Université Bordeaux 1
Département de licence
U.F.R. Mathématiques et Informatique

Mathématiques de base
Fascicule d'Annales, Année 2005-2006

Semestre d'orientation MISMI, cours MIS101

Table des matières

Première partie

Textes de Devoirs surveillés

D.S. 1

29 Octobre 2005 – 8h30–9h50

Barème indicatif : $3 + 3 + 2 + 4 + 4 + 4$

Problème 1. (1) [Cours] Donner la définition d'une application injective, et la définition d'une application surjective.

(2) Donner un exemple d'application injective, mais pas surjective.

(3) Donner un exemple d'application surjective, mais pas injective.

Problème 2. (1) [Cours] Donner les tableaux de vérité des connecteurs logiques $\wedge$ (« et »), $\vee$ (« ou »), $\Rightarrow$ (« implique ») et $\neg$ (« non »).

(2) Donner le tableau de vérité de l'expression

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q.$$

Problème 3. Énoncer la formule du binôme pour $(x + y)^5$.

Problème 4. (1) Calculer le pgcd d de $a = 1045$ et $b = 1900$.

(2) Trouver des entiers u, v tels que $au + bv = d$.

Problème 5. Montrer par récurrence sur n que

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(2n + 1)(2n + 3)}{3}$$

pour $n \geq 0$.

Problème 6. On considère les sous-ensembles suivants de nombres réels :

$$X_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < 2^n x < 3\}$$

pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que X_n est un intervalle, déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de X_n. Placer sur un dessin X_1, X_2, X_3.

(2) On considère l'ensemble X qui est la réunion de tout les X_n pour $n \geq 1$. Montrer que X est un ensemble majoré par 2 et minoré par 0.

(3) Montrer que la borne supérieure de X est $3/2$ et que $3/2 \notin X$.

(4) Soit $a > 0$ tel que $a < 1/2$. Montrer que a n'est pas un minorant de X. En déduire que la borne inférieure de X est égale à 0.

CORRIGE du DS1

Problème 1. (1) [Cours] Une application $f : X \to Y$ est *injective* si :

$$\forall\ (x_1, x_2) \in X \times X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(des éléments différents de X ont des images différentes par f).

Une application $f : X \to Y$ est *surjective* si :

$$\forall\ y \in Y,\ \exists x \in X,\ f(x) = y$$

(tout élément de Y est l'image par f d'au moins un élément de X).

(2) L'application

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$$

est injective (car $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$), mais non surjective car $e^x > 0$ pour tout x.

(3) L'application

$$f\ :\ \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$$

est surjective (car pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $x = f((x, 0)))$ mais non injective (car $f((2, 0)) = f((2, 1))$ par exemple).

Problème 2. (1) [Cours] Les tableaux de vérité sont

P ∧ Q	Q=f	Q=v
P=f	f	f
P=v	f	v

P ∨ Q	Q=f	Q=v
P=f	f	v
P=v	v	v

P ⇒ Q	Q=f	Q=v
P=f	v	v
P=v	f	v

	¬P
P=f	v
P=v	f

(2) Le tableau de vérité de l'expression

$$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow Q$$

est

	Q=f	Q=v
P=f	v	v
P=v	v	v

Par exemple, quand $P = v$ et $Q = f$, $P \wedge Q = f$, $\neg P \wedge Q = f$, $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) = f$, d'où le résultat dans ce cas.

Problème 3. La formule du binôme pour $(x + y)^5$ est

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5,$$

les coefficients pouvant être trouvés à l'aide du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{l}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1
\end{array}$$

Problème 4. (1) Soit $a = 1045$ et $b = 1900$. L'algorithme d'Euclide fournit, en soulignant les restes successifs :

$$\begin{aligned}
\underline{1045} &= 0 \cdot \underline{1900} + \underline{1045} \\
\underline{1900} &= 1 \cdot \underline{1045} + \underline{855} \\
\underline{1045} &= 1 \cdot \underline{855} + \underline{190} \\
\underline{855} &= 4 \cdot \underline{190} + \underline{95} \\
\underline{190} &= 2 \cdot \underline{95} + \boxed{0}
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $d = 95$, le dernier reste non nul.

(2) Pour déterminer une solution (u, v) de $d = au + bv$, on remonte l'algorithme à l'envers :

$$\begin{aligned}
\boxed{95} &= \underline{855} - 4 \cdot \underline{190} \\
\boxed{95} &= \underline{855} - 4 \cdot (\underline{1045} - 1 \cdot \underline{855}) \\
&= 5 \cdot \underline{855} - 4 \cdot \underline{1045} \\
\boxed{95} &= 5 \cdot (\underline{1900} - \underline{1045}) - 4 \cdot \underline{1045} \\
&= 5 \cdot \underline{1900} - 9 \cdot \underline{1045}.
\end{aligned}$$

donc $u = -9$, $v = 5$ conviennent.

Problème 5. Soit $P(n)$ l'assertion :

$$\text{«}1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}\text{»}$$

Pour $n = 0$ on a

$$1 = (2 \cdot 0 + 1)^2 = \frac{(0+1)(2 \cdot 0 + 1)(2 \cdot 0 + 3)}{3},$$

ce qui montre que $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ est vraie, où $n \geq 0$ est un entier. On a alors

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 + (2(n+1)+1)^2 &= 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2
\end{aligned}$$

(en utilisant $P(n)$, vraie par hypothèse)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)+3(2n+3)^2}{3}\\
&= \frac{(2n+3)\{(n+1)(2n+1)+3(2n+3)\}}{3}\\
&= \frac{(2(n+1)+1)\{2n^2+3n+1+6n+9\}}{3}\\
&= \frac{(2(n+1)+1)\{2n^2+9n+10\}}{3}\\
&= \frac{(2(n+1)+1)\{(n+2)(2n+5)\}}{3}\\
&= \frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Cela montre que $P(n+1)$ est alors valide. Donc, par récurrence sur $n \geq 0$, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Problème 6. On considère les sous-ensembles suivants de nombres réels :

$$X_n = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < 2^n x < 3\}$$

pour $n \geq 1$.

(1) En utilisant les règles pour l'ordre, on a

$$X_n = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{2^n} < x < \frac{3}{2^n}\} = \left]\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right[,$$

qui est bien un intervalle. La borne supérieure d'un intervalle du type $]a, b[$ (ou $[a, b]$) est égale à b et sa borne inférieure à a, donc

$$\sup X_n = \frac{3}{2^n}, \qquad \inf X_n = \frac{1}{2^n}.$$

Le dessin de $X_1 =]1/2, 3/2[$, $X_2 =]1/4, 3/4[$ et $X_3 =]1/8, 3/8[$ est laissé au lecteur...

(2) Soit X la réunion de tout les X_n pour $n \geq 1$. Pour montrer que 2 est un majorant de X, il faut montrer que

$$\forall\, x \in X,\ x \leq 2.$$

Soit donc $x \in X$. D'après la construction de X, il existe $n \geq 1$ tel que $x \in X_n =]1/2^n, 3/2^n[$. On a alors $x \leq 3/2^n$. Comme $n \geq 1$, on voit que $3/2^n \leq 3/2 \leq 2$, et on a donc bien vérifié l'assertion demandée.

De même, pour montrer que 0 est un minorant de X, il faut montrer que

$$\forall\, x \in X,\ 0 \leq x.$$

Mais il est encore évident que tout élément de X_n, $n \geq 1$, est strictement positif, donc cette assertion est correcte.

(3) Pour montrer que $\sup X = 3/2$, il faut montrer que $3/2$ est un majorant de X, et que si $\alpha < 3/2$ est un réel quelconque, alors α n'est pas un majorant de X.

Pour le premier point, on procède comme à la question précédente : on y a, en effet, montré que si $x \in X$, il existe $n \geq 1$ tel que $x < 3/2^n$, donc $x < 3/2$ dans tout les cas. Ainsi $3/2$ est bien un majorant de X.

Soit maintenant $\alpha < 3/2$ arbitraire. Si $\alpha \leq 1/2$, α n'est pas un majorant de X car, par exemple $\alpha < 1 \in X_1 =]1/2, 3/2[$ (donc $x \leq \alpha$ pour tout $x \in X$ est faux).

Si $1/2 < \alpha < 3/2$, on a $\alpha \in X_1$, mais alors $\beta = (3/2 + \alpha)/2$, le milieu du segment entre α et $3/2$, est encore dans X_1, et vérifie $\beta > \alpha$. Là encore, on voit que α n'est pas un majorant de X.

On a donc vérifié que $\sup X = 3/2$. Dans la première étape on a même observé que $x \in X$ implique $x < 3/2$, donc $3/2 \notin X$.

