouvert U), tous deux à valeurs dans E s'exprime sous la forme

$$D^2[\omega] = \Theta \wedge \omega, \qquad D^2[T] = \Theta \wedge T$$

où Θ est une section globale (dans $\mathcal{X}$) du fibré $\big(\bigwedge^2 T^*(\mathcal{X})\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$. Cette matrice Θ s'exprime dans un repère $(e_1, ..., e_n)$ au dessus de l'ouvert u comme la matrice

$$\Theta = dA + A \wedge A \tag{2.10}$$

où la matrice $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j,k \leq m}$ est définie par (2.9). On appelle

$$\Theta \in \big(\bigwedge^2 T^*(\mathcal{X})\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$$

le *tenseur de courbure* de la connexion D ; l'expression matricielle (2.10) du tenseur de courbure au dessus d'un repère donné est dite *matrice de courbure* de la connexion D lorsque le fibré est rapporté à ce repère.

Toute connexion D se scinde sous la forme de la somme de deux connexions $D^{(1,0)}$ et $D^{0,1}$, où, pour tout couple (p, q) d'entiers entre 0 et n,

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} &: \Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; U, E) \to \Lambda^{p+1,q}(\mathcal{X}; U, E) \\ D^{(0,1)} &: \Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; U, E) \to \Lambda^{p,q+1}(\mathcal{X}; U, E) \end{aligned}$$

Lorsque E est un fibré hermitien, on dit que D *est compatible avec la structure complexe* si et seulement si $D^{(0,1)} = \overline{\partial}_E$.

On se donne maintenant une métrique hermitienne $|\ |$ sur un fibré complexe (localement trivial) de rang m au dessus de $\mathcal{X}$. Le produit scalaire

$$z \in \mathcal{X} \longmapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_z$$

induit, pour chaque k, ℓ entre 0 et $2n$ tels que $k + \ell \leq 2n$, pour chaque ouvert U de $\mathcal{X}$, une application sesquilinéaire :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ : \Lambda^k(\mathcal{X}; U, E) \times \Lambda^\ell(\mathcal{X}; U, E) \longmapsto \Lambda^{k+\ell}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C}).$$

On pose pour cela, dans un ouvert u au dessus duquel on dispose d'un repère pour E et dans lequel vivent aussi des coordonnées réelles $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$:

$$\Big\langle \sum_{1}^{m} \omega_j \otimes e_j, \sum_{k=1}^{m} \tilde{\omega}_k \otimes e_k \Big\rangle := \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \langle e_j, e_k \rangle\, \omega_j \wedge \overline{\tilde{\omega}_k}. \tag{2.11}$$

DÉFINITION 2.4 (compatibilité d'une connexion sur un $\mathbb{C}$-fibré avec le choix d'une métrique). Une connexion D sur un $\mathbb{C}$-fibré hermitien $E \to \mathcal{X}$ (le produit scalaire associé à la métrique sur la fibre E_z étant noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$) est dite *compatible avec la métrique hilbertienne* $|\ |$ si et seulement si la connexion préserve le produit scalaire, c'est-à-dire

$$d[\langle \omega_1, \omega_2 \rangle] = \langle D[\omega_1], \omega_2 \rangle + (-1)^{\deg \omega_1} \langle \omega_1, D[\omega_2] \rangle. \tag{2.12}$$

Ceci signifie que la matrice A de l'action de la connexion sur un repère orthonormé arbitraire (pour la métrique en jeu) au dessus d'un ouvert u, telle qu'elle est définie dans (2.9) vérifie $A^* = -A$ (A^* désignant la transconjuguée de A).

En décomposant les entrées de la matrice A de la connexion en $(1,0)$ et $(0,1)$-formes, on réalise la décomposition $D = D^{(1,0)} + D^{(0,1)}$. Si $D^{(1,0)}$ est imposée (ce qui est le cas lorsque le fibré E est holomorphe et que $D^{(0,1)}$ est « figée » comme la connexion $\bar{\partial} E$, imposer de plus la compatibilité de la connexion avec une métrique hermitienne fixée *a priori* sur le fibré achève de fixer complètement la connection $D^{(1,0)}$ du fait des relations $A^* = -A$ pour la matrice de connexion dans les repères orthonormé. Cela nous conduit à la définition majeure suivante :

DÉFINITION 2.5 (connexion de Chern). Soit E un fibré holomorphe localement trivial et de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$; si le fibré est équipé d'une métrique hermitienne [1], il existe une unique connexion sur E qui soit à la fois compatible avec la structure de fibré holomorphe ($D^{(0,1)} = \bar{\partial}_E$) et avec la métrique (conditions (2.12)). Cette connexion est dite *connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien* $(E, |\ |)$. Le tenseur de courbure de la connexion de Chern de $(E, |\ |)$ est dans ce cas particulier une section globale du fibré

$$\big([T^{(1,0)}]^* \wedge [T^{(0,1)}]^*\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)$$

c'est-à-dire un élément

$$\Theta \in \Lambda^{1,1}\big(\mathcal{X}; \mathcal{X}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)\big)$$

lorsque la métrique est lisse ou bien un élément

$$\Theta \in {}'\mathcal{D}^{1,1}\big(\mathcal{X}; \mathcal{X}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E, E)\big)$$

lorsque la métrique est éventuellement singulière.

On sait en algèbre linéaire que le polynôme caractéristique d'une matrice carrée à entrées dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ encode l'application linéaire que cette matrice représente lorsque le $\mathbb{K}$-espace vectoriel dans lequel on travaille est rapporté à sa base canonique. Il est donc naturel de former ($m = \mathrm{rang}(E)$) lorsque la métrique $|\ |$ est C^∞ :

$$\det\Big(\frac{i}{2\pi}\Theta + X\,\mathrm{Id}_E\Big) = X^m + \sum_{k=1}^{m} c_k(E, |\ |)\, X^{m-k}.$$

Pour chaque $k = 1, ..., m$, la forme $c_k(E, |\ |)$ est une (k,k)-forme différentielle dans $\mathcal{X}$. On a $c_k(E, |\ |) = 0$ dès que $k > n$.

1. En principe C^∞, mais on peut la supposer seulement continue, voire singulière, en considérant l'action de l'opérateur de de Rham au membre de gauche de (2.12) au sens des courants.

Définition 2.6 (formes de Chern d'un fibré holomorphe hermitien avec métrique lisse). Soit $E \to \mathcal{X}$ un fibré holomorphe de rang m au dessus d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n. Si le fibré E est équipé d'une métrique lisse, la liste des formes $c_k(E, |\ |)$, $k = 1, ..., \min(m, n)$ (c_k étant une forme de bidegré (k, k)) est la liste des *formes de Chern*[1] du fibré hermitien $(E, |\ |)$. Dans le cas où $m = 1$ et où la métrique est éventuellement singulière, le $(1, 1)$ courant

$$c_1(L, |\ |) = -dd^c \log |e|^2 \tag{2.13}$$

(où e désigne un repère holomorphe arbitraire, la définition étant indépendante du repère) est le courant de Chern $c_1(L, |\ |)$ du fibré en droite équipé de cette métrique ; ce courant est appelé forme de Chern $c_1(L, |\ |)$ lorsque la métrique est C^∞.

En fait, la forme de Chern $C(E, |\ |)$ est d-fermée, donc ∂ et $\bar\partial$ fermée. La classe de cohomologie de de Rham de la forme de Chern $C(E, |\ |)$ (dans le cas où la métrique est lisse) ne dépend pas de la métrique. On admettra ici ces résultats (voir la proposition 1.3 de [**YNiam**]). La classe de cohomologie $C(E)$ ainsi définie ne dépend donc que du fibré holomorphe et non de la métrique dont on l'équipe. On l'appelle *classe de Chern du fibré holomorphe E*.

2.6. Exercices

Exercice 2.1 (l'anneau des germes de fonctions C^∞ n'est pas nœthérien)**.** On considère à l'origine de $\mathbb{C}^n_{x+iy}$ l'anneau $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n_{x,y},0}$ des germes de fonctions C^∞ à valeurs complexes en les $2n$ variables $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$.

(1) Quel est l'unique idéal maximal $\mathfrak{M}$ de I ?

(2) En supposant que l'idéal $I = \bigcap_{k\geq 1} \mathfrak{M}^k$ soit engendré par un nombre fini d'éléments $f_1, ..., f_M$ et en exprimant f_1 grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, montrez que f_1 s'exprime sous la forme

$$f_1 = u_1 f_1 + \sum_{j=2}^{M} u_j f_j \quad \text{avec } u_j \in I \quad \forall j = 1, ..., n.$$

(3) Déduisez-en que l'hypothèse faite à la deuxième question est absurde et que, par conséquent, l'anneau $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n_{x,y},0}$ n'est pas un anneau nœthérien (c'est-à-dire un anneau dans lequel tout idéal est de type fini).

Exercice 2.2 (fibrés et cocycles)**.** Explicitez un cocycle $(U_\iota, (g_{\iota_0,\iota_1})_{\iota_0,\iota_1})$ correspondant au fibré tautologique sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire le fibré complexe de rang 1 dont la fibre E_z au point $[z_0 : \ldots : z_n]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1

$$E_z = \mathbb{C} \cdot (z_0, ..., z_n) \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

1. La forme différentielle $1 + \sum_{k=1}^{\min(m,n)} c_k(E, |\ |)$ (somme de formes différentielles de divers bi-degrés) est appelée *forme de Chern* $C(E, |\ |)$ du fibré holomorphe hermitien $(E, |\ |)$.

COURS 3

Formule de Lelong-Poincaré, faisceaux et courants positifs

3.1. Une formule ≪ décortiquée ≫ : la formule de Lelong-Poincaré

3.1.1. L'énoncé de la formule ; une première lecture

Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n et $L \to \mathcal{X}$ un fibré holomorphe de rang 1 (localement trivial [1]) au dessus de $\mathcal{X}$. On équipe ce fibré d'une métrique hermitienne $|\ |_z$ (éventuellement singulière) et on note $c_1(L, |\ |)$ la première forme de Chern du fibré en droites hermitien $(L, |\ |)$ ainsi réalisé (telle qu'elle a été introduite à la section 2.5 par (2.13)).

Soit s une section méromorphe du fibré L dans un ouvert U de $\mathcal{X}$, ce qui signifie, dans un voisinage u_z d'un point de U au dessus duquel on dispose d'un repère holomorphe $z' \mapsto e(z')$, que l'on peut exprimer

$$s(z') = f_z(z') \otimes e(z')$$

où f_z est une fonction méromorphe dans u_z. On reviendra en détails sur cette notion de méromorphie dans la sous-section 3.1.2. On montrera aussi à la section 3.2 (exemple 3.1, voir aussi l'exercice 3.2) que la fonction

$$z \mapsto -\log |s(z)|_z^2$$

est alors une fonction localement intégrable dans U car $-\log |f|^2$ est une fonction localement intégrable dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ dès que f est méromorphe dans cet ouvert Ω ; les singularités de telles fonctions $z \mapsto -\log |f(z)|^2$ ne sont en effet pas des singularités ≪ méchantes ≫ ; ce sont des singularités intégrables (penser par exemple à $-\log |z|^2$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$). On peut donc calculer au sens des courants $dd^c(-\log |s(z)|_z^2)$ dans U, ce qui nous donne un $(1,1)$ courant dans U, à valeurs complexes.

On explicitera plus loin (exemple 3.1) ce que l'on entendra par *courant d'intégration prenant en compte les ≪ multiplicités ≫ des zéros et les ≪ ordres ≫ des pôles de s*, à savoir le courant noté pour des raisons de géométrie algébrique que l'on expliquera $[\mathrm{div}(s)]$.

On peut alors énoncer la formule de Lelong-Poincaré.

Theorème 3.1 (formule de Lelong-Poincaré). *Soit s une section du fibré holomorphe hermitien de rang un $(L, |\ |)$ au dessus d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ (la métrique*

1. On dit aussi un *fibré en droites*.

pouvant être éventuellement singulière) ; on a, au sens des courants dans U, la formule

$$dd^c\big[-\log|s(z)|_z^2\big] + [\mathrm{div}(s)] = c_1(L, |\ |). \tag{3.1}$$

Cette formule relie trois objets relevant de trois champs *a priori* éloignés entre eux des mathématiques (même quatre en fait, avec, on le verra, l'*arithmétique*) :

— la fonction localement intégrable

$$z \in U \longmapsto -\log|s(z)|_z^2$$

relève de l'*analyse* ; il s'agit, on le verra, d'une *fonction de Green* en relation de fait avec la théorie du potentiel pluri-complexe ;

— le $(1,1)$- courant

$$[\mathrm{div}(s)] \in {}'\mathcal{D}^{1,1}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$$

relève, lui, de la *géométrie algébrique* ; on pourra d'ailleurs l'identifier à un *diviseur de Weil* (ou encore *cycle* de dimension $n-1$)

$$\sum_\alpha \mu_\alpha \mathscr{Z}_\alpha, \quad \big(\mu_\alpha \in \mathbb{Z}, \quad \mathscr{Z}_\alpha \text{ hypersurface algébrique irréductible de } U\big)$$

(la somme étant localement finie) vu sous l'angle de la géométrie algébrique ;

— la $(1,1)$-forme (ou le $(1,1)$-courant lorsque la métrique est éventuellement singulière) $c_1(L, |\ |)$ relève enfin de la *géométrie hermitienne*.

Cette formule rejaillit aussi dans un contexte arithmétique, ce que nous expliquons ici brièvement et qui fonde la *géométrie d'Arakelov* (voir pour une introduction en dimension $n = 1$ la présentation de S. Lang dans [**Lang**]). Il résulte en effet du théorème fondamental de l'arithmétique [1] que, si $\alpha/\beta \in \mathbb{Q}^{+*}$, on a

$$\Big(\prod_{p \text{ premier}} |\alpha/\beta|_p\Big) \times |\alpha/\beta|_\infty = 1 \tag{3.2}$$

(≪ *formule du produit* [2] ≫) où $|\ |_\infty := |\ |$ désigne la valeur absolue usuelle (archimédienne) sur $\mathbb{Q}$ et $|\ |_p$ la valeur absolue (ultramétrique cette fois) p-adique : on cherche l'exposant $\nu_\alpha(p)$ du nombre premier p dans la factorisation de α, puis l'exposant $\nu_\beta(p)$ de ce même nombre premier p dans la factorisation de β et l'on définit

$$|\alpha/\beta|_p := p^{-\nu_\alpha(p)}/p^{-\nu_\beta(p)}.$$

La formule (3.2) est alors immédiate.