(4) Soit $a > 0$ tel que $a < 1/2$. Si $n \geq 1$ est un entier assez grand, on a $1/2^n < a$: il suffit en effet de choisir $n > \ln(1/a)/\ln(2)$, ce qui est possible car $1/a > 0$. On a alors $1/2^n \in X_{n+1} =]1/2^{n+1}, 3/2^{n+1}[$ (c'est le milieu de X_{n+1}) donc $1/2^n$ est un élément de X qui est $< a$, ce qui montre que a ne minore pas X.

Comme de plus on sait que 0 est un minorant de X, que de plus si $a \geq 1/2$, on a $1/4 < a$ et $1/4 \in X_3 \subset X$ (donc a n'est pas non plus un minorant), on a bien montré que 0 est la borne inférieure de X.

D.S. 2
10 décembre 2005

Barême indicatif : $4+4+4+4+4$

Problème 1.
(1) Calculer dans $\mathbf{C}$ les racines quatrièmes de $z = 8i$.
(2) Les porter sur un graphique et préciser la figure géométrique ayant pour sommets les racines.

Problème 2.
Etudier les limites suivantes :
(1) $\lim_{n\to+\infty} \; -\frac{4}{(n+1)^2}(n^2-n-2)$
(2) $\lim_{x\to 3} \; \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}$
(3) $\lim_{x\to-\infty} \; \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{4x^2+1}}$
(4) $\lim_{x\to 1} \; \frac{x^3}{x-1} e^{\frac{1}{x(1-x)}}$

Problème 3.
(1) Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$, expliciter avec des quantificateurs le fait que f soit continue en un point x_0 de $\mathbf{R}$.
(2) Demontrer l'implication : f dérivable en $x_0 \Longrightarrow$ f continue en x_0

Problème 4.
(1) Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{tgx}{cos^2 x} dx$.
(2) Par changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer $\int_{Ln2}^{Ln5} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}} dx$ où Ln est la fonction logarithme néperien.

Problème 5.
Trouver sur $]0, +\infty[$ la solution du problème de Cauchy $y' = \frac{1}{x}y - x^2$ avec $y(1) = -\frac{1}{2}$,

Deuxième partie

Texte de l'examen de session 1

ANNÉE 2005-2006 SESSION DE JANVIER 2006

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 5/01/2006 Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Définir l'image directe $f(A)$ d'un sous-ensemble A de X et l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble B de Y.

I.b. Montrer que si f est une application injective de X dans Y, on a $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout sous-ensemble A de X.

Série de questions II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

II.a. Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

II.b. Écrire à l'aide de quantificateurs (et sans faire intervenir le symbole de négation $\neg$) l'assertion : "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$".

II.c. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'assertion

$$\exists N \geq 1\,,\ \forall n \geq N\,,\ \forall M \in \mathbb{N}\,,\ |u_n - 2| \leq 10^{-M}\,,$$

alors $u_n = 2$ pour tout n assez grand.

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a la formule

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. À l'aide des formules d'Euler, calculer $\sin^3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\sin(3\theta)$ lorsque θ est un nombre réel.

1.b. Montrer (en utilisant le résultat établi au **1.a**) que $\alpha = \sin(\pi/9)$ est une solution de l'équation

$$8X^3 - 6X + \sqrt{3} = 0\,. \qquad (*)$$

1.c. Calculer, en vous aidant encore du résultat établi au **1.a**,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\, d\theta\,.$$

Exercice 2.

2.a. Comment la fonction Arctan ("Arctangente") est elle liée à la fonction "tangente" (tan) ? Quel est le domaine de définition de la fonction Arctan ? La fonction Arctan est-elle dérivable sur tout son domaine de définition ? Si oui, calculer sa dérivée.

2.b. Exprimer en termes de fonctions classiques (fonctions polynomiales et prise de racine carrée) les fonctions

$$\begin{array}{rcl} x & \longmapsto & \cos(\operatorname{Arctan} x) \\ x & \longmapsto & \sin(\operatorname{Arctan} x) \end{array}$$

après avoir précisé leurs domaines respectifs de définition. Calculer ensuite les dérivées de ces deux fonctions.

2.c. Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\tan^2 x)\, \cos^2 x} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exercice 3.

3.a. Soit $a \geq 1$ un entier ; montrer que si a^3 est divisible par 3, alors a est divisible par 3.

3.b. On suppose que l'entier a n'est pas divisible par 3 ; quelles sont les valeurs possibles pour le reste dans la division euclidienne de a par 3 ?

3.c. Trouver, lorsque $a = 1001$, un couple d'entiers (u, v), $u, v \in \mathbb{Z}$, tel que $1 = au + 3v$.

Exercice 4.

4.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que la recherche d'une primitive F_n de la fonction

$$f_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \log(1 + x^2)$$

se ramène à celle de la recherche d'une primitive G_n de la fonction

$$g_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^{n+2}}{1 + x^2}$$

(on donnera explicitement la formule permettant d'exprimer une primitive F_n de f_n en fonction d'une primitive G_n de g_n).

4.b. En utilisant l'identité $x^4 = 1 + (1 + x^2)(x^2 - 1)$, déduire de **4.a** une primitive de la fonction g_2, puis de la fonction f_2.

Exercice 5.

Soient R, L, c trois nombres strictement positifs (R pour "résistance", L pour "inductance", c pour "capacité", le modèle sous-jacent étant celui d'un circuit électronique RLC couplant une résistance R, un condensateur de capacité c et une bobine d'inductance L). On suppose que les paramètres sont ajustés pour que $R^2c^2 - 4Lc$ soit un nombre réel strictement négatif que l'on écrit donc sous la forme $R^2c^2 - 4Lc = -\omega^2$ avec $\omega = \sqrt{4Lc - R^2c^2} > 0$.

5.a. Exprimer en fonction de R, L, c, ω l'unique fonction $y \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que

$$L\,c\,y''(t) + R\,c\,y'(t) + y(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. La fonction y a-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $+\infty$ (si oui préciser la valeur de cette limite) ? A-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $-\infty$?

5.b. On choisit des valeurs numériques pour les paramètres R, L, c, à savoir : $R = L = 2, c = 1$. Donner explicitement l'unique fonction $y \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que

$$2y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \exp(-t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6.

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation

$$2x + 4y - 2z = 2\,,$$

On considère aussi (toujours dans $\mathbb{R}^3$) la droite D_m d'équations

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 12y & - & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}$$

(m étant un paramètre dont la droite dépend).

Chercher (suivant les valeurs de m) les points (x, y, z) d'intersection de P et de D_m ; on posera le système linéaire à 3 inconnues vérifié par les coordonnées de ces points, puis on résoudra ce système par la méthode du pivot.

Troisième partie

Corrigé de l'examen de session 1

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 5/01/2006 Durée : 3h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

I.a. *Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Définir l'image directe $f(A)$ d'un sous-ensemble A de X et l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble B de Y.*

$$f(A) = \{f(x)\ ,\ x \in A\} \qquad f^{-1}(B) = \{x \in X\ ,\ f(x) \in B\}$$

I.b. *Montrer que si f est une application injective de X dans Y, on a $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout sous-ensemble A de X.*

Soit f injective, on a alors $x \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow \exists y \in A, f(y) = f(x)$.
Grâce à l'injectivité de f, la dernière assertion implique que $x = y$ et donc que $x \in A$, la réciproque étant triviale.
On a donc bien $f^{-1}(f(A)) = A$.

Série de questions II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

II.a. *Écrire à l'aide de quantificateurs l'assertion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$$

II.b. *Écrire à l'aide de quantificateurs (et sans faire intervenir le symbole de négation $\neg$) l'assertion : "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$".*

C'est la négation de l'assertion précédente :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |u_n - 2| \geq \varepsilon$$

II.c. *Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'assertion*

$$\exists N \geq 1\ ,\ \forall n \geq N\ ,\ \forall M \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - 2| \leq 10^{-M}\ ,$$

alors $u_n = 2$ pour tout n assez grand.

Soit $1 > \varepsilon > 0$. On a, pour $M > -\frac{\log \varepsilon}{\log 10}$,et pour $n \geq N$, $|u_n - 2| < \varepsilon$
donc $\forall n \geq N, |u_n - 2|$ est la borne inférieure de $]0; 1[$ donc $\forall n \geq N, u_n = 2$

Série de questions III

III.a. *Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.*

cf. cours

III.b. *Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a la formule*

$$(F_n) \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2}\ .$$

– $\sum\limits_{k=2}^{2} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{2(2^2-1)^2} = 1/18$ et $\frac{1}{16} - \frac{1}{42^2(2+1)^2} = 1/16 - 1/144 = 1/18$ donc (F_2) est vraie .