Une autre formule majeure de l'analyse complexe en une variable, la *formule de Jensen* (voir le chapitre 4 de [**YanC**]), jette un pont entre l'arithmétique et la formule de Lelong-Poincaré (3.1). On rappelle cette formule ici : si

$$P(X) = a_0 X^d + \sum_{k=1}^d a_k X^{d-k} = a_0 \prod_{j=1}^d (X - \xi_j) \in \mathbb{C}[X], \quad (d \in \mathbb{N}^*,\ a_0 \in \mathbb{C}^*),$$

---

1. Tout nombre entier naturel s'exprime de manière unique comme un produit de puissances de nombres premiers.

2. On dispose de formules similaires si α et β sont deux éléments de l'anneau $\mathbb{O}_\mathbb{K}$ des entiers d'un corps de nombres $\mathbb{K}$.

on a

$$\exp\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|\,d\theta\Big) = |a_0|\prod_{j=1}^{d}\max(1,|\xi_j|). \tag{3.3}$$

Lorsqu'en particulier $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a $|a_0| \geq 1$ et par conséquent

$$h(P) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{i\theta})|\,d\theta \geq 0\ ;$$

ce nombre $h(P)$ positif dans ce cas s'appelle la *mesure de Mahler* du polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$; de par la formule de Jensen, cette mesure de Mahler $h(P)$ donne une borne supérieure pour les modules des racines complexes ξ_j du polynôme P, qui sont dans ce cas des nombres algébriques ; on contrôle ainsi avec la mesure de Mahler $h(P)$ la complexité arithmétique de l'hypersurface $\{P = 0\}$ (définie sur $\mathbb{Q}$, corps des coefficients du polynôme), tout au moins en termes de valeur absolue archimédienne $|\ |_\infty = |\ |$.

De plus, cette mesure de Mahler $P \mapsto h(P)$ est un bon outil pour encoder la contribution de cette valeur absolue archimédienne [1] à la *hauteur* logarithmique de l'hypersurface $\{P = 0\}$, c'est-à-dire une mesure logarithmique de la complexité arithmétique de cette hypersurface : on observe en effet, du fait que $h(P) \geq 0$ pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, que $h(P_1) \leq h(P_2)$ dès que P_1 divise P_2 (il est naturel alors de penser que la complexité artithmétique de P_1 soit plus petite que celle de P_2).

Comme de plus, on souhaite que la $\tilde{h}(\alpha P) = \tilde{h}(P)$ pour une notion $\tilde{h}$ de mesure de hauteur qui correspondrait à un mesure de complexité arithmétique et que l'on souhaite naturellement que $\tilde{h}(\alpha P) = \tilde{h}(P)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, la seule manière de réaliser les objectifs est vraiment de combiner la mesure de Mahler (encodant la complexité aux places archmédiennes) avec une contribution encodant la complexité cette fois aux places ultramétriques. En prenant les logarithmes dans la formule (3.2), on voit que l'on réalisera bien alors l'objectif $\tilde{h}(P) = \tilde{h}(\alpha P)$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. On ne saurait donc éviter d'introduire à la mesure de hauteur une contribution *analytique* telle la mesure de Mahler $h(P)$. On retrouve bien sûr dans l'expression de cette mesure de Mahler la fonction $-\log|P|^2$ présente comme contribution analytique au membre de gauche de la formule de Lelong-Poincaré (3.1). C'est ainsi que cette formule (3.1) s'avère aussi importante dans le cadre cette fois de l'*arithmétique*.

3.1.2. Le concept de ≪ méromorphie ≫ revisité

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ ou un ouvert d'une surface de Riemann $\mathcal{X}$ (c'est-à-dire une variété analytique complexe de dimension $n = 1$), on appelle *fonction méromorphe dans* U toute fonction continue $f\ : U \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ telle que la restriction de f à l'ouvert

$$\{z \in U\ ;\ f(z) = [0:1] = \infty\}$$

soit une fonction holomorphe. Le point ici est que les fonctions méromorphes dans l'ouvert sont dès le départ définies comme des fonctions partout dans U (ce sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$).

1. Dans le cas plus général des corps de nombres, on parle des *places archimédiennes*.

Un théorème difficile du à Weierstraß (voir par exemple [**YanC**], chapitre 3) assure que si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, toute fonction méromorphe dans U s'exprime comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans U, autrement dit l'espace $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes dans U est exactement le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathscr{H}(U)$ des fonctions holomorphes dans U. Ceci n'est plus vrai (en général) en dimension $n > 1$ pour un ouvert U quelconque [1]. Du point de vue algébrique, le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathscr{H}(U)$ (lorsque U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$) est certes l'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions s'exprimant au voisinage de tout point z de U comme le quotient de deux fonctions holomorphes ; mais cette définition pose quelques problèmes du point de vue de l'analyse car les fonctions méromorphes ne sont pas définies partout. On préfère lui substituer la définition suivante :

Définition 3.1 (fonction méromorphe dans un ouvert U d'une variété analytique complexe de dimension $n > 1$, un point de vue « courantiel »). Soit U un ouvert d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension $n > 1$. Une fonction méromorphe dans U est par définition une distribution $T \in {}'\mathcal{D}^0(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ (ou ${}'\mathcal{D}^0(\mathcal{X}; U, E)$ si on souhaite la fonction méromorphe à valeurs dans un $\mathbb{C}$-fibré $E \to \mathcal{X}$) telle qu'il existe un sous-ensemble analytique fermé A de U avec :

— la restriction $T_{|U\setminus A}$ est une distribution-fonction holomorphe dans l'ouvert $U \setminus A$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans E si l'on souhaite que la fonction méromorphe soit à valeurs dans un $\mathbb{C}$-fibré E) ;

— la distribution T est *extension standard depuis l'ouvert* $U \setminus A$, autrement dit, si $A = \{h_1 = \cdots = h_{M_z} = 0\} = \{h_z = 0\}$ au voisinage u_z d'un point z de U, on a, au sens des distributions dans u_z

$$T_{|u_z} = \lim_{\epsilon \to 0_+} \Big[\chi\Big(\frac{|h_z|^2}{\epsilon}\Big) \cdot T_{|u_z} \Big]$$

lorsque $\chi\ : \mathbb{R} \to [0,1]$ désigne une fonction « cut-off » de classe C^∞, croissante, identiquement nulle sur $]-\infty, 1/2]$, identiquement égale à 1 sur $[1, +\infty[$.

Remarque 3.1. La seconde clause est bien sûr indispensable ; sinon une distribution mesure portée par le sous-ensemble A serait une fonction méromorphe dans U ! Il n'y a pas de problème avec pareil exemple si l'on impose cette seconde clause car la distribution T alors obtenue est la distribution nulle dans U, que l'on peut bien considérer comme une fonction méromorphe dans U.

Cette approche « distributionnelle » ou « courantielle [2] » à la notion de méromorphie cadre bien avec la notion classique. Vérifions le ici dans les deux sens.

Si f s'écrit au voisinage de tout point de U comme le quotient de deux fonctions holomorphes (et que f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, cas auquel on se ramène en prenant des repères lorsque f est supposée à valeurs dans E), on introduit le sous-ensemble fermé

1. C'est aussi faux dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par exemple ou sur la courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda$ (plus généralement sur un surface de Riemann compacte, lorsque U est toute la variété analytique complexe $\mathcal{X}$) : il existe en effet des fonctions méromorphes globales non constantes (les fractions rationnelles dans le premier cas, la fonction elliptique de Weierstraß dans le second cas, etc.) sur ces surfaces de Riemann compactes tandis que les seules fonctions holomorphes sur ces surfaces compactes sont, d'après le théorème de Liouville, les fonctions constantes.

2. Nous serons amenés à l'envisager sous cet angle plus général plus loin.

$A \subset U$ comme l'union des lieux polaires $\{g_{z,2} = 0\}$ obtenus en recouvrant U par des ouverts u_z et que l'on suppose $f = g_{z,1}/g_{z,2}$ dans u_z. On construit une distribution T prolongeant f comme distribution dans u_z en posant :

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0_+} \int_{|g_{z,2}| \geq \epsilon} \frac{g_{z,1}(\zeta)}{g_{z,2}(\zeta)} \varphi(\zeta) \tag{3.4}$$

pour tout élément de $\mathcal{D}^{2n}(\mathcal{X}; u_z, \mathbb{C})$. Il se trouve que cette limite existe et définit une distribution (ici un plutôt un $(0,0)$-courant, ce qui revient au même), dite *Valeur Principale* $g_{z,1} \cdot \mathrm{VP}\,[1/g_{z,2}]$. Ceci n'est nullement évident. On peut pour le voir soit utiliser le théorème de résolution des singularités d'Hironaka [1] ou, si l'on souhaite ≪ cacher ≫ le recours à ce théorème très profond (ce qui peut s'avérer utile), montrer que prouver que la limite (3.4) existe et définit une distribution dans u_z équivaut à prouver que la fonction d'un paramètre complexe

$$\lambda \in \{\mathrm{Re}\,\lambda >> 1\} \longmapsto \int_{u_z} \frac{|g_{z,2}|^{2\lambda}}{g_{z,2}} g_{z,1}(\zeta)\, \varphi(\zeta) = \langle T^\lambda, \varphi \rangle$$

se prolonge, toujours pour $\varphi \in {}'\mathcal{D}^{2n}(\mathcal{X}; u_z, \mathbb{C})$, à $\mathbb{C}$ tout entier en une fonction méromorphe du paramètre complexe λ, de pôles tous dans $-\mathbb{Q}^{+,*}$, et de valeur en 0 la limite (3.4) que l'on souhaite atteindre [2]. La distribution T ainsi construite (après partitionnement de l'unité subordonné au recouvrement de U par les u_z) est évidemment d'extension standard depuis l'ouvert $U \setminus A$.

Inversement, si l'on se donne une telle distribution T et que A se trouve inclus au voisinage u_z du point z dans l'hypersurface $\{g_{z,2} = 0\}$, la distribution $\bar{\partial} T_{|u_z}$ est de support dans $u_z \cap \{g_{2,z} = 0\}$; comme cette distribution a un ordre fini sur tout compact $\tilde{u}_z$ inclus dans u_z, on peut, quitte à restreindre u_z tout en conservant un voisinage ouvert $\tilde{u}_z$ de z cette fois relativement compact dans u_z, supposer qu'il existe un entier N_z tel que

$$g_{z,2}^{N_z} \cdot \bar{\partial} T_{|\tilde{u}_z} = \bar{\partial}[g_{z,2}^{N_z} \cdot T_{|\tilde{u}_z}] = 0$$

comme distribution dans $\tilde{u}_z$. Ceci implique (car l'opérateur $\bar{\partial}$ est, on l'a vu au chapitre 1, section 1.2.1, hypoelliptique) que $g_{z,2}^{N_z} \cdot T$ est une distribution-fonction holomorphe $g_{z,1}$ dans $\tilde{u}_z$; autrement dit T s'exprime dans $\tilde{u}_z$ comme le quotient de deux fonctions holomorphes $g_{z,1}/g_{z,2}^{N_z}$ au voisinage du point z. On retrouve donc bien ici le fait que T s'exprime localement comme le quotient de deux fonctions holomorphes au voisinage de tout point de U.

Notre approche ≪ courantielle ≫ est donc bien équivalente à l'approche algébrique classique. Elle propose cependant un autre éclairage (plus analytique) sur la notion de fonction méromorphe qui nous sera très utile ultérieurement. Le support singulier de la distribution T (considérée comme fonction méromorphe) est appelé *lieu polaire* de

---

1. Il existe une variété analytique complexe $\mathcal{Y}$ de dimension n et une application analytique propre $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ qui réalise un biholomorphisme entre $\{\zeta \in U_z \,;\, g_{z,2}(\zeta) \neq 0\}$ et sa pré-image par π et tel que $g_{z,2} \circ \pi$ s'exprime en coordonnées locales complexes au voisinage de chacun de ses zéros comme un monôme ($\{g_{z,2} \circ \pi = 0\}$ est dite *hypersurface à croisements normaux*) ; pour plus de détails, voir la section 1.4 de [**YNiam**].

2. Cette approche *via* le prolongement analytique suivant un paramètre complexe s'avèrera de fait plus performante en même temps que plus ≪ algébrique ≫. En fait, on passe d'une approche à l'autre par le biais de la transformation de Mellin.

la fonction méromorphe ; c'est un sous-ensemble analytique fermé de U de dimension $n-1$ (une hypersurface analytique) ou bien l'ensemble vide (auquel cas T est une distribution-fonction holomorphe dans U).

3.2. Faisceaux d'anneaux sur une variété analytique complexe

3.2.1. Les notions de faisceau d'anneau, de faisceau d'idéaux et de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ module

Se donner un *pré-faisceau d'anneaux commutatifs* $\mathcal{F}$ sur un (ou au dessus d'un) espace topologique $\mathcal{X}$ (par exemple ici une variété analytique complexe de dimension n), c'est se donner, pour chaque ouvert U de $\mathcal{X}$, un anneau commutatif $\mathcal{F}(U)$ (dit *anneau des sections du faisceau $\mathcal{F}$ au dessus de l'ouvert U*), ainsi que, pour toute paire d'ouverts U, V tels que $U \subset V$, *des morphismes « de restriction*[1] »

$$\rho_{U,V} \ : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

se pliant à la règle de transitivité : $\rho_{U,V} \circ \rho_{V,W} = \rho_{U,W}$ si $U \subset V \subset W$, avec de plus $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_E$. Le *pré-faisceau d'anneaux commutatifs* sur $\mathcal{X}$ devient un *faisceau d'anneaux commutatifs* sur $\mathcal{X}$ si l'on dispose en plus des deux axiomes de « recollement » :

— si (u_α) est un recouvrement de U et si $\rho_{u_\alpha,U}(F) = \rho_{u_\alpha,U}(G)$ pour tout α, les éléments F et G de $\mathcal{F}(U)$ sont égaux ;

— si l'on dispose d'une famille $(F_\alpha)_\alpha$ avec $F_\alpha \in \mathcal{F}(u_\alpha)$ et que

$$\rho_{u_\alpha \cap u_\beta, u_\alpha}(F_\alpha) = \rho_{u\alpha \cap u_\beta, u_\beta}(F_\beta)\,,$$

les F_α se « recollent » en un élément $F \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\rho_{u_\alpha,U}(F) = F_\alpha$ pour tout indice α.