– Si (F_n) est vraie alors $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)((n+1)^2-1)^2}$
Or $\frac{1}{(n+1)((n+1)^2-1)^2} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2(n+1)}\left(\frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{4(n+1)}\right) = -\frac{1}{4(n+1)^2(n+2)^2}$ et donc (F_{n+1}) est vraie.
– (F_2) est vraie et $(F_n) \Rightarrow (F_{n+1})$ donc d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, on a la formule $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{4n^2(n+1)^2}$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

1.a. *À l'aide des formules d'Euler, calculer* $\sin^3\theta$ *en fonction de* $\sin\theta$ *et* $\sin(3\theta)$ *lorsque* θ *est un nombre réel.*
On utilise la formule d'Euler pour le sinus puis la formule du binôme.

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{(2i)^3} = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

1.b. *Montrer (en utilisant le résultat établi au* **1.a***) que* $\alpha = \sin(\pi/9)$ *est une solution de l'équation*

$$8X^3 - 6X + \sqrt{3} = 0\,. \qquad (*)$$

$8\alpha^3 - 6\alpha + \sqrt{3} = -2\sin(3\pi/9) + 6\sin(\pi/9) - 6\sin(\pi/9) + \sqrt{3} = -2\sqrt{3}/2 + \sqrt{3} = 0$ donc α est solution de $(*)$

1.c. *Calculer, en vous aidant encore du résultat établi au* **1.a,** $\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\,d\theta$.
$\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta\right)\,d\theta = \left[\frac{1}{4}\frac{\cos 3\theta}{3} - \frac{3}{4}\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = -1/12 + 3/4 = 2/3$

Exercice 2.

2.a. *Comment la fonction* Arctan *("Arctangente") est elle liée à la fonction "tangente" (*tan*) ? Quel est le domaine de définition de la fonction* Arctan *? La fonction* Arctan *est-elle dérivable sur tout son domaine de définition ? Si oui, calculer sa dérivée.*
C'est du cours.

2.b. *Exprimer en termes de fonctions classiques (fonctions polynomiales et prise de racine carrée) les fonctions*

$$\begin{aligned} f_1 : x &\longmapsto \cos(\operatorname{Arctan} x) \\ f_2 : x &\longmapsto \sin(\operatorname{Arctan} x) \end{aligned}$$

après avoir précisé leurs domaines respectifs de définition. Calculer ensuite les dérivées de ces deux fonctions. Les fonctions f_1 et f_2 sont définies sur $\mathbb{R}$ (ce sont des composées de fonctions définies sur $\mathbb{R}$).
Pour tout réel x, $\operatorname{Arctan} x \in]-\pi/2; \pi/2[$,
donc $\cos(\operatorname{Arctan} x) = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arctan} x)} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan(\operatorname{Arctan} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Pour tout réel x, $\operatorname{Arctan} x \in]-\pi/2; \pi/2[$ et $\operatorname{Arctan} x$ est du signe de x que l'on note $\varepsilon(x)$,
donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \varepsilon(x)\sqrt{\sin^2(\operatorname{Arctan} x)} = \varepsilon(x)\sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{Arctan} x)} = \varepsilon(x)\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}}$
donc $\sin(\operatorname{Arctan} x) = \varepsilon(x)\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Les fonctions f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule de dérivation des fonctions composées on a, pour tout réel x :

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \times (-\sin(\operatorname{Arctan} x)) = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} \times (\cos(\operatorname{Arctan} x)) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.c. *Montrer que*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\tan^2 x)\,\cos^2 x} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Pour tout réel $x \in [0;\pi/4],\ 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ donc $\frac{1}{(1+\tan^2 x)\,\cos^2 x} = 1$.
On en déduit que $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\tan^2 x)\,\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}\,.$

Exercice 3.

3.a. *Soit $a \geq 1$ un entier ; montrer que si a^3 est divisible par 3, alors a est divisible par 3.*
Soit $a \geq 1$ un entier.
On effectue la division euclidienne de a par 3 : $a = 3q + r$ avec q, r entiers naturels et $r \in \{0, 1, 2\}$.
Grâce à la formule du binôme, $a^3 = (3q+r)^3 = 3^3q^3+3\times 3^2q^2r+3\times 3qr^2+r^3 = 3(3^2q^3+3^2q^2r+3qr^2)+r^3$
donc $r^3 = a^3 - 3(3^2q^3 + 3^2q^2r + 3qr^2)$
donc si $3|a^3$ alors $3|r^3$.
Or r^3 ne prend que les valeurs $\{0, 1, 8\}$ dont seule 0 est un multiple de 3.
Donc si $3|a^3$ alors $r = 0$ et donc $3|a$.

3.b. *On suppose que l'entier quelles sont les valeurs possibles pour le reste dans la division euclidienne de a par 3 ?*
Si l'entier a n'est pas divisible par 3, le reste de la division euclidienne de a par 3 vaut 1 ou 2.

3.c. *Trouver, lorsque $a = 1001$, un couple d'entiers (u, v), $u, v \in \mathbb{Z}$, tel que $1 = au + 3v$.*
En appliquant l'algorithme d'Euclide et en le "remontant", on trouve : $-1\times 1001+3\times 334 = 1(u = -1$ et $v = 334)$.

Exercice 4.

4.a. *Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que la recherche d'une primitive F_n de la fonction*

$$f_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^n \log(1 + x^2)$$

se ramène à celle de la recherche d'une primitive G_n de la fonction

$$g_n \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^{n+2}}{1 + x^2}$$

(on donnera explicitement la formule permettant d'exprimer une primitive F_n de f_n en fonction d'une primitive G_n de g_n).
$F_n(x) = \int f_n(x)dx = \int x^n \log(1 + x^2)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \log(1 + x^2) - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \frac{2x}{1+x^2} dx$
$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \log(1 + x^2) - \frac{2}{n+1} G_n(x)$.

4.b. *En utilisant l'identité $x^4 = 1 + (1 + x^2)(x^2 - 1)$, déduire de **4.a** une primitive de la fonction g_2, puis de la fonction f_2.*
D'après l'identité $x^4 = 1 + (1 + x^2)(x^2 - 1)$, pour tout réel x, $g_2(x) = \frac{x^4}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + x^2 - 1$
donc $G_2(x) = \int g_2(x)dx = \operatorname{Arctan} x + \frac{x^3}{3} - x + cste$
donc $F_2(x) = \frac{x^3}{3} \log(1 + x^2) - \frac{2}{3} \left(\operatorname{Arctan} x + \frac{x^3}{3} - x\right) + cste$

Exercice 5.

Soient R, L, c trois nombres strictement positifs (R pour "résistance", L pour "inductance", c pour "capacité", le modèle sous-jacent étant celui d'un circuit électronique RLC couplant une résistance R, un condensateur de capacité c et une bobine d'inductance L). On suppose que les paramètres sont ajustés pour que $R^2c^2 - 4Lc$ soit un nombre réel strictement négatif que l'on écrit donc sous la forme $R^2c^2 - 4Lc = -\omega^2$ avec $\omega = \sqrt{4Lc - R^2c^2} > 0$.

5.a. *Exprimer en fonction de R, L, c, ω l'unique fonction $y \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que*

$$L\, c\, y''(t) + R\, c\, y'(t) + y(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. La fonction y a-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $+\infty$ (si oui préciser la valeur de cette limite) ? A-t-elle une limite (finie ou infinie) lorsque t tend vers $-\infty$?

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est $L\,c\,X^2 + R\,c\,X + 1 = 0$. Elle a 2 racines complexes conjuguées $-\frac{R}{2L} \pm i\,\frac{\omega}{2L\,c}$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{-\frac{R}{2L}\,t}\left(A\,\cos\left(\frac{\omega}{2L\,c}\,t\right) + B\,\sin\left(\frac{\omega}{2L\,c}\,t\right)\right)$$

où A et B sont des constantes réelles que nous ajustons en utilisant les conditions initiales.
$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$.
On a alors $y'(t) = B\,e^{-\frac{R}{2L}\,t}\left(-\frac{R}{2L}\sin\left(\frac{\omega}{2L\,c}\,t\right) + \frac{\omega}{2L\,c}\cos\left(\frac{\omega}{2L\,c}\,t\right)\right)$ et donc $y'(0) = 1 \Rightarrow B = \frac{2L\,c}{\omega}$

Conclusion :pour $t \in \mathbb{R}$,

$$y(t) = \frac{2L\,c}{\omega}\,e^{-\frac{R}{2L}\,t}\sin\left(\frac{\omega}{2L\,c}\,t\right)$$

y est le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle en $+\infty$ donc $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
y n'a pas de limite en $-\infty$.

5.b. *On choisit des valeurs numériques pour les paramètres R, L, c, à savoir : $R = L = 2, c = 1$. Donner explicitement l'unique fonction $y\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que*

$$2y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \exp(-t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,,$$

satisfaisant de plus aux deux conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
Une solution particulière de cette équation sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto e^{-t}$.
La solution générale de l'équation différentielle donnée est la somme d'une solution particulière et la solution générale de l'équation homogène (cf question précédente) donc $y(t) = e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}\,t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)$.
On ajuste les constantes A et B grâce aux conditions initiales. On trouve $A = -1$ et $B = 1$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\,t\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\,t\right)\right)$$

Exercice 6.

On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le plan P d'équation

$$2x + 4y - 2z = 2\,,$$

On considère aussi (toujours dans $\mathbb{R}^3$) la droite D_m d'équations

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 12y & - & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}$$

(m étant un paramètre dont la droite dépend).
Chercher (suivant les valeurs de m) les points (x, y, z) d'intersection de P et de D_m ; on posera le système linéaire à 3 inconnues vérifié par les coordonnées de ces points, puis on résoudra ce système par la méthode du pivot.
Les coordonnées (x, y, z) des points d'intersection de P et de D_m vérifient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 12y & - & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right.$$

On le résout par la méthode du pivot de Gauss, les systèmes suivants sont équivalents :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ 3x & - & 12y & - & 3z & = & 3 \\ x & + & y & + & mz & = & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - 4y - z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ x + y + mz = 3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -6y = 0 \\ -y + (m+1)z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \\ (m+1)z = 2 \end{cases}$$

- Si $m = -1$ le système n'a pas de solutions, la droite D_{-1} est strictement parallèle au plan P
- Si $m \neq -1$, D_m est sécante à P au point de coordonnées $\left(\frac{m+3}{m+1}, 0, \frac{2}{m+1}\right)$

Quatrième partie

Texte de l'examen de session 2

ANNÉE 2005-2006 — SESSION DE JUIN 2006

GU : MISMI — **UE** : MIS101

Date : 16/06/2006 — Durée : 3h00

Documents non autorisés

Les deux parties sont indépendantes et notées respectivement sur 6 *points (sur* 20*) et* 14 *points (sur* 20*) ; les exercices 1 à 6 de la partie applicative (partie* II*) sont totalement indépendants entre eux et peuvent être traités dans un ordre arbitraire. Les trois séries de questions de la partie* I *sont elles aussi totalement indépendantes entre elles.*

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

On considère l'ensemble

$$U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$$

et les applications f_1 et f_2 de U dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\begin{aligned} f_1 \quad &: \quad z \longmapsto z^3 \\ f_2 \quad &: \quad z \longmapsto z - \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

I.a. Rappeler ce que signifient, pour une application f d'un ensemble E dans un ensemble F les assertions

$$\begin{gathered} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{gathered}$$

I.b. Quel est l'ensemble $f_1(U)$? Quel est l'ensemble $f_1^{-1}(\{1\})$? L'application f_1 est elle injective ? surjective de U dans $\mathbb{C}$? surjective de U dans U ?

I.c. Dessiner l'ensemble U et montrer que deux nombres complexes z_1 et z_2 de U tels que $|z_1 - z_2| = 2$ sont nécessairement diamétralement opposés ; en déduire que f_2 est une application injective de U dans $\mathbb{C}$.

Série de questions II

II.a. Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ (|x-y| < \eta \Rightarrow |e^x - e^y| < \epsilon)\,.$$

II.b. Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :

$$\begin{gathered} \forall x \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \forall \epsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R}, \\ \Big((|x-y| < \epsilon) \wedge \Big(\Big| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \Big| > A \Big) \Big)\,. \end{gathered}$$

Série de questions III

III.a. Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.

III.b. Montrer que pour tout entier non nul n et pour tout nombre réel non nul x, on a

$$\sin x = 2^n \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j) \Big)\ \sin(x/2^n)\,.$$

III.c. Écrire en utilisant les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ l'assertion :

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\Big) = 1\,;$$

cette assertion est elle vraie ou fausse (justifier votre réponse) ?

III.d. Vérifier

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\prod_{j=1}^{n}\cos(x/2^j)\Big) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres entiers non nuls premiers entre eux.

1.a. Montrer qu'il existe au moins deux nombres entiers c et d tels que $ad - bc = 1$; exhiber deux tels nombres c et d lorsque $a = 31$ et $b = 6$.

On suppose à partir de maintenant que a, b, c, d sont quatre nombres entiers tels que $ad - bc = 1$.

1.b. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la quantité

$$\frac{az+b}{cz+d}$$

est-elle définie (on distinguera les cas $c = 0$ et $c \neq 0$) ?

1.c. Si $c = 0$, montrer que l'on a nécessairement $a = d$ et que l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{C}$.

1.d. Si $c \neq 0$, montrer que l'équation

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

peut avoir, selon la valeur de $a + d$:
- soit une racine double réelle
- soit deux racines complexes disctinctes et conjuguées
- soit deux racines réelles distinctes.

Déterminer la condition sur $a + d$ correspondant à chacun des trois sous-cas.

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\Big(\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x^2-16)}\Big)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{x-\sqrt{x^2+2}}\Big)$$

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x^{1/3}-1}{x^3-1}\Big)\,.$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f\ : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}\,,\ f(x) = \cos\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)\,.$$

3.a. Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et exprimer en termes de fonctions classiques la fonction dérivée f'.

3.b. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique de terme général

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{2n}}\,;$$

montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(f(u_n))_{n\geq 1}$ sont convergentes lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer leurs limites respectives.

3.c. Déterminer une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels différents de ± 1 telle que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= 1 \\ \lim_{n\to+\infty} f(v_n) &= -1\,. \end{aligned}$$

3.d. La fonction f admet-elle une limite en $x = 1$? en $x = -1$? Mêmes questions pour la fonction

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longmapsto \sqrt{|x^2-1|}\ f(x)\,.$$

<u>Exercice 4.</u>

4.a. Quelle est la dérivée de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan x$ (où arctan désigne la fonction arc-tangente) ? Exprimer à partir des fonctions classiques une primitive de la fonction

$$x \longmapsto x \arctan x\,.$$

4.b. Déterminer des nombres réels a, b, c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{u}{(1+u)^2} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{(1+u)^2}\,.$$

4.c. En utilisant un changement de variables approprié et les résultats des deux questions précédentes, exprimer en termes de valeurs numériques de fonctions classiques l'intégrale

$$\int_1^2 x^7\Big(\arctan(x^4) + \frac{1}{(1+x^4)^2}\Big)\,dx\,.$$

<u>Exercice 5.</u>

5.a. En utilisant le changement de variables $u = \tan(t/2)$ (où tan désigne la fonction tangente), montrer qu'une primitive sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{\cos t}$$

est la fonction

$$t \longmapsto \log(\tan(t/2+\pi/4))\,,$$

où log désigne le logarithme néperien.

5.b. Trouver toutes les solutions $f\ :]-\pi/2,\pi/2[\longrightarrow\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène du premier ordre :

$$\cos t\times f'(t)+\sin t\times f(t)=0\ ;$$

de combien de paramètres dépendent ces solutions ?

5.c. Un point mobile $M(t)$ de l'axe réel est repéré par son abscisse

$$x(t)=\overline{0M(t)}$$

par rapport à l'origine 0. On suppose qu'à l'instant $t=0$, le point M est à l'origine ($x(0)=0$) et que le déplacement du point $M(t)$ en fonction du temps est régi par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\cos t\times x'(t)+\sin t\times x(t)=\cos t\,.$$

Calculer la trajectoire $t\longmapsto x(t)$ du point $M(t)$ à partir de l'instant $t=0$ (on utilisera le résultat établi au **5.a**). La fonction

$$t\longmapsto x(t)$$

admet-elle une limite lorsque t tend vers $\pi/2$? Dessiner sommairement le graphe de la fonction

$$t\longmapsto x(t)$$

sur l'intervalle $[0,\pi/2[$, puis décrire le mouvement du point mobile $M(t)$ à partir de l'instant $t=0$.