Soit maintenant $\big(\mathcal{X}, (U_\iota, \varphi_\iota)\big)$ une variété analytique complexe de dimension n comme à la section 1.2. Un faisceau d'anneaux commutatifs appelé à jouer un rôle important par la suite sera pour nous le *faisceau structurel* $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$: les sections de ce faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ au dessus d'un ouvert U seront dans ce cas les *fonctions régulières dans U*, c'est-à-dire les fonctions F de U dans $\mathbb{C}$ telles que, pour tout ouvert de carte U_α intersectant U, la fonction

$$F \circ \varphi_\iota^{-1} \ : U \cap U_\iota \to \mathbb{C}$$

soit une fonction holomorphe dans l'ouvert $\varphi_\iota(U \cap U_\iota)$ de $\mathbb{C}^n$.

On parle ici de faisceau d'anneaux commutatifs (sur une variété analytique de dimension ou plus généralement simplement un espace topologique) mais l'on aurait pu tout aussi bien introduire la notion de faisceau d'anneaux non commutatifs, ou même la notion de faisceau de groupes abéliens (additifs ou multiplicatifs, parfois même constants tels $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dans le cas additif).

Étant donné un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{X}$, on peut naturellement introduire sur le même principe la notion de *faisceau de $\mathcal{F}$-modules* au dessus de $\mathcal{X}$, en particulier celle de *faisceau d'idéaux* d'un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{O}$ donné (par exemple le faisceau structurel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$).

1. Par la suite on notera plus classiquement $f_{|U} = \rho_{U,V}(f)$ pour tout $f \in \mathcal{F}(U)$.

3.2.2. Cohomologie de Čech à valeurs dans un faisceau de groupes ou d'anneaux

La cohomologie de Čech à valeurs dans un faisceau (d'anneaux commutatifs, de groupes abéliens, de $\mathcal{F}$-modules lorsque $\mathcal{F}$ est déjà un faisceau tel le faisceau structurel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sur une variété analytique complexe) est appelée à jouer un rôle important dans les questions de géométrie complexe.

Étant donné un recouvrement $\mathscr{U} = (U_\alpha)_\alpha$ d'un variété analytique complexe $\mathcal{X}$, une *k-cochaine* de Čech est par définition une application associant à chaque intersection $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ des U_α pris $k+1$ à $k+1$ un élément $g_{\alpha_0,\dots,\alpha_k} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k})$, c'est-à-dire une *section* du faisceau $\mathcal{F}$ au dessus de $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$.

Suivant l'addition sur les sections de $\mathcal{F}$ (il existe en effet une structure additive soit de groupe abélien, soit d'anneau commutatif, soit de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module sur les « fibres » $\mathcal{F}(U)$, $U \subset \mathcal{X}$), on peut définir une structure de groupe additif sur l'ensemble des *k-cochaines* ; on obtient ainsi le *groupe des k-cochaines* $\check{C}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$ subordonné au recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$.

On définit un *morphisme bord*

$$\delta = \delta_k \ : \check{C}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^{k+1}(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$$

de la manière suivante : pour $k=0$ par

$$(\delta_0 g)_{\alpha,\beta} := \delta^0 g(U_\alpha \cap U_\beta) = g(U_\beta)_{|U_\alpha \cap U_\beta} - g(U_\alpha)_{|U_\alpha \cap U_\beta}\ ;$$

pour $k=1$, cela devient

$$(\delta^1 g)_{\alpha,\beta,\gamma} := \delta^1 g(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) = \Big[g(U_\beta \cap U_\gamma) - g(U_\gamma \cap U_\alpha) + g(U_\alpha \cap U_\beta)\Big]_{|U\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}\ ;$$

et ainsi de suite [1]. On a bien sur $\delta_{k+1} \circ \delta_k = \delta \circ \delta = 0$ et l'image $\check{\mathscr{B}}^k(\mathcal{X};\mathscr{U},\mathcal{F})$ de $C^{k-1}(\mathcal{X};\mathscr{U},\mathcal{F})$ par $\delta = \delta_{k-1}$ est un sous groupe (dit *sous-groupe des k-cobords* au sens de Čech) du noyau $\check{\mathscr{Z}}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$ de $\delta = \delta_k$ (dit, lui, *sous-groupe des k-cocycles* [2]).

Le groupe quotient $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F}) := \check{\mathscr{Z}}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})/\check{\mathscr{B}}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$, qui matérialise l'obstruction pour qu'un k-cocycle soit un k-cobord est dit *k-ième groupe de cohomologie de* Č*ech de $\mathcal{X}$, à valeurs dans $\mathcal{F}$, subordonné au recouvrement $\mathscr{U} = (U_\alpha)_\alpha$*. Pour définir les groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathcal{F})$ (c'est-à-dire s'affranchir de la dépendance en le recouvrement $\mathscr{U}$), on prend les *limites inductives* (pour tous les recouvrements $\mathscr{U}$ de $\mathcal{X}$ possibles, de plus en plus « fins », des groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$: ceci revient à raisonner de la même manière que lorsque l'on passe des fonctions sur les ouverts d'un espace topologique aux germes de fonctions en un point de cet espace : on prend l'union disjointe des groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$, puis on identifie (c'est une relation d'équivalence) un élément de $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U},\mathcal{F})$ et un élément de $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;\mathscr{U}',\mathcal{F})$ lorsque les restrictions de

1. On retrouve ici une structure « alternée » (au niveau des signes) que nous avons déjà observé lors de la manipulation du calcul extérieur, par exemple dans l'expression figurant au numérateur du noyau de Bochner-Martinelli (1.6) dont on sait qu'il n'est pas étranger au recouvrement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par les ouverts de carte $U_j = \{[z_0 : \dots : z_n]\,;\, z_j \neq 0\}$ (voir la remarque 1.1).

2. On relève que, dans la section 2.1.2, nous avions pour définir les fibrés localement triviaux de $\mathbb{C}$(-espaces vectoriels ou les fibrés holomorphes introduit une notion de 2-cocycle dans un contexte multiplicatif non commutatif (à valeurs dans les sections dans U du fibré $\mathcal{X} \times \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$) et non plus, comme ici, additif ; mais le principe de la construction demeure identique.

ces classes de k-cocycles coincident une fois « restreintes » à un raffinement commun aux deux recouvrements $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ de $\mathcal{X}$.

On a déjà mentionné (on le rappelle juste ici) que les groupes de cohomologie de de Rham $H^k(\mathcal{X};U,\mathbb{C})$, $k=0,...,2n$, s'identifiaient aux groupes $\check{H}^k(\mathcal{X}\,;U,\mathbb{C})$, tandis que les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(\mathcal{X}\,;U,\mathbb{C})$ s'identifiaient aux $\check{H}^q(\mathcal{X}\,;U,\Omega^p)$ $(0\leq p,q\leq n)$ d'après le théorème d'isomorphisme de Dolbeault (Ω^p désignant le faisceau des $(p,0)$-formes abéliennes, c'est-à-dire à coefficients holomorphes).

3.2.3. Cohérence d'un faisceau d'anneaux, de groupes, de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules ; exemples

Une propriété importante que partagent les faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules que nous envisagerons au dessus d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension finie n dont $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est le faisceau structurel est la notion de *cohérence*. cette notion de *cohérence* (pour un faisceau) joue en effet un rôle charnière à la croisée de la géométrie complexe et de la géométrie algébrique.

DÉFINITION 3.2 (notion de faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules). Soit $\mathcal{X}$ une variété analytique complexe de dimension n, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ son faisceau structurant, et $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules au dessus de $\mathcal{X}$. Le faisceau $\mathcal{F}$ est dit *cohérent* si :

— d'une part, il est *localement de type fini*, c'est-à-dire : pour pour z dans $\mathcal{X}$, il existe un voisinage U_z de z et q_z éléments $s_1^z,...,s_{q_z}^z$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_z)$ tels que, pour tout $z'\in U_z$, le $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z'}$-module $\mathcal{F}_{z'}$ soit engendré par les germes $s_{j,z'}^z$, $j=1,...,q_z$;

— d'autre part, pour tout ouvert U de $\mathcal{X}$, pour tout choix de sections $s_1^U,...,s_{\tilde{q}_U}^U$ de $\mathcal{F}(U)$, le $(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})_{|U}$*-faisceau de sous-modules de* $(\mathcal{O}_X)_{|U}^{\oplus\tilde{q}_U}$ dit *des relations du faisceau* $\mathcal{F}_{|U}$ et noté $\mathcal{R}_U(s_1^U,...,s_{\tilde{q}_U}^U)$, c'est-à-dire le noyau de l'homomorphisme de faisceaux

$$(g_1,...,g_{\tilde{q}_U})\in(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})_{|U}^{\oplus\tilde{q}_U}\longmapsto\sum_{j=1}^{\tilde{q}_U}g_js_j^U\in\mathcal{F}_{|U}\,,$$

est, lui aussi, localement de type fini.

Exemple 3.1. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un faisceau cohérent (le fait qu'il soit localement de type fini est immédiat). La preuve de la cohérence de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ se fait en raisonnant par récurrence sur la dimension n et en invoquant le théorème de préparation de Weierstraß (voir la section 3.3 de [**De0**] pour plus de détails) : après changement linéaire générique de coordonnées $z=\mathbb{M}w$ (avec $\mathbb{M}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$), un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ de valuation à l'origine égale à μ (c'est le degré de la partie homogène de plus bas degré dans le développement de Taylor à l'origine) se factorise sous la forme

$$f(\mathbb{M}w)=u(w)\prod_{j=1}^{M}p_j^{\mu_j}(w),$$

où $u \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n,0}$, $M \geq 0$, $\mu_1, ..., \mu_M$ sont des entiers strictement positifs (M et les μ_j ne dépendant que de f) et

$$p_j(w) = w_n^{d_j} + \sum_{\ell=1}^{d_j} \xi_{j,\ell}(w_1, ..., w_{n-1})\, w_n^{d_j-\ell},$$

avec

$$\sum_{j=1}^{M} \mu_j d_j = \mu, \quad \mathrm{val}_0(\xi_{j,\ell}) \geq \ell \quad (\ell = 1, ..., d_j)$$

et

$$p_j := X_j^d + \sum_{\ell=1}^{d_j} \xi_{j,\ell}\, X^{d_j-\ell}$$

irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1},0}[X]$ pour $j = 1, ..., M$; le produit des résultants des couples de polynômes $(p_j, dp_j/dX)$ pour $j = 1, ..., M$ s'appelle le *discriminant* δ du germe f en l'origine de $\mathbb{C}^n$. On note que l'ensemble des points singuliers de $\{f = 0\}$ se trouve inclus dans $\pi^{-1}(\{\delta = 0\})$ où $\pi\ : A \to \mathbb{C}^{n-1}$ désigne au voisinage de $w = 0$ la projection sur l'espace $\mathbb{C}^{n-1}_{w_1,...,w_{n-1}}$; ce sous-ensemble analytique fermé de A contenant au voisinage de z toutes les singularité de A se projette par π sur la base $\mathbb{C}^{n-1}_{w_1,...,w_{n-1}}$ en un sous-ensemble de mesure de Lebesgue $2(n-1)$-dimensionnelle nulle dans $\mathbb{C}^{n-1}_{w_1,...,w_{n-1}}$.

3.3. Sous-ensembles analytiques fermés d'une variété analytique complexe

On appelle *sous-ensemble analytique fermé* A d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ tout sous-ensemble fermé de $\mathcal{X}$ que l'on peut définir au voisinage de tout point z de A par un nombre fini d'équations analytiques : pour tout $z \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage U_z de z dans $\mathcal{X}$, des fonctions $f_{z,1}, ..., f_{z,M_z}$ holomorphes dans U_z et telles que

$$A \cap U_z = \{z' \in \mathcal{X}\,;\, f_{z,1}(z') = \cdots = f_{z,M_z}(z') = 0\}.$$

Un tel sous-ensemble analytique fermé A est dit *irréductible* si les seules décompositions $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 sous-ensembles analytiques fermés irréductibles sont les décompositions $\{A_1 = A,\, A_2 = \emptyset\}$ ou $\{A_1 = \emptyset,\, A_2 = A\}$.

Tout sous-ensemble analytique fermé admet une décomposition localement finie en sous-ensembles analytiques fermés irréductibles

$$A = \bigcup_{\iota} A_\iota.$$

Ceci signifie que pour tout ouvert relativement compact U de $\mathcal{X}$, il existe un sous-ensemble fini I_U d'indices ι tels que

$$A \cap U = \bigcup_{\iota \in I_U} (A_\iota \cap U)\ ; \tag{3.5}$$

les sous-ensembles analytiques fermés $A_\iota \cap U$ (considérés cette fois dans l'ouvert restreint U et non plus dans $\mathcal{X}$) sont irréductibles et (3.5) est donc la décomposition en composantes irréductibles de $A \cap U$ dans l'ouvert U de $\mathcal{X}$. Ceci résulte du fait que l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$ est un anneau nœtherien et que le théorème des zéros de Hilbert assure une correspondance bijective entre les germes en z des sous-ensembles analytiques fermés et les idéaux radicaux de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},z}$.

À tout sous-ensemble analytique fermé A d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$, on sait associer un faisceau cohérent d'idéaux radicaux $\mathcal{I}_A$ défini ainsi :

$$\mathcal{I}_A(U) := \{f \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U)\,;\, f_{|A} \equiv 0\}.$$

La cohérence de $\mathcal{I}_A$ résulte d'un théorème d'Henri Cartan (1950) dont on trouvera par exemple une preuve dans [**De0**], chapitre 2, section 4.4. Il suffit pour cela de se limiter au cas où A est irréductible, auquel cas on peut attacher à A une *notion de dimension* : la *dimension* d'un tel sous-ensemble analytique irréductible A est sa dimension en un point quelconque a de A, définie comme N_a, où $N_a + 1$ figure la longueur de la plus grande chaîne d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathcal{X},a}$

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneqq \mathfrak{P}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{P}_{N_a} \subset (\mathcal{I}_A)_z$$

que l'on puisse inclure dans l'idéal premier $(\mathcal{I}_A)_a$. Plutôt que de donner une preuve du théorème de Cartan assurant la cohérence du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_A$, nous allons dégager les concepts *d'intersection complète* et d'*intersection complète réduite*. On dit qu'un sous-ensemble analytique d'un ouvert U de A est défini comme une *intersection complète* dans U si et seulement toutes les composantes irréductibles de $A \cap U$ sont de codimension $1 \leq r \leq n$ (comme sous-ensembles analytiques fermés irréductibles de U) et si de plus il existe <u>exactement</u> r fonctions holomorphes $f_{U,1}, ..., f_{U,r}$ dans U telles que

$$A \cap U = \{z \in U\,;\, f_{U,1}(z) = \cdots = f_{U,r}(z) = 0\}. \tag{3.6}$$

On dit que A est défini comme une *intersection complète réduite* dans U si et seulement A est défini dans U comme une intersection complète (3.6) avec de plus

$$\forall\, a \in A \cap U, \quad (df_{U,1} \wedge \cdots \wedge df_{U,r})(a) \neq 0.$$

Il résulte de l'algorithme de *préparation, ou encore de normalisation, d'Emmy Nœther* (combinaison de la méthode utilisée dans l'exemple 3.1 et de la théorie de l'élimination, voir par exemple le livre d'algèbre de Van der Waerden [**VdW**] ou le livre de Lang [**Lang0**])) que tout sous-ensemble analytique fermé irréductible A de codimension $r \in \{1, ..., n\}$ dans la variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n se présente au voisinage de l'un quelconque $a \in A$ de ses points comme l'union d'un certain nombre de composantes irréductibles $A_{U,\iota}$ d'une intersection complète réduite. Ce résultat (que l'on trouve par exemple dans [**GR**] page 72) est d'une grande importance pratique car les sous-ensembles analytiques fermés définis comme intersections complètes réduites sont presque aussi faciles à manier que le sont les hypersurfaces irréductibles et en constituent une naturelle généralisation en codimension supérieure. La cohérence de $\mathcal{I}_A$ s'observe facilement une fois conduite la normalisation de Nœther : le sous-ensemble irréductible A se présente dans un système de coordonnées locales w déduit génériquement de z par $z = \mathbb{M}w$ (avec $\mathbb{M} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) au voisinage de a comme un revêtement ramifié $\pi\ : A \to \mathbb{C}^{n-r}$ à un nombre μ_a de feuillets, le lieu discriminant (c'est-à-dire le lieu de la base $\mathbb{C}^{n-r}$ au dessus duquel deux feuillets sont susceptibles de se croiser) étant inclus dans une hypersurface $\{\delta(w_1, ..., w_{n-r}) = 0\}$ au voisinage de $\pi(a)$ dans $\mathbb{C}^{n-r}$.

Remarque 3.2 (principe « GAGA »)**.** Si A est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, le sous-ensemble A se présente comme le lieu des zéros communs

$$\{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\,;\, P_0(z) = \cdots = P_M(z) = 0\}$$

d'un nombre fini de polynômes homogènes $P_0, ..., P_M$. C'est donc un *variété algébrique projective.* Ceci est un avatar d'un célèbre principe formulé par Jean-Pierre Serre dans [**Ser**], le principe « GAGA » : « Géométrie Algébrique, Géométrie Analytique » : « *tout être analytique « global » dans la variété algébrique compacte* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *se trouve de fait être algébrique* ». Il est réminiscent de cette version, elle, « fonctionnelle » et non plus « ensembliste » : *toute fonction méromorphe sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est nécessairement une fonction rationnelle*, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes homogènes de même degré. Même chose pour toute section méromorphe globale du fibré $\mathcal{O}(d)$ ($d \in \mathbb{Z}$) : c'est le quotient de deux polynômes homogènes P/Q tels que $\deg P - \deg Q = d$.

3.4. Espaces analytiques réduits de dimension n

Soit Ω un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^N$ et A_Ω un sous-ensemble analytique réduit de Ω dont toutes les composantes sont de dimension $n \in \{0, ..., N-1\}$ (on dit que A_Ω est de dimension pure égale à n). On note $\mathcal{O}_{A_\Omega}$ le faisceau de $\mathcal{O}_\Omega$-modules défini comme le quotient $\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{I}_{A_\Omega}$. Il s'agit encore d'un faisceau de $\mathcal{O}_\Omega$-modules cohérent car dès que l'on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_\Omega$ modules et que deux dans la liste $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ sont cohérents, le troisième l'est.

Se donner un *espace analytique réduit de dimension* n sur $\mathbb{C}$ revient à se donner un espace topologique $\mathcal{X}$ (séparé et dénombrable à l'infini) équipé d'un faisceau $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ de fonctions continues [1] ainsi qu'un atlas (U_ι, φ_ι), où les U_ι constituent un recouvrement de $\mathcal{X}$ et φ_ι réalise un homéomorphisme entre U_ι et $A_\iota = \varphi_\iota(U_\iota)$, sous-ensemble analytique fermé de dimension pure égale à n d'un certain ouvert $\Omega_\iota \subset \mathbb{C}^{N_\iota}$. On exige de plus que, pour chaque indice ι, le morphisme *pull-back* :

$$\varphi_\iota^* \ : (a \in A_\iota, \dot{h} \in \mathcal{O}_{A_\iota,a}) := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N_\iota},a}}{\mathcal{I}_{A_\iota,a}} \mapsto \big(\varphi_\iota^{-1}(a), (\dot{h} \circ \dot{\varphi}_\iota)_{\varphi_{\iota^{-1}}(a)}\big)$$

réalise un isomorphisme de faisceaux d'anneaux entre $\mathcal{O}_{A_\iota}$ et $(\mathcal{O}_\mathcal{X})_{|U_\iota}$. Autrement dit, on « recolle » une collection de sous-ensembles analytiques $A_\iota \subset \Omega_\iota \subset \mathbb{C}^{N_\iota}$ tous de même dimension, A_ι étant équipé de son faisceau structurel $\mathcal{O}_{A_\iota}$ (on exige des morphismes de changement de cartes

$$\varphi_{\iota_0,\iota_1} \ : \varphi_{\iota_0}(U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1}) \longrightarrow \varphi_{\iota_1}(U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1})$$

que ce soient des bi-morphismes entre ouverts d'espaces analytiques $(A_{\iota_0}, \mathcal{O}_{A_{\iota_0}})$ et $(A_{\iota_1}, \mathcal{O}_{A_{\iota_1}})$.

On peut ainsi voir un $\mathbb{C}$-espace analytique réduit de dimension n comme une variété analytique complexe de dimension n présentant cette fois des singularités. L'ensemble des points singuliers de $\mathcal{X}$ est un sous-espace analytique fermé $\mathcal{X}^{\mathrm{sing}}$ de $\mathcal{X}$ (c'est-à-dire

1. On l'appelera *faisceau structurel* du $\mathbb{C}$-espace analytique réduit $\mathcal{X}$ par la suite ; le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}_\mathcal{X}(U)$ de ses sections dans un ouvert U sera, lui, appelé $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions *régulières* dans U.

un sous-ensemble fermé défini localement comme le lieu des zéros d'un nombre fini de fonctions régulières) tel que

$$\overline{\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^{\rm sing}} = \mathcal{X}.$$

De plus $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^{\rm sing}$ hérite d'une structure de variété analytique complexe (cette fois lisse) de dimension n.

On introduit, pour chaque $k = 0, ..., 2n$, le faisceau des k-formes différentielles sur $\mathcal{X}$ en définissant $\Lambda^k(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ comme suit : si U_ι est un ouvert de carte, on transporte sur U par pull-back *via* φ_ι le $\mathbb{C}$-espace vectoriel quotient

$$\frac{\Lambda^k(\mathbb{C}^{N_\iota}; U_\iota, \mathbb{C})}{\{\omega \in \Lambda^k(\mathbb{C}^{N_\iota}; U_\iota, \mathbb{C})\,;\, \omega_{|A_\iota^{\rm reg}} = 0\}}.$$

On définit ainsi les faisceaux $\Lambda^k(\mathcal{X}; \cdot, \mathbb{C})$ des k formes $0 \leq k \leq 2n$, $\Lambda^{p,q}(\mathcal{X}; \cdot, \mathbb{C})$ des (p,q)-formes, ainsi, par dualité, que celui $'\mathcal{D}^k(\mathcal{X}; \cdot, \mathbb{C})$ des k-courants (à valeurs complexes) ainsi que celui $'\mathcal{D}^{p,q}(\mathcal{X}; \cdot, \mathbb{C})$ des (p,q)-courants. Si $\iota\ : \mathcal{X} \to \Omega \subset \mathbb{C}^N$ est un plongement local au voisinage U d'un point z de $\mathcal{X}$, on peut identifier le $\mathbb{C}$-espace $'\mathcal{D}^{p,q}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ au $\mathbb{C}$-espace de $'\mathcal{D}^{N-(n-p), N-(n-q)}(\mathbb{C}^N; \Omega, \mathbb{C})$ constitué des courants qui s'annulent sur $\mathcal{X}^{\rm reg}$ par $T \mapsto \iota_* T$.

La notion de *faisceau d'anneaux commutatifs*, de *faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$*, plus généralement de *faisceau de $\mathcal{O}_\mathcal{X}$-modules*, se transposent du cadre des variétés analytiques complexes de dimension n au cadre des $\mathbb{C}$-espaces analytiques réduits de dimension n. La notion de *cohérence* se transporte également.

On peut ainsi, puisque l'on dispose sur un tel $\mathbb{C}$-espace analytique réduit $\mathcal{X}$, du faisceau $\Lambda^0(\mathcal{X}; \cdot, \mathbb{C})$ des fonctions C^∞ de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{C}$ ainsi que du faisceau des fonctions régulières, reprendre la construction des fibrés localement libres de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels à partir des cocycles (telle qu'elle a été envisagée à la section 2.1.2) pour introduire les notions de $\mathbb{C}$-*fibrés de rang m localement triviaux* (cocycles C^∞ à valeurs dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$) ou de $\mathbb{C}$-*fibrés holomorphes de rang m* au dessus de $\mathcal{X}$ (cocycles réguliers à valeurs dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$).

Si $s\ : \mathcal{X} \to E$ est une section holomorphe (c'est-à-dire) régulière globale d'un $\mathbb{C}$-fibré holomorphe de rang m au dessus de $\mathcal{X}$, s engendre un faisceau d'idéaux cohérent $\mathcal{I}[s]$ dans $\mathcal{O}_\mathcal{X}$. Le faisceau $\mathcal{O}_\mathcal{X}/\mathcal{I}[s]$ est aussi un faisceau cohérent d'idéaux.

DÉFINITION 3.3 (normalité). Un $\mathbb{C}$-espace analytique $\mathcal{X}$ réduit est dit *normal* si pour tout $z \in U$ et toute fonction holomorphe de $f_z\ : \mathcal{X}^{\rm reg} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie au voisinage de z et telle qu'il existe un voisinage u_z relativement compact de z et $M_{f_z, z} \in [0, +\infty[$ avec

$$\forall\, z' \in u_z \cap \mathcal{X}^{\rm reg},\ |f_z(z')| \leq M_{f_z, z},$$

la fonction f_z se prolonge en une section de $\mathcal{O}_\mathcal{X}(u_z)$.

Exemple 3.2. Si $\mathcal{X}$ désigne le $\mathbb{C}$-espace analytique réduit

$$\mathcal{X} = A = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2\,;\, z^2 - w^3 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$$

équipé de son faisceau stucturel $\mathcal{O}_A$, la fonction $(z,w) \longmapsto z/w$ (sur $\mathcal{X}^{\rm reg}$, puis prolongée par 0 en $(0,0)$) est bien bornée au voisinage de $(0,0)$ sur $\mathcal{X}$. On pourra vérifier en exercice (voir l'exercice 3.17 de [**YanC**] et son corrigé) que cette fonction ne se prolonge pas en une fonction régulière au voisinage de l'origine dans $\mathcal{X}$. Le $\mathbb{C}$-espace analytique $\mathcal{X}$ défini ici (et appelé *cusp*) n'est donc pas normal.

Un autre théorème d'Oka assure qu'il existe toujours, étant donné un $\mathbb{C}$-espace analytique complexe $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ de dimension n, un $\mathbb{C}$-espace analytique complexe normal $(\mathcal{X}^{\rm norm}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\rm norm}})$ (≪ norm ≫ pour ≪ normalisé ≫) couplé par un morphisme (de $\mathbb{C}$-espaces analytiques) propre

$$\pi^{\rm norm} : (\mathcal{X}^{\rm norm}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\rm norm}}) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}).$$

De plus les fibres $(\pi^{\rm norm})^{-1}(\{z\})$ (pour $z \in \mathcal{X}$) sont finies et $\pi^{\rm norm}$ réalise un isomorphisme analytique entre $\mathcal{X}^{\rm norm} \setminus (\pi^{\rm norm})^{-1}(\mathcal{X}^{\rm sing})$ (qui doit être un ouvert dense de $\mathcal{X}^{\rm norm}$) et $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^{\rm sing} = \mathcal{X}^{\rm reg}$. De plus, deux telles normalisations sont isomorphes analytiquement. On pourra se reporter à [**De0**] (ou à [**YNiam**]) pour une preuve ou tout au moins (dans [**YNiam**]) une esquisse de preuve (théorème 1.50 de [**YNiam**]).