<u>Exercice 6.</u>

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système :

$$\begin{array}{rcl} x+y+(1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x-y+2z & = & 0 \\ 2x-my+3z & = & m+2 \end{array}$$

Cinquième partie

Corrigé de l'examen de session 2

ANNÉE 2005-2006 SESSION DE JUIN 2006

GU : MISMI **UE** : MIS101

Date : 16/06/2006 Durée : 3h00

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

PREMIÈRE PARTIE : COMPRÉHENSION DU COURS

Série de questions I

On considère l'ensemble

$$U := \{z \in \mathbb{C}\, ;\, |z| = 1\}$$

et les applications f_1 et f_2 de U dans $\mathbb{C}$ définies par

$$f_1 \ : \ z \longmapsto z^3$$
$$f_2 \ : \ z \longmapsto z - \frac{z^2}{2}$$

I.a. *Rappeler ce que signifient, pour une application f d'un ensemble E dans un ensemble F les assertions*

$$f \text{ injective}$$
$$f \text{ surjective}$$

Dire que $f\ : E \longrightarrow F$ est injective signifie que tout point de F admet au plus un antécédent par f, ou encore que

$$\forall x_1, x_2 \in E\,,\ (f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\,.$$

Dire que $f\ : E \longrightarrow F$ est surjective signifie que tout point de F admet au moins un antécédent par f, ou encore :

$$\forall y \in F\,,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\,.$$

I.b. *Quel est l'ensemble $f_1(U)$? Quel est l'ensemble $f_1^{-1}(\{1\})$? L'application f_1 est elle injective ? surjective de U dans $\mathbb{C}$? surjective de U dans U ?*

Si Z est un nombre complexe de module 1 ($Z = e^{i\theta}$), on sait que le nombre complexe (lui aussi de module 1)

$$z = \exp(i\theta/3)$$

vérifie $z^3 = Z$; ceci montre que $f_1(U) = U$ (en effet $f_1(U) \subset U$ car $|z| = 1 \Longrightarrow |z|^3 = 1$ et de plus, d'après ce qui précède, tout point de U admet au moins un antécédent par f_1 dans U, ce qui prouve l'égalité $f_1(U) = U$).

Par définition

$$f_1^{-1}(\{1\}) = \{z \in U\, ;\, z^3 = 1\} = \{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\}$$

(d'après le cours consacré à la résolution de $z^N = 1$ dans $\mathbb{C}$, ici $N = 3$).

D'après ce qui précède, f_1 est surjective considérée comme application de U dans U, mais non surjective comme application de U dans $\mathbb{C}$. Comme 1 admet trois antécédents manifestement distincts (les trois nombres $1, j, j^2$, racines cubiques de l'unité, f_1 n'est pas injective.

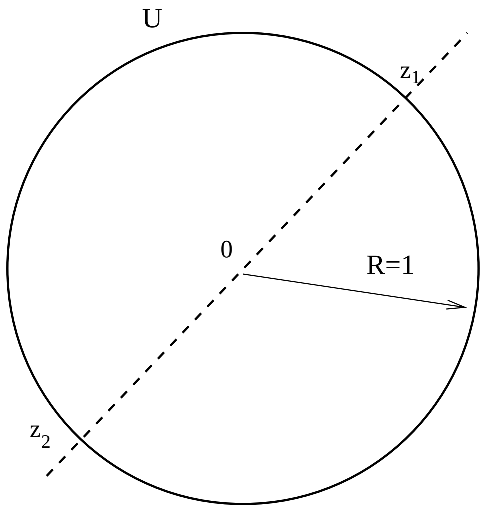

FIG. 1 – Question **I.c** : $|z_1 - z_2| = 2 \Longrightarrow z_1 = -z_2$ lorsque $z_1, z_2 \in U$

I.c. *Dessiner l'ensemble U et montrer que deux nombres complexes z_1 et z_2 de U tels que $|z_1 - z_2| = 2$ sont nécessairement diamétralement opposés ; en déduire que f_2 est une application injective de U dans $\mathbb{C}$.*

Si z_1 et z_2 sont deux points du cercle unité (de diamètre 2) tels que $|z_1 - z_2| = 2 =$ diamètre du cercle, les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 sont diamétralement opposés sur le cercle, d'où $z_1 = -z_2$ (voir la figure 1 dans ce corrigé). Si $f_2(z_1) = f_2(z_2)$, on a

$$z_1 - \frac{z_1^2}{2} = z_2 - \frac{z_2^2}{2}\,,$$

soit

$$z_1 - z_2 = \frac{z_1^2 - z_2^2}{2} = \frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{2}\,.$$

Ceci implique soit $z_1 = z_2$, soit $z_1 + z_2 = 2$; d'après ce qui précède, si l'on est dans ce sous-cas, $z_1 = -(-z_2) = z_2$ (on a même en fait $z_1 = z_2 = 1$ si z_1 et z_2 sont deux points de U tels que $z_1 + z_2 = 2$). En conclusion, on voit que si z_1 et z_2 sont deux points de U tels que $f_2(z_1) = f_2(z_2)$, alors $z_1 = z_2$; ceci prouve que $f_2 \ : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est injective.

Série de questions II

II.a. *Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \left(|x-y| < \eta \Rightarrow |e^x - e^y| < \epsilon\right).$$

On a la tautologie

$$\neg(P \Longrightarrow Q)) \Longleftrightarrow (P \wedge (\neg\, Q))\,.$$

La négation de l'assertion est donc

$$\exists\, \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \Big((|x-y| < \eta) \wedge (|e^x - e^y| \geq \epsilon)\Big)\,.$$

II.b. *Ecrire, sans faire apparaître le signe $\neg$ de négation, la négation de l'assertion logique suivante :*

$$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \forall \epsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R},\\ \Big((|x-y| \geq \epsilon) \wedge \Big(\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| \leq A\Big)\Big)\,.\end{gathered}$$

On a la tautologie

$$\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow ((\neg\, P) \vee (\neg\, Q))\,.$$

La négation de l'assertion est donc (si l'on suppose, ce qui est implicite ici, que f désigne une fonction à valeurs réelles) :

$$\begin{gathered}\exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, A > 0, \exists\, \epsilon > 0, \forall\, y \in \mathbb{R},\\ \Big((|x-y| < \epsilon) \vee \Big(\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\Big| > A\Big)\Big)\,.\end{gathered}$$

Série de questions III

III.a. *Rappeler le principe du raisonnement par récurrence.*

Supposons que l'on ait une assertion $P(n)$ dépendant d'un indice n, entier tel que $n \geq n_0 \geq 0$. Pour montrer que $P(n)$ est vraie, il suffit de montrer que $P(n_0)$ est vraie et que l'assertion

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

est vraie pour tout $n \geq n_0$. Ce principe est une conséquence du principe de récurrence dans l'axiomatique de Peano qui régit la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs.

III.b. *Montrer que pour tout entier non nul n et pour tout nombre réel non nul x, on a*

$$\sin x = 2^n \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big)\ \sin(x/2^n)\,.$$

On montre cette propriété (notée $P(n)$) par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a

$$\sin x = 2 \sin(x/2)\ \cos(x/2)$$

d'après la formule classique donnant le sinus de l'angle double. La propriété est donc satisfaite si $n = 1$. Supposons $P(n)$ vraie, soit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \sin x = 2^n \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big)\ \sin(x/2^n)\,.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2^{n+1}\Big(\prod_{j=1}^{n+1} \cos(x/2^j)\Big)\ \sin(x/2^{n+1}) &= 2^n\Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big) \\ &\qquad \times 2\ \cos(x/2^{n+1})\ \sin(x/2^{n+1}) \\ &= 2^n\Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big) \times \sin(x/2^n) \\ &= \sin x\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que l'assertion $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie. Le principe du raisonnement par récurrence rappelé au **III.a** s'applique donc.

III.c. *Écrire en utilisant les quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$ *l'assertion :*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\Big) = 1\,;$$

cette assertion est elle vraie ou fausse (justifier votre réponse) ?

Ceci s'écrit d'après le cours :

$$\forall\,\epsilon > 0\,,\ \exists\, N \in \mathbb{N}\,,\ (n \geq N) \Longrightarrow \Big(\Big|\frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} - 1\Big| < \epsilon\Big)\,.$$

Comme la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin x$ est dérivable de dérivéee $x \longmapsto \cos x$, on a, par définition du nombre dérivé

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \cos(0) = 1\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(x/2^n) = 0$, on a, par composition des limites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x/2^n)}{(x/2^n)} = \cos(0) = 1\,.$$

L'assertion en question est donc bien vraie.

III.d. *Vérifier*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

On peut écrire, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en utilisant le résultat établi par récurrence sur n au **III.a**,

$$\frac{\sin x}{x} = \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big) \times \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n}\,.$$

Si l'on fait tendre n vers $+\infty$ et que l'on applique le résultat établi au **III.b**, on trouve bien, pour tout x réel non nul,

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \Big(\lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\Big) \\ &\qquad \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j)\,. \end{aligned}$$

Si l'on décide de poser $\sin(0)/0 = 1$ (ce qui revient à prolonger la fonction $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \sin x/x$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}$), on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(\prod_{j=1}^{n} \cos(x/2^j) \Big) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

DEUXIÈME PARTIE : PARTIE APPLICATIVE

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres entiers non nuls premiers entre eux.