Le fait qu'un $\mathbb{C}$-espace analytique ne soit pas normal n'est donc pas un handicap majeur car on peut le normaliser grâce à ce théorème d'Oka.

3.5. Courants positifs fermés, courants d'intégration

3.5.1. Notion de courant positif

Soit $\mathcal{X}$ un $\mathbb{C}$-espace analytique de dimension n (que l'on aura parfois à considérer comme plongée localement dans une variété analytique complexe $\mathcal{Y}$ de dimension $N \geq n$).

Définition 3.4 (courants positifs sur un $\mathbb{C}$-espace analytique complexe). Un (r,r)-courant $T \in {}'\mathcal{D}^{r,r}(\mathcal{X}; U, \mathbb{C})$ est dit *positif* (au sens faible) dans U si et seulement si on a $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$ pour toute $(n-r, n-r)$-forme-test φ s'exprimant localement comme une somme à coefficients positifs ou nuls de produits de $n-r$ formes de bidegré $(1,1)$ du type $i\,\ell_j \wedge \overline{\ell}_j$, où ℓ_j est une $(1,0)$-forme.

Une distribution T dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\langle T, \varphi\rangle \geq 0$ dès que la $2n$-forme $\phi = \theta\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ avec $\theta \in \mathcal{D}(\Omega, [0, +\infty[)$ est une distribution-mesure de Radon positive. Cela résulte du théorème de F. Riesz (voir par exemple [**Rud**]) en analyse fonctionnelle. En ce qui concerne les (r,r)-courants, ceci n'est plus vrai car on travaille avec des (r,r)-formes différentielles à coefficients distributions mais il en subsiste une partie : si T est un courant positif de type (r,r) dans un ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace analytique, le courant T est à *coefficients mesures* (toujours modulo l'identification des mesures sur la variété analytique complexe $X^{\rm reg}$).

3.5.2. Nombre de Lelong d'un courant positif fermé en un point

Si T est un (r,r)-courant positif fermé au voisinage d'un point z sur un espace analytique complexe $\mathcal{X}$, il est ainsi possible d'associer à T un nombre réel positif ou nul important figurant la *masse* de T au point z, dit *nombre de Lelong* de T au point z. Si T est un (r,r)-courant dans un ouvert de $\mathbb{C}^N$, on définit la *masse de* T au point z comme

$$\nu_z(T) = \lim_{\eta \to 0_+} \frac{\langle T, \chi_{\{\|\zeta - z\| \leq \eta\}} (dd^c |\zeta - z|^2)^{\wedge^{N-r}} \rangle}{\eta^{2(N-r)}}$$

(c'est la limite en 0_+ d'une fonction croissante positive) ; c'est aussi la masse en z (après décomposition Radon-Nikodym) de la mesure positive μ_z définie par :

$$T \wedge (dd^c \log|\zeta - z|^2)^{\wedge^{N-r}}) = \mu_z \, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n.$$

Cette définition est robuste car le résultat obtenu ne dépend pas du choix du plongement ι.

3.5.3. L'exemple des courants d'intégration

Si A est un sous-ensemble analytique fermé de codimension pure r dans $\mathcal{X}$ (ou dans un ouvert U de $\mathcal{X}$), il revient au même, si $\iota\ : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un plongement local de $\mathcal{X}$ dans une variété analytique complexe $\mathcal{Y}$ de dimension N (par exemple $\mathbb{C}^N$), de considérer A dans $\mathcal{X}$ (ou U) ou A comme sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{Y}$ (dans ce cas de codimension $N - n + r$ dans $\mathcal{Y}$). On peut ainsi définir un (r, r) courant positif sur $\mathcal{X}$ (ou U) en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}^{n-r,n-r}(\mathcal{X}\,; U, \mathbb{C}) \quad \langle [A], \varphi \rangle := \int_{A^{\mathrm{reg}}} \omega. \tag{3.7}$$

L'intégration est ici bien définie car $\iota(A) \subset \mathcal{Y}$ se présente localement (au voisinage de $\iota(z)$, dans des coordonnées locales $w_1, ..., w_N$ dans $\mathcal{Y}$) comme un sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{Y}$ de codimension $N - n + r$ dans $\mathcal{Y}$, c'est-à-dire, d'après ce que l'on a vu précédemment (à la section 3.3) comme un revêtement propre à μ_z feuillets de lieu de ramification un sous-ensemble analytique fermé de codimension au moins égale à 1 de $\mathbb{C}^{n-r}_{w_1,\dots,w_{n-r}}$ (*lieu discriminant*). L'ensemble des points singuliers de $\iota(A)$ se trouve ainsi inclus dans un sous-ensemble analytique fermé de $\iota(A)$ se projetant (par $w \mapsto (w_1, ..., w_{n-r})$) sur ce lieu discriminant (qui se trouve être de mesure de Lebesgue $2(n-r)$-dimensionnelle nulle dans $\mathbb{C}^{n-r}_{w_1,\dots,w_{n-r}}$). On peut se contenter d'intégrer sur A^{reg} au lieu d'intégrer sur A tout entier, l'intégrale figurant au second membre de (3.7) se trouvant être absolument convergente au sens de Lebesgue.

On a en fait la proposition suivante (la première assertion est immédiate, la seconde résulte du théorème de Stokes [1]).

PROPOSITION 3.1 (courant d'intégration). *Si A est un sous-ensemble analytique fermé de codimension pure égale à r dans un ouvert U d'un $\mathbb{C}$-espace analytique $\mathcal{X}$ de dimension n, le (r, r) courant sur U défini par* (3.7) *est un courant positif fermé ($dT = \partial T = \bar{\partial} T = 0$).*

---

1. On se ramène par plongement local au cas où $\mathcal{X}$ est une variété analytique complexe de dimension N et on exprime pour cela au voisinage d'un point de A par exemple (grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue) :

$$\langle [A], \bar{\partial}\varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{A \cap \{|\delta| \geq \epsilon\}} \bar{\partial}\varphi$$

pour toute $(n-r, n-r-1)$ forme test φ, où $A^{\mathrm{sing}} \subset A \cap \{\delta = 0\}$. La formule de Stokes sur A^{reg} donne alors

$$\int_{A \cap \{|\delta| \geq \epsilon\}} \bar{\partial}\varphi = \pm \int_{A \cap \{|\delta| = \epsilon\}} \bar{\partial}\varphi$$

pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers 0, on conclut bien à ce que le courant $\bar{\partial}([A])$ est nul ; il en est de même pour $\partial([A])$.

Il faut prendre garde à bien prendre en compte dans le calcul de l'intégration au second membre de (3.7) le nombre de feuillets. Un théorème de Thie assure d'ailleurs que si A est un sous-ensemble analytique de $\mathcal{X}$ de codimension pure égale à r, le nombre de Lelong $\nu_a([A])$ en un point a de A est égal au nombre de feuillets $\mu_a(A)$ intervenant dans une présentation de $\iota_a(A)$ sous forme de revêtement ramifié π : $\iota_a(A) \to \mathbb{C}^{n-r}_{w_1,\dots,w_{n-r}}$ après transformation générique $z = \mathbb{M}w$ des coordonnées locales au voisinage de $\iota(A)$ ($\iota_a : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ désignant un plongement de $\mathcal{X}$ dans une variété analytique complexe de dimension $N_a \geq n$ au voisinage du point a. Ce nombre de feuillets μ_a ne dépend donc en fait pas du plongement ; on a

$$\mu_a(A) = \nu_a([A]), \tag{3.8}$$

le courant de bidegré (r,r) $[A]$ (dit *courant d'intégration sur* A, A étant ici considéré comme *réduit*, ce qui veut dire que seul le nombre local de feuillets est à prendre en compte, mais en aucune manière des multiplicités éventuelles) étant ici considéré comme un (r,r)-courant positif sur $\mathcal{X}$ (ou U si A est seulement un sous-ensemble analytique fermé d'un ouvert U du $\mathbb{C}$-espace analytique complexe $\mathcal{X}$.

3.5.4. Holonomie des coefficients-mesures d'un courant d'intégration

Si A est un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure d'un espace analytique $\mathcal{X}$ de dimension n, que a est un point de A et ι_a un plongement d'un voisinage U_a de a dans une variété analytique complexe de dimension N, le courant d'intégration $[\iota_a(A)] = (\iota_a)_*([A])$ s'exprime en coordonnées locales complexes $z_1, \dots, z_N$ au voisinage de $\iota(a)$ sous la forme

$$\sum_{\#I=\#J=p} \mu^{[A]}_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

où les $\mu^{[A]}_{I,J}$ dénotent des mesures supportées par $\iota(A)$. Le courant d'intégration a l'intéressante propriété suivante : pour chaque telle mesure $\mu^A_{I,J}$, il existe, dès que $f_1, \dots, f_M$ sont des fonctions holomorphes dans $\mathcal{Y}$ au voisinage de $\iota(a)$, un jeu d'opérateurs différentiels holomorphes

$$\mathscr{Q}^{[A],f}_{I,J,j}\Big(\lambda_1, \dots, \lambda_M, z_1, \dots, z_N, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_N}\Big),\ (j = 1, \dots, M)$$

(polynomiaux en les M paramètres formels $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ ainsi qu'en les opérateurs différentiels holomorphes $\partial/\partial z_1$, ...,$\partial/\partial z_N$, holomorphes en $z_1, \dots, z_N$ tels que l'on dispose au voisinage de $\iota(a)$, en coordonnées locales $z_1, \dots, z_N$, d'un jeu d'équations formes du type *Bernstein-Sato* multivarié :

$$\begin{aligned} &\mathscr{Q}^{[A],f}_{I,J,j}\Big(\lambda_1, \dots, \lambda_M, z_1, \dots, z_N, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_N}\Big)\Big[f_j \otimes \bigotimes_{j=1}^{M} f_j^{\lambda_j} \otimes \mu^{[A]}_{I,J}\Big] \\ &\quad = \Big(\prod_{\kappa=1}^{K} (\alpha_{\kappa,0} + \alpha_{\kappa,1}\lambda_1 + \cdots + \alpha_{\kappa,M}\lambda_M)\Big) \bigotimes_{j=1}^{M} f_j^{\lambda_j} \otimes \mu^{[A]}_{I,J} \qquad (j = 1, \dots, M) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où les $\alpha_{\kappa,j}$, $j=1,...,M$ sont des entiers positifs ou nuls et les $\alpha_{\kappa,0}$ des entiers strictement positifs ; le polynôme scindé

$$B^{[A],f}(\lambda_1,...,\lambda_M) := \prod_{\kappa=1}^{K}(\alpha_{\kappa,0}+\alpha_{\kappa,1}\lambda_1+\cdots+\alpha_{\kappa,M}\lambda_M)$$

est dit *polynôme de Bernstein-Sato de* $f_1,...,f_M$ *contre la mesure* $\mu_{I,J}^{[A]}$. On doit l'existence d'un tel jeu d'équations formelles aux résultats de divers auteurs ([**Bern, Gyo, Licht, Ka, Sab**]). Si le jeu d'équations (3.9) est seulement formel, il s'interprète en revanche au sens des distributions si l'on multiplie les deux membres par

$$\prod_{j=1}^{M}\bar{\mathtt{f}}_j^{\lambda_j}$$

(expression antiholomorphe, donc traitée comme constante par les opérateurs holomorphes $\partial/\partial z_j$, $j=1,...,N$). On obtient ainsi le jeu de relations

$$\overline{Q}_{I,J,j}^{[A],f}(\lambda,\bar z,\partial/\partial\bar z)\Big[\frac{\bar f_j}{f_j}\prod_{j=1}^{N}|f_j|^{2\lambda_j}\otimes\mu_{I,J}^{[A]}\Big] = B^{[A],f}(\lambda)\prod_{j=1}^{M}|f_j|^{2\lambda_j}\otimes\mu_{I,J}^{[A]} \tag{3.10}$$

permettant par exemple de « compenser » des singularités holomorphes en préservant (au sens des distributions) l'intégration contre les mesures $\mu_{I,J}^{[A]}$. On peut également relever ces singularités en utilisant les relations algébriques (qu'il convient d'itérer)

$$\begin{aligned} &Q_{I,J,j}^{[A],f}(\lambda-N_j,z,\partial/\partial z)\Big[f_j^{-N_j+1}\prod_{j=1}^{N}|f_j|^{2\lambda_j}\otimes\mu_{I,J}^{[A]}\Big] \\ &\quad = B^{[A],f}(\lambda_1,...,\lambda_j-N_j,...,\lambda_N)\,f_j^{-N_j}\prod_{j=1}^{M}|f_j|^{2\lambda_j}\otimes\mu_{I,J}^{[A]}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

pour $j=1,...,M$ et les N_j entiers strictement positifs. Cette propriété qu'ont les courants d'intégration (sur une variété analytique complexe $\mathcal{Y}$ de dimension N, par exemple une variété dans laquelle on plonge localement un $\mathbb{C}$-espace analytique $\mathcal{X}$) de pouvoir être ainsi « multipliés [1] » par des fonctions ou des formes différentielles *semi-méromorphes* (c'est-à-dire s'exprimant en coordonnées locales sous la forme ω/f où f est régulière et ω est une (p,q)-forme) est dite *propriété d'holonomie.*

3.5.5. Courants positifs fermés et cycles

Dans le contexte de la géométrie algébrique, la notion de *cycle* joue un rôle important.

DÉFINITION 3.5 (notion de cycle). On appelle *cycle* dans un $\mathbb{C}$-espace analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n, à coefficients dans un groupe abélien additif $\mathbb{G}$ (par exemple, le plus souvent, $\mathbb{G}=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$), toute combinaison linéaire formelle localement finie [2] de courants d'intégration $[A]$ (avec A sous-ensemble analytique fermé

1. Par le biais d'intégrations par parties subordonnées au jeu de relations du type (3.10) ou `BS3`.
2. Ceci signifie que pour tout ouvert relativement compact U de $\mathcal{X}$, il y a au plus un nombre fini d'indices ι tels que $A_\iota\cap U\neq\emptyset$.

irréductible, donc de codimension pure r_A), soit :

$$C = \sum_\iota \gamma_\iota [A_\iota] \quad (\gamma_\iota \in \mathbb{G}).$$

Lorsque tous les sous-ensembles analytiques A_ι ont codimension r, on dit que C est un $(n-r)$ cycle de $\mathcal{X}$. On équipe l'ensemble des cycles d'une structure naturelle de groupe libre additif dont l'ensemble des $(n-r)$-cycles constitue un sous-groupe. Lorsque $\mathbb{G} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, un cycle C est dit *effectif* si et seulement si tous les coefficients γ_ι sont des nombres réels positifs ou nuls. Si $r = n-1$, un r-cycle est aussi appelé *diviseur de Weil* (à coefficients dans $\mathbb{G}$).

Les courants positifs fermés se décomposent suivant une stratification en relation avec leur fonction nombre de Lelong local $a \mapsto \nu_a(T)$.

THEORÈME 3.2 (décomposition de Siu [1]). *Si T est un (r,r) courant positif fermé sur un $\mathbb{C}$-espace analytique de dimension n, il existe une suite dénombrable $(A_k)_{k\geq 0}$ de sous-ensembles analytiques fermés de codimension r et un courant positif $\mathscr{N}$ ($\mathscr{N}$ pour « négligeable ») tels que :*

— *on a, au sens de la convergence faible des suites de (r,r)-courants :*

$$T = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \lambda_{T,k}\,[A_k] + \mathscr{N}\ ; \tag{3.12}$$

— *les nombres $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ sont des nombres réels positifs ;*

— *pour tout $\eta > 0$, les sous-ensembles*

$$\{a \in \mathcal{X}\,;\, \nu_a(\mathscr{N}) \geq \eta\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de $\mathcal{X}$ de codimension strictement supérieure à r.

De plus, une telle décomposition (3.12) *est unique.*

Remarque 3.3 (une brève présentation de la conjecture de Hodge [2]). La classe des courants positifs fermés contient donc la classe constituée de ces êtres beaucoup moins « flexibles » que sont les courants d'intégration sur les sous-ensembles analytiques fermés. À titre d'exemple mettant en lumière la difficultés des problèmes que cela soutend, mentionnons ici la célèbre *conjecture de Hodge*. Une *classe de Hodge* de degré $2r$ ($0 \leq r \leq n$) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un élément de $H^{r,r}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ qui, une fois vu comme un élément de $H^{2r}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ suivant la *décomposition de Hodge* :

$$H^{2r}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \bigoplus_{r_1+r_2=r} H^{r_1,r_2}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \tag{3.13}$$

correspond à une classe de cohomologie de Čech rationnelle, c'est-à-dire à un élément de $\check{H}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}); \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$. Cette classe de Hodge est-elle la classe de cohomologie d'un $(n-r)$-cycle de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ à coefficients rationnels ? Répondre à cette question revient à exhiber dans cette classe de cohomologie un tel être *rigide*, alors qu'il est plus aisé d'en exhiber des êtres *flexibles* comme des (r,r)-courants positifs fermés. Cette conjecture

1. Voir par exemple [**De1**].
2. Voir [**De2**] et en particulier l'introduction de cet article pour une présentation d'une approche « courantielle » à cette conjecture dans l'esprit de ces notes de cours.

est vraie si $r = 1$ et $r = n-1$. Elle demeure une question fondamentale de la géométrie complexe.

C'est avec la remarque ci-dessus (une brève digression vers la théorie et la conjecture de Hodge) et la mise en évidence ainsi de la *flexibilité* des objets *courantiels* par rapport à la *rigidité* des êtres algébriques (courants d'intégration, cycles) que nous concluons ici ce cours. Une de nos motivations majeures était de souligner le rôle crucial des êtres « antiholomorphes » en écho aux êtres « holomorphes » ; ces êtres antiholomorphes sont fondamentalement considérés comme « neutres » dans les démarches de géométrie algébrique mais apportent pourtant un ingrédient moteur à cette flexibilité courantielle.

3.6. Exercices

Exercice 3.1 (sous-harmonicité, positivité)**.**

(1) Soient $f_1, ..., f_M$ M fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et sans zéros communs dans cet ouvert. Calculez $dd^c \log |f|^2$ lorsque $|f|^2 := |f_1|^2 + \cdots + |f_M|^2$ et vérifiez la formule

$$dd^c\,[\log \|f\|^2] = \frac{1}{\|f\|^4}\Big(\sum_{j=1}^{M}\sum_{\substack{\ell=1\\ l\neq j}}^{M}\big(|f_j|^2|f'_\ell|^2 + |f'_j|^2|f_\ell|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\big[\bar f_j f_\ell f'_j \bar f'{}_\ell\big]\big)\Big)\,\frac{idz\wedge d\bar z}{\pi}.$$

(2) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, prouvez que $dd^c \log |f|^2$ est une $(1,1)$ forme positive dans l'ouvert Ω.

(3) Montrez que si $F_1, ..., F_M$ sont M fonctions holomorphes sans zéros communs dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, la fonction $\log |F|^2$, où $|F|^2 := \sum_1^M |F_j|^2$ est plurisousharmonique dans U.

(4) Pourquoi définit-on bien une $(1,1)$-forme dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en posant

$$\omega_n([z_0 : \ldots : z_n]) := dd^c \log(|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2)\ ?$$

(5) On écrit

$$\omega_n([z_0 : \ldots : z_n]) = i \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{j,k}\, d\zeta_j \wedge d\bar\zeta_k$$

en coordonnées locales dans chaque ouvert de carte $U_0, ..., U_n$ de l'atlas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pourquoi définit-on bien une métrique hermitienne sur le fibré tangent holomorphe $T^{(1,0)}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ en posant, dans chaque carte :

$$h := \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{j,k}\, d\zeta_j \otimes d\bar\zeta_k\ ?$$

(6) Vérifiez que

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \omega_1 = 1.$$

(7) Montrez que

$$\omega_n^{\wedge^n} = \frac{n!}{(2i\pi)^n\,(1+|\zeta|^2)^{n+1}} \bigwedge_{j=1}^{n} d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_j$$

en coordonnées locales dans l'ouvert de carte U_0 de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Vérifiez enfin que

$$\int_{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})} \omega_n = 1.$$

Exercice 3.2 (théorème de préparation de Weierstraß)**.** Soit f un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$, de valuation μ (ce qui signifie que la composante homogène de plus bas degré dans le développement de Taylor de f en 0 est de degré μ), supposé irréductible (dans l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine).

(1) Montrez que si $z = Aw$ est un changement de variable linéaire générique, on peut écrire

$$f(Aw) = u(w)\,\big(w_n^{\mu} + \sum_{\ell=1}^{\mu} \xi_\ell(w_1, ..., w_{n-1})\, w_n^{\mu-\ell}\big),$$

où les ξ_ℓ sont des germes à l'origine de fonctions holomorphes en $n-1$ variables et u est un germe de fonction holomorphe en n variables inversible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Pourquoi la valuation de ξ_ℓ en 0 est-elle au moins égale à ℓ ?

(2) On suppose que la description de $f(Aw)$ (pour A générique) établie à la question précédente est valable dans un polydisque $\Delta_n(0\,;\,r_1, ..., r_n)$. Montrez qu'il existe une fonction analytique $w \to \delta(w_1, ..., w_{n-1})$ dans $\Delta_{n-1}(0; r_1, ..., r_{n-1})$ telle que l'application

$$\pi\ : w = (w_1, ..., w_n) \to (w_1, ..., w_{n-1})$$

soit surjective propre de $\{f(Aw) = 0\} \cap \Delta_n(0; r_1, ..., r_n)$ dans le polydisque

$$\Delta_{n-1}(0; r_1, ..., r_{n-1})$$

et que $\pi^{-1}(\{\delta \neq 0\}) \cap \{f(Aw) = 0\}$ se présente comme une variété analytique complexe de dimension $n-1$ à μ feuillets. Que se passe-t-il pour ces divers feuillets lorsque l'on se trouve au dessus d'un point où δ s'annule ?

Exercice 3.3 (courants positifs)**.** Soit T un courant à valeurs complexes de bidegré (p, p) (ou encore de bidimension $(n-p, n-p)$ sur une variété analytique complexe $\mathcal{X}$. On suppose le courant T normal, c'est-à-dire que T et dT sont tous deux des formes différentielles à coefficients mesures. Montrez que si le support de T est inclus dans un sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{X}$ de codimension strictement supérieure à p, le courant T est le courant nul.

Corrigés des exercices faits en TD

Corrigé de l'exercice 1.1 [1]**.**
1) Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi\ : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout segment $[t-\tau, t+\tau] \subset I$, on dispose de l'inégalité de la sous-moyenne volumique :

$$[t-\tau, t+\tau] \subset I \Longrightarrow 2\tau f(t) \leq \int_{t-\tau}^{t+\tau} f(s)\, ds. \tag{.14}$$

La fonction $\tilde{f}$ est, puisque f l'est dans U, une fonction continue dans le tube $\widetilde{U}$. Si $(x_0, y_0) \in U$, $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$, $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'image par $(z,w) \mapsto (\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, w)$ du cercle de $\widetilde{U} \cap L_{(x_0,y_0),[u_0:u_1]}$ paramétré par

$$\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto \big(x_0 + i\xi_0 + ru_0\, e^{i\theta}, y_0 + i\eta_0 + ru_1\, e^{i\theta}\big) \quad (r > 0)$$

(pourvu que r soit tel que le disque fermé borné limité par ce cercle soit entièrement inclus dans le tube $\widetilde{U}$) est un segment de U de milieu le point (x_0, y_0). Dire par conséquent que, pour tout $[u_0 : u_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la restriction de $\tilde{f}$ à la composante connexe de $\widetilde{U} \cap L_{(x_0,y_0),[u_0:u_1]}$ contenant $(x_0 + i\xi_0, y_0 + i\eta_0)$ vérifie (dans cette composante connexe) la propriété de la sous-moyenne au point $(x_0 + i\xi_0, y_0 + i\eta_0)$ équivaut à dire (puisque $\tilde{f}(z,w) = f(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, w)$) que f vérifie la propriété de la sous-moyenne volumique relativement au point (x_0, y_0) : pour tout segment $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ de longueur $2\ell > 0$ inclus dans U et de milieu (x_0, y_0), on a

$$f(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\ell} \int_0^1 f\big((1-s)x_1 + sy_1, (1-s)x_2 + sy_2\big)\, ds.$$

Dire que $\tilde{f}$ est plurisous-harmonique dans $\widetilde{U}$ équivaut donc à dire que, pour toute droite affine ℓ de $\mathbb{R}^2$, la restriction de f à toute composante connexe de $\ell \cap U$ (considéré comme un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) vérifie la propriété de sous-moyenne volumique, ce qui équivaut à dire que f est convexe dans U.
2) D'après la formule de Green (appliquée séparément en les variables ζ, puis en les variables ϖ), il résulte du fait que φ est C^∞ à support compact dans $\widetilde{U}$ et que Υ est à coefficients constants que $\int_{\widetilde{U}} \tilde{f}\, i\Upsilon \wedge \bar{\Upsilon} \wedge dd^c\varphi = \int_{\widetilde{U}} \varphi\, dd^c\tilde{f} \wedge i\Upsilon \wedge \bar{\Upsilon}$. On a d'autre

1. Cet exercice correspond à l'exercice 4.5 de [**YanC**] ; un corrigé plus précis se trouve dans cet ouvrage.

part

$$dd^c f(x+i\xi, y+i\eta) =$$
$$= \frac{i}{\pi}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{dz\wedge d\bar z}{4} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,\frac{dw\wedge d\bar z + dz\wedge d\bar w}{4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\frac{dw\wedge d\bar w}{4}\Big).$$

Si $\Upsilon = \alpha\, dz + \beta\, dw$, on vérifie que

$$4\, dd^c f(x+i\xi, y+i\eta)\wedge i\Upsilon\wedge\bar\Upsilon =$$
$$= \Big(|\alpha|^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha\bar\beta)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + |\beta|^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Big)\,\frac{(idz\wedge d\bar z)\wedge(idw\wedge d\bar w)}{\pi}.$$

Comme la forme différentielle $(idz\wedge d\bar z)\wedge(idw\wedge d\bar w)$ est égale à quatre fois la forme volume sur $\mathbb{R}^4\simeq\mathbb{C}^2$, la condition requise sur $\widetilde{f}$ dans le tube $\widetilde{U}$ équivaut à la positivité de la matrice Hessienne de f au point courant (x,y) de l'ouvert U, donc à la convexité de f dans U.

Corrigé de l'exercice 1.2 [1]**.**

1) Si $\log F$ est sous-harmonique dans U, la fonction $z\mapsto \log F(z)+\lambda x+\mu y$ (qui est somme d'une fonction sous-harmonique et d'une fonction affine, donc harmonique) l'est aussi ; en composant cette fonction avec la fonction convexe croissante exp : $\mathbb{R}\to]0,+\infty[$, on en déduit que $z\mapsto F(z)\,e^{\lambda x+\mu y}$ est sous-harmonique car la composée d'une fonction sous-harmonique par une fonction convexe est encore sous-harmonique (d'après l'inégalité de Jensen en théorie de l'intégration). Réciproquement, le calcul de $\Delta[Fe^{\lambda x+\mu y}]$ au point courant de U donne

$$\Delta[Fe^{\lambda x+\mu y}](z) = e^{\lambda x+\mu y}\Big(\Delta[F](z) + \langle\Lambda, \vec\nabla\, F(z)\rangle + \|\Lambda\|^2\, F(z)\Big)$$

si l'on note $\Lambda := (\lambda,\mu)$. Si cette expression est positive en (x,y) quelque soit Λ, la multiplication par F, suivie du recours à la formule du trinôme, permet d'observer la positivité en tout point de U de

$$\Big[\big(\lambda F + \frac{\partial F}{\partial x}\big)^2 + \big(\mu F + \frac{\partial F}{\partial y}\big)^2\Big] + F\,\Delta[F] - \|\vec\nabla F\|^2.$$

Il en résulte (si l'on choisit $\Lambda=\Lambda(z)$ en tout point z de manière à annuler le premier crochet) que $F\Delta[F]-\|\vec\nabla F\|^2 = F^2\,\Delta[\log F]\geq 0$ dans U. La fonction $\log F$ est donc sous-harmonique dans U.