1.a. *Montrer qu'il existe au moins deux nombres entiers c et d tels que $ad - bc = 1$; exhiber deux tels nombres c et d lorsque $a = 31$ et $b = 6$.*

Comme a et b sont premiers entre eux, on sait qu'il existe (de par l'identité de Bézout) au moins eux entiers u et v tels que

$$au + bv = \mathrm{PGCD}\,(a, b) = 1\,;$$

il suffit de poser $d = u$ et $c = -v$. Pour trouver (u, v) (et donc (c, d)), on utilise l'algorithme d'Euclide (une seule étape étant nécessaire ici) ; en effet

$$31 = 6 \times 5 + 1$$

fournit

$$1 = 31 \times 1 - 6 \times 5\,;$$

on peut donc prendre $c = 5$ et $d = 1$.

On suppose à partir de maintenant que a, b, c, d sont quatre nombres entiers tels que $ad - bc = 1$.

1.b. *Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la quantité*

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

est-elle définie (on distinguera les cas $c = 0$ et $c \neq 0$) ?

Si $c = 0$, on a $d \neq 0$ (car $ad = 1$) ; la fonction

$$z \longmapsto \frac{az + b}{d}$$

qui est dans ce cas une fonction polynômiale de degré 1 en z est définie dans $\mathbb{C}$ tout entier.

Si $c \neq 0$, la fonction est définie pour tout z tel que $z \neq -d/c$; comme $ad - bc = 1$, ce nombre complexe $z_0 = -d/c$ n'est pas zéro du numérateur et la fraction rationnelle n'est donc pas définie (elle ne se simplifie pas) au point $z = -d/c$. Le domaine de définition de la quantité

$$\frac{az + b}{cz + d}$$

est donc (dans le cas où $c\ \emptyset$) exactement $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

1.c. *Si $c = 0$, montrer que l'on a nécessairement $a = d$ et que l'équation*

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

n'admet aucune solution dans $\mathbb{C}$.

Si $c = 0$, on a $ad = 1$, ce qui n'est possible (puisque a et d sont des entiers) que si $a = d = 1$ ou $a = d = -1$ (les seuls diviseurs entiers de 1 étant 1 t -1). On a donc bien $a = d$ lorsque $c = 0$. Mais alors, si z était solution de
$$\frac{az+b}{d} = \frac{az+b}{a} = z\,,$$
on aurait $az = az + b$, d'où $b = 0$, ce qui est impossible par hypothèses (a et b étant supposés non nuls). L'équation ci dessus n'a donc pas de solution dans $\mathbb{C}$.

1.d. *Si $c \neq 0$, montrer que l'équation*
$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$
peut avoir, selon la valeur de $a+d$:
- soit une racine double réelle
- soit deux racines complexes disctinctes et conjuguées
- soit deux racines réelles distinctes.
Déterminer la condition sur $a+d$ correspondant à chacun des trois sous-cas.

Dire que $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ est solution de l'équation équivaut à dire que
$$\begin{aligned} z &\neq -d/c \\ z(cz+d) - (az+b) &= cz^2 + (d-a)z - b = 0\,. \end{aligned}$$
Comme les deux polynômes $az + b$ et $cz + d$ n'ont aucune racine commune (car $ad - bc = 1 \neq 0$), la première de ces deux conditions est de fait redondante et on peut l'ignorer. Dire que z est solution de l'équation
$$\frac{az+b}{cz+d} = z \qquad (*)$$
équivaut donc à dire que z est racine du trinôme $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut
$$(d-a)^2 + 4bc = (d-a)^2 + 4(ad-1) = (a+d)^2 - 4 = (a+d-2)(a+d+2)\,.$$
Si $a + d = \pm 2$, le trinôme (donc l'équation (*)) admet une racine double réelle
$$z = \frac{a-d}{2c}\,.$$
Si $a+d \in]-2, 2[$, le trinôme (donc l'équation (*)) admet deux racines complexes distinctes et conjuguées
$$z = \frac{a - d \pm i\sqrt{4-(a+d)^2}}{2c}\,.$$
Si $a + d > 2$ ou $a + d < -2$, le trinôme (donc l'équation (*)) admet deux racines réelles
$$z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}\,.$$

<u>Exercice 2.</u>

Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x^2-16)}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{x-\sqrt{x^2+2}}\right)$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{1/3}-1}{x^3-1}\right).$$

On a

$$\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x^2-16)} = \frac{1}{x-4}\Big(1 - \frac{1}{x+4}\Big) = \frac{1}{x-4} \times \frac{x+3}{x+4}\,.$$

Comme

$$\lim_{x\to 4} \frac{x+3}{x+4} = \frac{7}{8}$$

et que

$$\frac{1}{x-4}$$

tend vers l'infini avec le signe de $x-4$, on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 4, x<4} \Big(\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x^2-16)}\Big) & = & -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 4, x>4} \Big(\frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x^2-16)}\Big) & = & +\infty \end{array}$$

mais on ne peut affirmer l'existence d'une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque x tend vers 4.

Pour ce qui est de la seconde limite envisagée, on a, en multipliant par les quantités conjugées ds numérateur t dénominateur (toutes les deux strictement positives au voisinage de $+\infty$)

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\sqrt{9x^2+1} - 3x}{x - \sqrt{x^2+2}} & = & \dfrac{((9x^2+1) - 9x^2)(x + \sqrt{x^2+2})}{(x^2 - (x^2+2))(\sqrt{9x^2+1} + 3x)} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{x + \sqrt{x^2+2}}{3x + \sqrt{9x^2+1}} \\ & = & -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 + \sqrt{1 + 2/x^2}}{3 + 3\sqrt{1 + 1/(9x^2)}}\,; \end{array}$$

la limite de cette expression lorsque $x \to +\infty$ se calcule immédiatement et vaut

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1+1}{3+3} = -1/6\,.$$

Dans la troisième limite envisagée, on pose $y = x^{1/3}$; comme $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/3} = 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x\to 1} \Big(\frac{x^{1/3}-1}{x^3-1}\Big) & = & \displaystyle\lim_{y\to 1} \Big(\frac{y-1}{y^9-1}\Big) \\ & = & \displaystyle\lim_{y\to 1} \Big(\frac{y-1}{(y-1)(1+y+y^2+\cdots+y^8)}\Big) \\ & = & \displaystyle\lim_{y\to 1} \Big(\frac{1}{1+y+y^2+\cdots+y^8}\Big) = \frac{1}{9}\,. \end{array}$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f\ : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}\,,\ f(x) = \cos\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)\,.$$

3.a. *Montrer que cette fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ *et exprimer en termes de fonctions classiques la fonction dérivée* f'.

Cette fonction est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables, à savoir la fonction

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\} \longmapsto \frac{\pi}{x^2-1}$$

(elle même composée de la fonction polynômiale $x \longmapsto x^2-1$ et de la fonction dérivable $X \in \mathbb{R}^* \longmapsto \pi/X$) et la fonction $y \in \mathbb{R} \longmapsto \cos y$. La dérivée s'obtient en utilisant la règle de Leibniz et l'on a donc, puisque

$$\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)' = \frac{-2\pi x}{(x^2-1)^2}$$

et que

$$(\cos y)' = -\sin y\,,$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\,,\ f'(x) &= \Big(\frac{-2\pi x}{(x^2-1)^2}\Big) \times \Bigg(-\sin\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)\Bigg)\\ &= \frac{2\pi x}{(x^2-1)^2}\,\sin\Big(\frac{\pi}{x^2-1}\Big)\,.\end{aligned}$$

3.b. *Soit* $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite numérique de terme général*

$$u_n = \sqrt{1+\frac{1}{2n}}\,;$$

montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ *et* $(f(u_n))_{n\geq 1}$ *sont convergentes lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *et calculer leurs limites respectives.*

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (car $1/(2n)$ tend vers 0 et que la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est continue en $x=0$). On a

$$\frac{\pi}{u_n^2-1} = \frac{\pi}{1+\frac{1}{2n}-1} = 2n\pi$$

et par conséquent

$$\forall n \geq 1\,,\ f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1\,.$$

La suite $(f(u_n))_{n\geq 1}$ stationne à la valeur 1, donc converge vers cette valeur 1 (comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$).