2) Si F est semi-continue supérieurement, il en est de même par composition pour $\log F$. Si $\log F$ est sous-harmonique dans U, $z\mapsto\log F(z)+\lambda x+\mu y$ l'est aussi (comme somme de deux fonctions sous-harmoniques) et $F=\exp(\log F)$ également (par composition avec la fonction convexe croissante exp). Pour la réciproque, on se ramène dans un premier temps au cas où $F>0$ en remplaçant F par $F+\eta$ ($\eta>0$, que l'on fera à terme tendre en décroissant vers 0_+). Soit $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ une approximation radiale de la masse de Dirac dans le plan. Si $z\mapsto F\,e^{\lambda x+\mu y}$ est sous-harmonique dans U pour tout $\Lambda\in\mathbb{R}^2$, on vérifie que $z\mapsto(F*\varphi_\epsilon)(z)\,e^{\lambda x+\mu y}$ est sous-harmonique dans $U_\epsilon := \{z\in U\,;\, d(z,\partial U)>\epsilon\}$. Il résulte alors de l'assertion établie à la question **1)** que $\log(F*\varphi_\epsilon)$ est sous-harmonique dans U_ϵ pour tout $\epsilon>0$. Comme la famille

1. Cet exercice correspond à l'exercice 4.7 de [**YanC**] ; un corrigé plus précis se trouve dans cet ouvrage.

$(\log(F * \varphi_\epsilon))_{\epsilon_0 \geq \epsilon > 0}$ est une famille de fonctions sous-harmoniques dans U_{ϵ_0} approchant $\log F$ dans cet ouvert en décroissant lorsque $\epsilon \to 0_+$ (puisque les $F * \varphi_\epsilon$, lorsque $\epsilon \to 0_+$, approchent F en décroissant), il résulte du théorème de convergence monotone de Beppo Lévi que $\log F$ (puisque toutes les fonctions $\log(F * \varphi_\epsilon)$ la vérifient) vérifie aussi la propriété de la sous-moyenne rapportée à un point arbitraire de U et est donc sous-harmonique.

3) On remarque que si $f_1, ..., f_M$ sont des fonctions holomorphes d'une variale, la fonction $\log |f|^2$ est sous-harmonique. En effet, si λ, μ sont deux nombres réels, il existe une fonction affine complexe $\varphi_a := z \mapsto az$ telle que

$$|e^{az}| = e^{\mathrm{Re}\, a\, x - \mathrm{Im}(a)\, y} = e^{\lambda x + \mu y}.$$

On a donc

$$e^{\lambda x + \mu y} \sum_{j=1}^{M} |f_j|^2 = \sum_{j=1}^{M} |e^{az}\, f_j(z)|^2.$$

Si g est une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, $|g|^2$ vérifie la formule de la sous-moyenne en tout point (on exprime que f vérifie la propriété de la moyenne, puis on prend les modules des deux membres avant de majorer le module d'une intégrale par l'intégrale du module avant d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz). D'après l'équivalence établie à la question **2**, $|g|^2$ vérifie la propriété de la sous-moyenne ; il en est de même pour $\sum_1^M |g_j|^2$. On conclut d'après l'équivalence établie à la question **2** que $\log |f|^2$ est sous-harmonique dans U. On conclut en examinant la restriction de $\log |F|^2$ à une droite complexe quelconque.

Corrigé de l'exercice 2.1.

1) L'unique idéal maximal de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n_{x,y},0}$ est l'idéal $\mathfrak{M}$ engendré par les fonctions coordonnées réelles $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$.

2) Si f est un représentant d'un élément de $\bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{M}^k$, il résulte de la formule de Taylor (par exemple avec reste intégral) que toutes les dérivées partielles à tout ordre de f par rapport aux variables $x_1, y_1, ..., x_n, y_n$ sont nulles à l'origine. La formule de Taylor avec reste intégral assure de plus que

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j\, \varphi_j + \sum_{j=1}^{n} x_j\, \psi_j$$

où les fonctions ψ_j et ψ_j sont C^∞ au voisinage de l'origine et ont aussi toutes leurs dérivées partielles à tout ordre nulles en 0 ; les germes des φ_j et des ψ_j sont donc aussi dans $\bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{M}^k$. En appliquant ceci à l'un des générateurs $(\dot{f}_1)$ de cet idéal (que l'on suppose de type fini, engendré par les $\dot{f}_j$ pour $j = 1, ..., M$), on trouve bien

$$f_1 = \sum_{j=1}^{M} u_j f_j$$

où les $\dot{u}_j$ sont des germes de fonctions C^∞ nulles en 0. Le germe $1 - \dot{u}_1$ est donc inversible et, comme

$$f_1(1 - u_1) = \sum_{j=2}^{M} u_j f_j$$

au voisinage de l'origine, les germes $\dot{f}_2, ..., \dot{f}_M$ suffisent à engendrer $\bigcap_{k\geq 1} \mathfrak{M}^k$.
3) En poursuivant comme à la question **2)**, on voit que l'on peut éliminer les générateurs les uns après les autres car ceux-ci sont tous redondants. On aboutit ainsi à une contradiction. L'idéal $\bigcap_{k\geq 1} \mathfrak{M}^k$ ne saurait être de type fini.

Corrigé de l'exercice 2.2. On utilise le recouvrement de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ par les ouverts $U_j := \{[z_0 : \ldots : z_n] \,;\, z_j \neq 0\}$. Soit j_0, j_1 une paire d'indices. Soit s_j la coordonnée locale sur E_z lorsque $z \in U_j$. On a, si $z \in U_{j_0}$:

$$E_z = \{\big(t_{j_0} z_0/z_{j_0}, ..., t_{j_0}, ..., t_{j_0}\, z_n/z_{j_0}\big) \,;\, t_{j_0} \in \mathbb{C}\}.$$

Si $z \in U_{j_1}$ avec $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$, on a

$$E_z = \{\big(t_{j_1}/z_{j_1}, ..., t_{j_1} z_{j_0}/z_{j_1}, ..., t_{j_1}, ..., t_{j_1} z_n/z_{j_1}\big) \,;\, t_{j_1} \in \mathbb{C}\}.$$

Les coordonnées locales t_{j_0} et t_{j_1} sont donc reliées par

$$t_{j_0} = t_{j_1} \frac{z_{j_0}}{z_{j_1}}.$$

On a donc

$$t_{j_1} = t_{j_0} \frac{z_{j_1}}{z_{j_0}}.$$

Le cocycle est donc donné par

$$g_{j_0,j_1}([z]) = z_{j_1}/z_{j_0} \quad : U_{j_0,j_1} \to \mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

pour tout couple $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$.

Corrigé de l'exercice 3.1.
1) On a

$$\bar\partial \log \|f\|^2 = \frac{\bar\partial \|f\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} f_j d\bar f_j}{\|f\|^2}.$$

En calculant l'action de ∂ sur cette 1-forme, on trouve

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{M} df_j \wedge d\bar f_j}{\|f\|^2} - \frac{\sum\limits_{\ell=1}^{n} \bar f_\ell df_\ell}{\|f\|^2} \wedge \frac{\sum\limits_{j=1}^{M} f_j d\bar f_j}{\|f\|^2}.$$

En multipliant par $i/(2\pi)$, on obtient bien l'expression voulue.
2) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{M} \big(|f_j|^2 |f'_\ell|^2 + |f'_j|^2 |f_\ell|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[\bar f_j f_\ell f'_j \bar f'_\ell]\big)\\
&= \|f|^2\,\|f'\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f, f'\rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

La forme est donc bien positive dans Ω.
3) Si l'on retreint cette fonction C^∞ à une droite complexe, la restriction à cette droite complexe se présente sous la forme $\log \|f\|^2$, où $f = (f_1, ..., f_M)$ est un vecteur de fonctions holomorphes en une variable sans zéros communs. D'après la question

2, c'est une fonction C^∞ de laplacien positif ou nul. C'est donc une fonction sous-harmonique. La fonction $\log \|F\|^2$ (qui est continue dans U) satisfait (d'après la formule de Green) la propriété de la sous-moyenne en tout point de U. Elle est donc pluri-sous-harmonique dans U.
4) Dans l'intersection des deux ouverts de carte $U_{j_0} := \{[z_0 : \cdots : z_n]\,;\, z_{j_0} \neq 0\}$ et $U_{j_1} := \{[z_0 : \cdots : z_n]\,;\, z_{j_1} \neq 0\}$, $0 \leq j_0 < j_1 \leq n$, les deux déterminations de cette $(1,1)$-forme ω_n diffèrent de $dd^c \log |z_{j_0}/z_{j_1}|^2$. Or, si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, $dd^c \log |f|^2 = dd^c \log(f \times \bar{f}) = (i/(2\pi))\, \partial(\bar{\partial} f/\bar{f}) = 0$ (on retrouve là le principe du rôle « fantôme » des coordonnées complexes locales anti-holomorphes $\bar{z}_1, ..., \bar{z}_n$ en géométrie complexe, leitmotif de ce cours). On a donc, en revenant aux coordonnées affines ζ_1, ζ_2 (dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$), $dd^c \log |z_{j_0}/z_{j_1}|^2 = 0$ dans $U_{j_0} \cap U_{j_1}$. La forme ω_n est donc bien globalement définie.
5) En coordonnées locales $\zeta_1 = z_1/z_0, ..., \zeta_n = z_n/z_0$ dans l'ouvert U_0, on a

$$dd^c \log(1 + |\zeta|^2) = \frac{i}{2\pi} \partial \Big(\frac{\sum_{j=1}^n \zeta_j \, d\bar{\zeta}_j}{(1 + \|\zeta\|^2)} \Big)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \Big(\frac{\sum\limits_{\ell=1}^n \sum\limits_{j=1}^n d\zeta_\ell \wedge d\bar{\zeta}_j}{(1 + \|\zeta\|^2)} - \frac{\big(\sum_{\ell=1}^n \bar{\zeta}_\ell \, d\zeta_\ell\big) \wedge \big(\sum_{j=1}^n \zeta_j d\bar{\zeta}_j\big)}{(1 + \|\zeta\|^2)^4} \Big)$$

On a ainsi

$$h_{j,j} = \frac{(1 + \|\zeta\|^2) - |\zeta_j|^2}{2\pi(1 + \|\zeta\|^2)^2}, \qquad h_{j,k} = -\frac{\bar{\zeta}_j \zeta_k}{2\pi(1 + \|\zeta\|^2)^2} \quad (1 \leq j < k \leq n).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que la matrice dont les $h_{j,k}$ sont les entrées est hermitienne positive (de plus non dégénérée). On induit bien ainsi une métrique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. Ce que l'on a fait pour la carte U_0 se repète (vu la symétrie de l'expresion de ω_n en les coordonnées homogènes) dans une carte U_j $(j = 0, ..., n)$ quelconque de l'atlas.
6) On a

$$\omega_1 = \frac{1}{2i\pi} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{r \, dr \, d\theta}{(1 + r^2)^2}$$

(en coordonnées polaires). L'intégration en coordonnées polaires sur $]0, +\infty[\times[0, 2\pi]$ donne immédiatement que l'intégrale sur $\mathbb{C}$ de ω_1 vaut 1. Comme la mesure de Lebesgue de $\{[z_0 : z_1]\,;\, z_0\}$ est nulle dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (il s'agit d'un point, le point à l'infini), l'intégrale de ω_1 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vaut 1.
7) La formule à établir résulte d'un calcul immédiat. Si l'on exprime la forme obtenue en coordonnées polaires $(r_1, \theta_1, ..., r_n, \theta_n)$, on trouve :

$$\frac{n!}{(2\pi)^n (1 + r^2)^{n+1}} \bigwedge_{j=1}^n (dr_j^2 \wedge d\theta_j).$$

On remarque (par exemple par récurrence) que

$$n! \int_{[0,\infty[^n} \frac{du_1 \dots du_n}{(1 + u_1 + \cdots + u_n)^{n+1}} = 1.$$

Ceci prouve que l'intégrale sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de $\omega_n^{\wedge^n}$ (qui est une forme volume) vaut 1 puisque l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus U_0$ est de mesure de Lebesgue n-dimensionnelle nulle dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Remarque. On aurait pu dans cette question utiliser les relations établis dans l'exemple 1.1 reliant la forme volume $\omega_n^{\wedge^n}$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ à la forme de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^{n+1}$; le recours par exemple à la relation (1.5) aurait permis une preuve plus conceptuelle du fait que $\omega_n^{\wedge^n}$ est bien une forme volume normalisée sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Corrigé de l'exercice 3.2.