3.c. *Déterminer une suite* $(v_n)_{n\geq 1}$ *de nombres réels différents de* ± 1 *telle que*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} v_n &= 1\\ \lim_{n\to+\infty} f(v_n) &= -1\,.\end{aligned}$$

Si l'on pose, pour $n \geq 1$,

$$v_n = \sqrt{1+\frac{1}{2n-1}}\,,$$

la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge toujours vers 1. Mais on a

$$\frac{\pi}{v_n^2-1} = \frac{\pi}{1+\frac{1}{2n-1}-1} = (2n-1)\pi$$

et par conséquent

$$f(v_n) = \cos((2n-1)\pi) = -1 \quad \forall n \geq 1\,.$$

La suite $(f(v_n))_{n\geq 1}$ stationne à la valeur -1, donc converge vers cette valeur.

3.d. *La fonction f admet-elle une limite en $x = 1$? en $x = -1$? Mêmes questions pour la fonction*

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \longmapsto \sqrt{|x^2-1|}\, f(x)\,.$$

La fonction f n'a pas de limite en $x = 1$ car si c'était le cas, cette limite l devrait être la limite de toute suite $(f(w_n))_{n\geq 1}$, où $(w_n)_{n\geq 1}$ est une suite quelconque tendant vers 1. Puisque les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ (toutes les deux tendant vers 1) génèrent des suites $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ ayant des limites différentes (1 et -1) d'après **3.b** et **3.c**, ceci est impossible. Comme la fonction f est paire, il n'y a pas non plus de limite en $x = -1$.
Comme on a $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$\lim_{x\to\pm 1} (\sqrt{|x^2-1|}\, f(x)) = 0$$

car $x \longmapsto \sqrt{|x^2-1|}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1 ou -1 (et impose donc sa limite lorsqu'on la multiplie par une fonction de module inférieur à 1).

Exercice 4.

4.a. *Quelle est la dérivée de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \arctan x$ (où* arctan *désigne la fonction arc-tangente) ? Exprimer à partir des fonctions classiques une primitive de la fonction*

$$x \longmapsto x \arctan x\,.$$

La fonction arctan se dérive en la fonction

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

(calcul de la dérivée d'une fonction inverse, à savoir ici l'inverse de la fonction tangente). Par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^x t \arctan t\, dt &= \frac{1}{2}\Big[(\arctan t) \times t^2\Big]_a^x - \frac{1}{2}\int_a^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[(\arctan t) \times t^2\Big]_a^x - \frac{1}{2}\int_a^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{(x^2+1)\arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \text{constante}\,;
\end{aligned}$$

une primitive de $x \longmapsto x \arctan x$ est donc la fonction

$$x \longmapsto \frac{(x^2+1)\arctan x}{2} - \frac{x}{2}\,.$$

4.b. *Déterminer des nombres réels a, b, c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,*

$$\frac{u}{(1+u)^2} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{(1+u)^2}\,.$$

On raisonne par identification ; en réduisant au même dénominateur, on doit avoir pour que cela marche

$$a(1+u) + (bu+c) = (a+c) + (a+b)u \equiv u \quad \forall u \in \mathbb{R}\,;$$

ceci est réalisé si a, b, c vérifient les deux conditions

$$\begin{aligned} a+c &= 0 \\ a+b &= 1\,. \end{aligned}$$

C'est le choix de $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$, soit

$$\frac{u}{(1+u)^2} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}$$

que l'on retiendra par la suite (puisqu'il s'agira de trouver une primitive simple de cette fonction). Tout autre choix de a, b, c satisfaisant aux deux conditions ci-dessus était bien sûr accepté lors de la correction.

4.c. *En utilisant un changement de variables approprié et les résultats des deux questions précédentes, exprimer en termes de valeurs numériques de fonctions classiques l'intégrale*

$$\int_1^2 x^7 \Big(\arctan(x^4) + \frac{1}{(1+x^4)^2}\Big)\, dx\,.$$

En utilisant le changement de variable $u = x^4$, on a (par la formule de changement de variable dans les intégrales et les résultats établis dans les deux questions précédentes)

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 x^7 \Big(\arctan(x^4) + \frac{1}{(1+x^4)^2}\Big)\, dx \\
= \; & \frac{1}{4}\int_1^{16} u \arctan u \, du + \frac{1}{4}\int_1^{16} \frac{u\, du}{(1+u)^2} \\
= \; & \frac{1}{8}\Big(257 \arctan 16 - 2 \arctan 1\Big) - \frac{1}{4}\frac{16-1}{2} \\
& \quad + \frac{1}{4}\int_1^{16} \Big(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\Big)\, du \\
= \; & \frac{1}{8}\Big(257 \text{ artan}(16) - \pi/2\Big) - \frac{15}{8} \\
& \quad + \frac{1}{4}\Big[\log(1+u) + \frac{1}{1+u}\Big]_1^{16} \\
= \; & \frac{1}{8}\Big(257 \text{ artan}(16) - \pi/2\Big) - \frac{15}{8} \\
& \quad + \frac{1}{4}\log(17/2) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{17} - \frac{1}{2}\Big) \\
= \; & \frac{257 \text{ artan}(16) - \pi/2}{8} + \frac{\log(17/2)}{4} - \frac{15}{4}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{34}\Big) \\
= \; & \frac{257 \text{ artan}(16) - \pi/2}{8} + \frac{\log(17/2)}{4} - \frac{135}{68}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

5.a. *En utilisant le changement de variables* $u = \tan(t/2)$ *(où* tan *désigne la fonction tangente), montrer qu'une primitive sur* $]-\pi/2, \pi/2[$ *de la fonction*

$$t \longmapsto \frac{1}{\cos t}$$

est la fonction

$$t \longmapsto \log(\tan(t/2+\pi/4))\,,$$

où log *désigne le logarithme néperien.*

En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$ comme indiqué, on voit que, si $u \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{\cos t} &= \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1+u^2}{1-u^2} \times \frac{2\,du}{(1+u^2)} \\
&= 2\int_0^{\tan(x/2)} \frac{du}{1-u^2} \\
&= \int_0^{\tan(x/2)} \Big(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\Big)\,du \\
&= \Big[\log\Big(\frac{1+u}{1-u}\Big)\Big]_0^{\tan(x/2)} = \log\Big(\frac{\sin(x/2)+\cos(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\Big) \\
&= \log(\tan(x/2+\pi/4))
\end{aligned}$$

puisque $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et que

$$\begin{aligned}
\sin(x/2+\pi/4) &= \sin(x/2)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\cos(x/2) \\
&= \frac{\sin(x/2)+\cos(x/2)}{\sqrt{2}} \\
\cos(x/2+\pi/4) &= \cos(x/2)\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\sin(x/2) \\
&= \frac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne la dernière relation dans la ligne d'égalités qui précède.

5.b. *Trouver toutes les solutions* $f\ :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ *de l'équation différentielle homogène du premier ordre :*

$$\cos t \times f'(t) + \sin t \times f(t) = 0\ ;$$

de combien de paramètres dépendent ces solutions ?

Comme cos ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude $]-\pi/2, \pi/2[$, l'équation homogène ci-dessus s'écrit aussi

$$f'(t) + \tan(t)\,f(t) = 0\,.$$

D'après la théorie générale des équations linéaires homogènes du premier ordre, les solutions de cette équation sont les fonctions

$$t \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto C\exp\Big(-\int_0^t \frac{\sin v}{\cos v}\,dv\Big)\,,$$

où C est un paramètre réel arbitraire. Ces solutions dépendent donc exactement d'un paramètre (C, que l'on peut interpréter ici comme la valeur de la solution à l'instant $t=0$). On peut ici pousser le calcul car, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\int_0^t \frac{\sin v}{\cos v}\, dv = -\int_0^{\cos t} \frac{dw}{w} = -\log\cos t$$

(on utilise le changement de variables $w = \cos v$, donc $dw = -\sin v\, dv$). Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$t \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto C \exp(\log\cos t) = C\cos t\,,$$

où C est un paramètre réel arbitraire (on peut le vérifier immédiatement en reportant dans l'équation pour s'assurer que l'on n'a pas fait d'erreur de calcul, c'est toujours bien utile de faire cette vérification si l'on a un peu de temps !).

5.c. *Un point mobile $M(t)$ de l'axe réel est repéré par son abscisse*

$$x(t) = \overline{0M(t)}$$

par rapport à l'origine 0*. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point M est à l'origine ($x(0) = 0$) et que le déplacement du point $M(t)$ en fonction du temps est régi par l'équation différentielle du premier ordre :*

$$\cos t \times x'(t) + \sin t \times x(t) = \cos t\,.$$

Calculer la trajectoire $t \longmapsto x(t)$ du point $M(t)$ à partir de l'instant $t = 0$ (on utilisera le résultat établi au **5.a***). La fonction*

$$t \longmapsto x(t)$$

admet-elle une limite lorsque t tend vers $\pi/2$? Dessiner sommairement le graphe de la fonction

$$t \longmapsto x(t)$$

sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, puis décrire le mouvement du point mobile $M(t)$ à partir de l'instant $t = 0$.

Pour résoudre l'équation avec second membre

$$\cos t \times x'(t) + \sin t \times x(t) = \cos t\,, \qquad (\dagger)$$

on utilise la méthode dite de variation des constantes et (compte tenu de ce que l'on sait concernant la forme des solutions de l'équation homogène), on cherche une solution particulière de cette équation inhomogène sous la forme

$$x(t) = C(t)\cos t\,.$$

On trouve en reportant

$$\cos^2(t)\, C'(t) = \cos t\,,$$

soit

$$C'(t) = \frac{1}{\cos t}\,.$$

On peut donc prendre (en utilisant le résultat établi au **5.a**) comme solution particulière de l'équation (†) la fonction

$$t \in]-\pi/2, \pi/2[\longmapsto \log(\tan(t/2 + \pi/4)) \times \cos t\,.$$

Les solutions de l'équation (†) sont les fonctions

$$t \longmapsto \cos t \times \Big(C + \log(\tan(t/2 + \pi/4))\Big)\,,$$

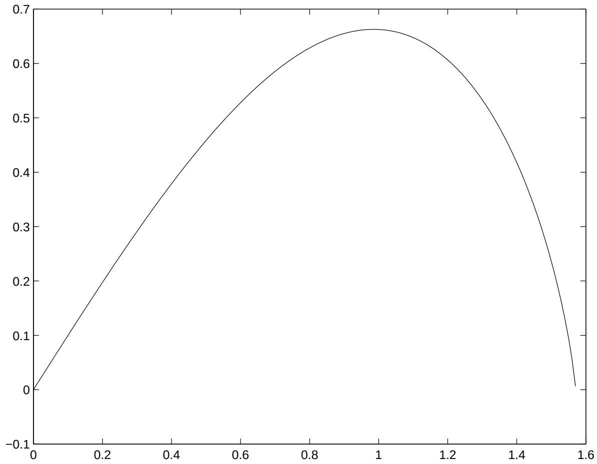

FIG. 2 – La trajectoire du point M lorsque $t \in [0, \pi/2[$ (graphe de $t \mapsto x(t)$

où C est une constante réelle arbitraire. Pour trouver la solution $t \longmapsto x(t)$ qui est assujettie à valoir 0 en $t = 0$, on doit prendre nécessairement $C = 0$. La trajectoire du point $M(t)$ est donc donnée par

$$x(t) = \cos t \times \log(\tan(t/2 + \pi/4)) \,.$$

Lorsque t tend vers $\pi/2$, $t/2 + \pi/4$ tend vers $\pi/2$ et le logarithme de $\tan(t/2 + \pi/4)$ tend vers $+\infty$. Il y a *a priori* une forme indéterminée $0 \times \infty$. Pour lever éventuellement cette indétermination, il convient d'étudier de plus près lorsque ξ tend vers 0 par valeurs positives, la limite de

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - \xi)\, \log(\tan((\pi/2 - \xi)/2 + \pi/4)) &= \sin(\xi)\, \log(\tan(\pi/2 - \xi/2)) \\ &= \sin(\xi)\, \log(\mathrm{cotan}\,(\xi/2)) \end{aligned}$$

pour pouvoir conclure. En fait, comme les fonctions puissance imposent leur limite au logaritme, que

$$\begin{aligned} \sin(\xi) &= \xi(1 + \epsilon_1(\xi)) \\ \mathrm{cotan}\,(\xi/2) &= \frac{\cos(\xi/2)}{\sin(\xi/2)} = \frac{2}{\xi}(1 + \epsilon_2(\xi))\,, \end{aligned}$$

où les fonctions ϵ_1 et ϵ_2 tendent vers 0 en $\xi = 0$, on a

$$\lim_{\xi \to 0} \cos(\pi/2 - \xi) \times \log(\tan((\pi/2 - \xi)/2 + \pi/4)) = 0 \,.$$

Lorsque t tend vers $\pi/2$, la trajectoire de $M(t)$ revient donc vers l'origine. Le graphe de $t \longmapsto x(t)$ sur $[0, \pi/2[$ a été affiché sous la figure 2 ci-dessus ; on demandait juste ici de suggérer cette trajectoire.

Exercice 6.

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système :

$$\begin{aligned} x + y + (1-m)z &= m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m + 2 \end{aligned}$$

On peut remplacer la première ligne par la somme des deux premières et obtenir le système équivalent :

$$\begin{aligned} (2+m)x + (3-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ 2x - my + 3z &= m+2 \end{aligned}$$

On peut maintenant remplacer la ligne 3 par la ligne L3 - m L2 et obtenir le système équivalent

$$\begin{aligned} (2+m)x + (3-m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0 \\ (-m^2 - m + 2)x + (3-2m)z &= m+2 \end{aligned}$$

On permute les lignes 2 et 3, ce qui donne le système encore équivalent

$$\begin{aligned} (2+m)x + (3-m)z &= m+2 \\ -(2+m)(m-1)x + (3-2m)z &= m+2 \\ (1+m)x - y + 2z &= 0\,. \end{aligned}$$

On remplace maintenant la deuxième ligne en lui ajoutant $(m-1)$-fois la première ligne (ce qui ne change pas l'ensemble des solutions d'après le cours). Le système devient :

$$\begin{aligned} (2+m)x + (3-m)z &= 2+m \\ ((3-2m) + (m-1)(3-m))z &= m(m+2) \\ (1+m)x - y + 2z &= 0\,, \end{aligned}$$

soit

$$\left\{\begin{aligned} (2+m)x + (3-m)z &= 2+m \\ m(2-m)z &= m(m+2) \\ (1+m)x - y + 2z &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{S}$$

C'est avec ce système (S) (équivalent au système originel) que nous allons maintenant travailler. Ici commence la discussion. Supposons dans un premier temps $m(2-m) \neq 0$. On trouve à partir de la seconde ligne de (S)

$$z = \frac{m+2}{2-m}\,.$$

La première ligne de (S) nous donne

$$(2+m)x + \frac{(3-m)(2+m)}{2-m} = 2+m\,. \tag{1}$$

Ici, deux sous cas sont à distinguer :

– Lorsque $m \neq -2$, cette relation équivaut à

$$x + \frac{3-m}{2-m} = 1\,,$$

soit à

$$x = 1 - \frac{3-m}{2-m} = \frac{1}{m-2}\,.$$

En utilisant la troisième ligne de (S), il vient toujours dans ce premier sous-cas $(m \neq 0, 2, -2)$,

$$y = \frac{1+m}{m-2} - 2\frac{m+2}{m-2} = \frac{m+3}{2-m}\,.$$

Le système (S) admet dans ce premier sous-cas ($m \neq 0, 2, -2$) une unique solution

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m-2} \\ y &= \frac{m+3}{2-m} \\ z &= \frac{m+2}{2-m} \end{aligned}$$

- Si $m = -2$ (second sous-cas), la relation (1) est toujours satisfaite et le système (S) équivaut donc dans ce cas à

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ -x-y &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions dans ce second sous-cas ($m = -2$) sont donc tous les triplets de la forme

$$(x, -x, 0)\,, \ x \in \mathbb{R}\,;$$

il y a un seul degré de liberté et on a affaire à une droite de solutions dans ce cas.

Reste à étudier les deux cas $m = 0$ et $m = 2$.

- Dans le cas $m = 0$, on voit, si l'on revient au point où nous avons amorçé la discussion, que le système (S) équivaut à :

$$\begin{aligned} 2x + 3z &= 2 \\ x - y + 2z &= 0\,. \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les triplets de la forme

$$\Big(x, \frac{4-x}{3}, \frac{2(1-x)}{3}\Big)\,, \ x \in \mathbb{R}\,;$$

il y a encore un seul degré de liberté et on a affaire à une droite de solutions dans ce cas.

- Dans le cas $m = 2$, on voit (en renant encore au point où nous avons amorçé la discussion) que le système (S) équivaut à

$$\begin{aligned} 4x + z &= 4 \\ 0 &= 8 \\ 3x - y + 2z &= 0\,; \end{aligned}$$

ce système n'admet aucune solution dans ce cas (à cause de sa seconde ligne).

Dans tous les cas (et sous-cas) ci-dessus (sauf le cas $m = 2$ où il n'y a aucune solution), il est toujours profitable (si l'on dispose d'un peu de temps) de vérifier que les triplets trouvés sont bien solutions du système originel.