1) On peut exprimer f sous la forme $f = \sum_{k\geq\mu} P_k$, où P_k est une fonction polynomiale homogène de degré k, la série $(P_k)_{k\geq\mu}$ étant normalement convergente dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$; ceci résulte de la formule de Taylor. Soit $\gamma_n = (\gamma_{n,1}, ..., \gamma_{n,n})$ un vecteur de $\mathbb{C}^n \setminus \{(0, ..., 0)$ tel que $P_\mu(\gamma_n) \neq 0$ (il existe au moins un tel vecteur du fait que $P_\mu \not\equiv 0$ et l'on peut même choisir ce vecteur γ_n génériquement dans $\mathbb{C}^n$). On peut (toujours génériquement) choisir des vecteurs $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ de manière à ce que $\det(\gamma_1, ..., \gamma_n) \neq 0$ d'après le théorème de la base incomplète. Si A est la matrice dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, les vecteurs $\gamma_1, ..., \gamma_n$, on a

$$P_\mu(Aw) = P_\mu(\gamma_n)\, w_n^\mu + \sum_{j=1}^{\mu} P_{\mu,j}(w_1, ..., w_{n-1})\, w_n^{\mu-j},$$

où $P_{\mu,j}$ est un polynôme homogène de degré j.
Soit $g\ : w \mapsto f(Aw)$; on a $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_w,0}$. Comme $f = \sum_{k\geq\mu} P_k$ et que P_k est homogène de degré k, on peut écrire au voisinage de $\varpi = 0$ (dans $\mathbb{C}$)

$$g(0, ..., 0, \varpi) = P_\mu(\gamma_n)(\varpi^\mu + o(\varpi^\mu)).$$

Il existe donc $r_n > 0$ tel que $\zeta \mapsto g(0, ..., 0, \varpi)$ soit holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0, r_n)}$ et que 0 soit le seul zéro de cette fonction dans ce disque.
D'après le théorème de Rouché [1], si $r_1 > 0, ..., r_{n-1} > 0$ sont tels que

$$\max_{|\varpi|=r_n} |g(w_1, ..., w_{n-1}, \varpi) - g(0, ..., 0, \varpi)| < \min_{|\varpi|=r_n} |g(0, ..., 0, \varpi)| = \eta > 0$$

dès que $|w_1| < r_1, ..., |w_{n-1}| < r_{n-1}$,

la fonction holomorphe

$$\varpi \longmapsto g(w', \varpi) \quad \big(w' := (w_1, ..., w_{n-1})\big)$$

(où $|w_1| < r_1, ..., |w_{n-1}| < r_{n-1}$) a exactement μ zéros $\xi_{w'}^{[1]}, ..., \xi_{w'}^{[\mu]}$ (répétés ici avec leur multiplicités s'ils s'avèrent zéros multiples) dans $\overline{D(0, r_n)}$, aucun de ces zéros ne

1. Ce théorème est avant tout un théorème topologique que l'on peut illustrer de manière concrète ainsi (suivant George Polya) : Soit un maitre promenant son chien au bout d'une laisse autour d'un rond-point de rayon r qu'il n'est pas autorisé à piétiner (la longueur ℓ de la laisse tendue étant strictement inférieure au rayon r du rond-point) ; si le maitre et son chien, initialement positionnés respectivement en des points $\mathrm{Pos}_{\mathrm{maitre}}$ et $\mathrm{Pos}_{\mathrm{chien}}$ se retrouvent, après s'être déplacés continuement, respectivement aux mêmes points $\mathrm{Pos}_{\mathrm{maitre}}$ et $\mathrm{Pos}_{\mathrm{chien}}$, ils ont nécessairement effectué tous les deux le même nombre de tours (compté algébriquement, une fois le plan orienté trigonométriquement comme d'habitude) autour du centre du rond-point. Ce résultat géométrique, en apparence tout-à-fait naturel et intuitif, n'en implique pas moins le théorème de d'Alembert, théorème fondamental de l'algèbre. C'est donc en fait un résultat capital en topologie et en analyse complexe d'une variable.

se situant sur le bord de ce disque fermé. Les *sommes de Newton*

$$S_k[w'] = \sum_{\ell=1}^{\mu} (\xi_{w'}^{[\ell]})^k, \quad k = 1, ..., \mu$$

de ces racines s'expriment grâce au théorème des résidus (on note ici γ_{r_n} le chemin paramétré $\gamma_{r_n} \ : t \in [0,1] \mapsto r_n e^{2i\pi t}$) :

$$S_k[w'] = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{r_n}} \varpi^k \, \frac{\partial g}{\partial \varpi}(w', \varpi) \, \frac{d\varpi}{g(w', \varpi)} \quad (|w_1| < r_1, ..., |w_{n-1}| < r_{n-1}).$$

Le théorème (de Lebesgue *via* convergence dominée) d'holomorphie des intégrales dépendant de $n-1$ paramètres complexes (la dépendance de l'intégrant étant holomorphe en ces paramètres) assure que les fonctions

$$(w_1, ..., w_{n-1}) \longmapsto S_k[w'], \quad k = 1, ..., \mu,$$

sont holomorphes dans le polydisque $\{|w_j| < r_j \, ; \, j = 1, ..., n-1\}$. Il en est de même des k *fonctions symétriques élémentaires* $w' \mapsto \sigma_k[w']$ $(k = 1, ..., \mu)$ des racines $\xi_{w'}^{[\ell]}$ $(\ell = 1, ..., \mu)$ puisque l'on sait que ces fonctions σ_k s'expriment à partir des S_k grâce aux relations de Newton :

$$\sigma_1 = S_1, \ S_1^2 = \sigma_1^2 = S_2 + 2\sigma_2, \ \text{etc.}$$

On pose $\xi_\ell(w') = (-1)^\ell \sigma_\ell[w']$ pour $\ell = 1, ..., \mu$ et on introduit la fonction Ξ holomorphe dans le polydisque $D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_n)$:

$$\Xi \ : (w_1, ..., w_n) = (w', w_n) \longmapsto w_n^\mu + \sum_{\ell=1}^{\mu} \xi_\ell(w') \, w_n^{\mu-\ell}.$$

Pour chaque w' dans $D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_{n-1})$, la fonction

$$w_n \in D(0, r_n) \longmapsto \frac{g(w', w_n)}{\Xi(w', w_n)}$$

est une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans $D(0, r_n)$.
Le principe du maximum assure aussi que la fonction

$$(w', w_n) \longmapsto \frac{g(w', w_n)}{\Xi(w', w_n)}$$

est localement bornée dans le polydisque $D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_n)$. Le théorème de Riemann (assurant que les singularités isolées d'une fonction holomorphe borné dans un ouvert de $\mathbb{C}$ sont éliminables) entraine que

$$(w', w_n) \longmapsto f(w', w_n)/\Xi(w', w_n)$$

se prolonge à tout le polydisque $D(0, r_1) \times \cdots \times D(0, r_n)$ en une fonction localement bornée et séparément holomorphe en chaque variable $w_1, ..., w_n$. C'est donc une fonction holomorphe en $(w_1, .., w_n)$ dans le polydisque. De plus, cette fonction, on l'a vu, ne s'annule pas dans ce polydisque. C'est la fonction $w \mapsto u(w)$ que l'on souhaitait faire apparaitre. On a bien la factorisation $f(Aw) = u(w) \, \Xi(w', w)$ voulue au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.
La valuation de ξ_ℓ en 0 est au moins égale à ℓ puisque celle de f (donc de $w \mapsto f(Aw)$) en $(0, ..., 0)$ vaut exactement μ.

2) Comme f est supposé irréductible dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_z,0}$, $w \mapsto f(Aw)$ l'est aussi dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n_w,0}$ et le polynôme

$$P(X) = X^\mu + \sum_{\ell=1}^{\mu} \xi_\ell \, X^{\mu-\ell} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}_{w'},0}[X]$$

est par conséquent irréductible dans $\mathcal{M}_{\mathbb{C}^{n-1}_{w'},0}[X]$, où $\mathcal{M}_{\mathbb{C}^{n-1}_{w'},0}$ ($\mathcal{M}$ pour « méromorphe ») désigne le corps des fractions de l'anneau local intègre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}_{w'},0}$. Le résultant de Sylvester de P et P' est donc un élément non nul δ de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1}_{w'},0}$. La projection

$$\pi \ : w \in \big(D(0,r_1) \times \cdots \times D(0,r_n)\big) \cap \{f(Aw) = 0\} \longmapsto w' \in D(0,r_1) \times \cdots \times D(0,r_{n-1})$$

est surjective propre du fait que $f(Aw) = 0$ équivaut à

$$w_n^\mu + \sum_{\ell=1}^{\mu} \xi_\ell(w') \, w_n^{\mu-\ell} = 0$$

(voir la question **1**). Si $\delta(w_0') \neq 0$, il résulte du théorème des fonctions implicites que les μ racines de $\varpi \mapsto \Xi(w', \varpi)$ sont distinctes et dépendent chacune holomorphiquement de w' lorsque w' est voisin de w_0'. La projection π réalise donc bien un revêtement à μ feuillets, chaque feuille se présentant localement comme une variété analytique complexe de dimension $n-1$ (une « hypersurface lisse ») au voisinage d'un point (w', w_n) tel que $\delta(w') \neq 0$. Au dessus d'un zéro w_0' de δ, deux au moins de ces feuillets sont susceptibles de se rencontrer. L'ensemble $\pi^{-1}(\{\delta = 0\})$ est dit *lieu de ramification* du revêtement.

Corrigé de l'exercice 3.3. On note A le sous-ensemble analytique fermé de codimension $k > p$ tel que $\operatorname{Supp} T \subset A$. Le sous-ensemble $A^{\rm sing}$ est un sous-ensemble analytique fermé de $\mathcal{X}$ de codimension $\geq k+1$. On va montrer que

$$\operatorname{Supp} T \subset A \Longrightarrow \operatorname{Supp} T \subset A^{\rm sing}. \tag{$*$}$$

Si on y parvient, on aura donc en itérant :

$$\operatorname{Supp} T \subset A \subset A^{\rm sing} \subset (A^{\rm sing})^{\rm sing} \subset \dots .$$

Le support de T est ainsi contenu dans un sous-ensemble analytique fermé de codimension $k+\ell$, $\ell = 0, 1, 2, ...$; comme ℓ est arbitraire, on a $\operatorname{codim}(\operatorname{Supp} T) = +\infty$. On en déduit $\operatorname{Supp} T = \emptyset$ ou encore $T \equiv 0$. Montrons donc ($*$). On doit montrer que T est identiquement nul au voisinage de tout point régulier a de A ; au voisinage d'un tel point (A est une variété analytique complexe de dimension complexe k au voisinage d'un tel point), on peut supposer, quitte à bien choisir les coordonnées locales, que $A = \{z' \in U_z \, ; \, z'_{k+1} = \cdots = z'_n = 0\}$. Pour tout $j = k+1, ..., n$, on a

$$dz_j \wedge dT = d[T \, dz_j] - z_j \, dT \quad (j = k+1, ..., n).$$

Comme T et dT sont par hypothèses à coefficients-mesures et que z_j ($j = k+1, ..., n$) est nulle sur le support de T, on a

$$dz_j \wedge T = 0, \quad j = k+1, ..., n$$

au voisinage de a. Si

$$\varphi = \sum_{\#I'=n-p} \sum_{\#J'=n-q} \varphi_{I',J'} \, dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}$$

est une $(n-p, n-p)$-forme au voisinage de a, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{\#I'=p} \sum_{\#J'=p} \int_{\mathcal{X}} T \wedge \varphi_{I',J'} \, dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}.$$

Commre la longueur de chaque $dz_{I'}$ est égale à $n-p$ et que $k > p$, un des dz_j (pour $j = k+1, ..., n$, par exemple $dz_{j_{I'}}$) doit être présent dans un $dz_{I'}$ de longueur $n-p$ (comme forme différentielle) ; la contribution de chaque terme

$$\int_{\mathcal{X}} T \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}$$

est donc nulle car $T \wedge dz_{j_{I'}} = 0$. On en déduit que $T \equiv 0$ au voisinage de a. Le support de T évite donc tous les points réguliers de A ; on a donc

$$\operatorname{Supp} T \subset A^{\text{sing}}.$$

On conclut donc, comme on l'a vu, puisque ceci s'itère, que $T \equiv 0$.

Bibliographie

[ASWY] M. Andersson, H. Samuelsson, E. Wulcan, A. Yger, Segre numbers, a generalized King's formula, and local intersections, à paraitre dans J. Reine Angew. Math, 2014, arxiv.org/pdf/1009.2458.pdf.

[Bern] I. N. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Functional Analysis and its applications **6** (1972), pp. 273-285. J. E. Björk, *Rings of of differential operators*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[Bor] A. Borel et al, Algebraic D-modules, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1987.

[CDKV] E.M. Chirka, P. Dolbeault, G.M. Kenkhin, A.G. Vitusshkin, *Introduction to Complex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.

[CLD] A. Chambert-Loir, A. Ducros, Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich, *preprint*, 2012, available on line : arXiv:1204.6277v1

[CLO1] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics 135, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[De0] J. P. Demailly, *Complex Analytic and Differential Geometry*, disponible en ligne sur http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼demailly/manuscripts/agbook.pdf

[De1] J.P. Demailly,Courants positifs et théorie de l'intersection, Gaz. Math. **53** (1992), pp. 131–159.

[De2] J.P. Demailly, Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge, Inventiones math. 69, pp. 347–374, 1982.

[Eis] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer Verlag, 1995.

[GH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Blackwell, 1994.

[GR] H.Grauert, R. Remmert, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren Math. Wiss. vol.265, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gyo] A. Gyoja, *Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), no. 2, pp. 399–411.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, 8th edition, Springer, 1997.

[Ka] M. Kashiwara, *$B-$functions and holonomic systems*, Inventiones Math. **38** (1976/77), no. 1, pp. 33–53.

[Lag1] A. Lagerberg, Super currents and tropical geometry, Math. Z. 270 (2012), no. 3-4, 1011-1050, disponible en ligne sur arXiv:1008.2856.

[Lang0] S. Lang, *Algebra*, S. Lang, *Algebra*, Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lang] S. Lang, *Introduction to Arakelov theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Lel] P. Lelong, *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New-York, 1968.

[Licht] B. Lichtin, *Generalized Dirichlet series and B-functions, Compositio Math.* **65** (1988), pp. 81–120.

[Rud] W. Rudin, Real and Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1986 (aussi en français chez Dunod : Analyse réelle et complexe, 1998).

[Sab] C. Sabbah, *Proximité évanescente II, Equations fonctionelles pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math **64** (1987), no. 2, pp. 213-241.

[Schw] L. Schwartz, division par une fonction holomorphe sur une variété analytique quelconque, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol 2 (9), 1955, pp. 181-209.

[Ser] J. P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier **6**, (1956) pp. 1–42.

[VdW] B. L. Van der Waerden, *Algebra*, Springer-Verlag, New-York, 1959.

[YanC] A.Yger, *Analyse Complexe, un regard analytique et géométrique*, Collection Références Sciences, éditions Ellipses, Paris, 2014.

[YBraz] A. Yger, Éléments d'Algèbre commutative et de Géométrie Complexe, cours de Master 2, Université Marien Nouagbi de Brazzaville, Septembre 2014.

[Ydist] A. Yger, Distributions, notes d'un cours de Master 1, en ligne sur le site `web DEA2015` dédié au cours.

[YNiam] A. Yger, Géométrie différentielle complexe, disponible en ligne sur `http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/67/65/74/PDF/Cours-Niamey.pdf` ou aussi sur le site `web` dédié au cours.