Unknown Book Proceedings Series
Volume **00**, XXXX

Aspects opérationnels de la théorie des résidus hors du cadre intersection complète

Alain Yger

This paper is dedicated to Francois Norguet.

Abstract. In this survey paper, some aspects of the role played by analytic tools in multidimensional residue theory are presented. The methods lie on the analytic interpretation of the classical Transformation Law in operational residue calculus; they extend to non-complete intersection situations. Some applications to global results (in the spirit of Abel, Lagrange, Jacobi) or local ones (in the spirit of Scheja-Storch and Briançon-Skoda), valid in characteristic zero, are given.

Introduction

Les deux approches algébriques formelles de la notion de résidu, toutes les deux indépendantes de la théorie de la dualité globale introduite par A. Grothendieck et développée par exemple dans [**Ha**], sont d'une part celle proposée par J. Lipman et R. Hübl (reposant sur l'homologie de Hochschild, voir [**Hu**], [**Li**]), et d'autre part celle proposée par Scheja-Storch [**ScS**] (voir aussi [**Ku**]), basée sur la théorie des algèbres de Gorenstein. De par la souplesse des outils qu'elle utilise, l'analyse peut servir, tout au moins temporairement, de guide pour faire surgir de nouvelles idées, même si le cadre dans lequel on se place se trouve restreint par le fait que bien souvent la possibilité de résoudre les singularités y joue un rôle essentiel. C'est dans cet esprit que se situent les idées analytiques proposées originellement dans [**BY1**], [**BY2**], puis retranscrites sous un angle plus algébrique dans [**BY3**], pour rendre explicite le Nullstellensatz effectif ([**Br**], [**Ko1**], [**Ko2**], [**ELa**]). Il se trouve que l'une des règles majeures du calcul résiduel, à savoir la Loi de Transformation (qui, suivant le point de vue développé dans [**ScS**] et [**Ku**], apparait comme un avatar du résultat d'algèbre linéaire qu'est le théorème de Wiebe, voir par exemple le travail de synthèse [**ElM**]), se démontre de manière quasiment immédiate dans le cadre analytique en utilisant la souplesse de l'éventail que forment les représentations intégrales du type Bochner-Martinelli. On sait en effet, si $(h_1, \ldots, h_n)$ est une suite

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14B05, 32C30; Secondary 14Q20, 32A27.
Key words and phrases. several complex variables, multidimensional residue theory.

régulière dans l'anneau local ${}_n\mathcal{O}$ des germes à l'origine des fonctions holomorphes de n variables, que, pour tout $h_0 \in {}_n\mathcal{O}$,

$$\text{(0.1)} \qquad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h_0 d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ h_1, \dots, h_n \end{bmatrix} = \gamma_n \int_{\|\zeta\|=r} h_0 \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k ds_{[k]} \Big) \wedge d\zeta\,,$$

où les h_j, $j = 0, \dots, n$, ont été relevés en des représentants au voisinage de la boule fermée de $\mathbf{C}^n$ de centre 0 et de rayon r, et $s = (s_1, \dots, s_n)$ est un système de fonctions de classe C^1 au voisinage de $\{\|\zeta\| = r\}$ tel que

$$< s(\zeta), h(\zeta) >= \sum_{j=1}^{n} s_j(\zeta) h_j(\zeta) \equiv 1$$

dans ce voisinage (on a noté γ_n la constante $(-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!/(2i\pi)^n$ et $ds_{[k]} = \bigwedge_{j\neq k} ds_j$, $k = 1, \dots, n$). Ainsi, si $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ sont deux systèmes de germes de fonctions holomorphes de n variables définissant tous les deux des suites régulières dans l'anneau local ${}_n\mathcal{O}$ et reliés par une identité matricielle $g = Af$, où A est une matrice à coefficients dans ${}_n\mathcal{O}$ dont A^t désignera la transposée, on retrouve (voir [**BoH1**]), en remarquant que

$$< s, g >=< s, Af >=< A^t s, f >$$

et en utilisant (0.1), la loi de transformation

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h_0 d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ f_1, \dots, f_n \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} h_0 \det A\, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ g_1, \dots, g_n \end{bmatrix}\,;$$

on obtient aussi de cette manière, au prix d'un travail supplémentaire basé sur l'utilisation des formules intégrales d'Andreotti-Norguet au lieu de celles du type Bochner-Martinelli, les versions généralisées de cette loi de transformation proposées par Kytmanov [**Kyt**], versions qui correspondent à la transcription, en termes de calcul résiduel, de la règle de Leibnitz (ou "chain rule") du calcul différentiel. Ce que nous souhaitons introduire ici, à travers la théorie des courants, est une présentation "infinitésimale" de ces formules intégrales, qui nous permettra de nous affranchir dans nos constructions de l'hypothèse de régularité portant sur la suite $(f_1, \dots, f_n)$ à laquelle est attaché l'objet résidu (hypothèse capitale dans toutes les réalisations algébriques effectives de la dualité). Il apparaitra alors que la non-validité de la loi de transformation présentera malgré tout un certain nombre d'avantages, dans la mesure où l'on pourra profiter du changement de section s pour fabriquer diverses formules de représentation intégrale faisant intervenir ces nouveaux courants résiduels. Nous donnerons certaines applications typiques de ce type de phénomène, les unes d'inspiration géométrique, les autres d'application algébrique, à travers des résultats récents issus de [**VY**] et de [**BY4**] qui mériteraient à notre avis d'être mieux compris dans ce qui devrait être leur cadre naturel, à savoir le cadre géométrique pour les uns ou le cadre algébrique pour les autres. L'objectif de cet exposé est de présenter un certain nombre d'objets, tous issus d'un regard analytique, mais qui nous paraissent de nature à pouvoir jouer un rôle dans l'optique d'une réalisation effective de la dualité hors du cadre des suites quasi-régulières (ou définissant une "intersection complète" si l'on pense en termes géométriques), seul cadre où jusqu'à ce jour, la théorie algébrique ou analytique des résidus s'avère un outil performant du point de vue opérationnel. Ce texte correspond pour l'essentiel à une conférence donnée dans le cadre du colloque de Géométrie Analytique Complexe organisé par F. Norguet et S. Ofman à l'Université Paris 7 en Juin 1998. C'est avec beaucoup de plaisir que je tiens à remercier les organisateurs de cette conférence pour leur gentillesse et l'excellente atmosphère qui, en plein Mondial, a prévalu tout au long de ces journées.

1. De nouvelles familles de courants résiduels

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à une famille finie de fonctions holomorphes (de n variables), $f_1, \dots, f_m$, dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$. C'est à cette famille que nous allons attacher un éventail de courants que l'on pourrait qualifier de "résiduels". Notons que les objets que nous allons introduire sont associés à la famille de fonctions (et à l'idéal $I(f_1, \dots, f_m)$ qu'elles engendrent dans l'anneau des fonctions holomorphes dans U) et non, comme c'est le cas dans les approches développées par Coleff-Herrera [**CoH**], puis par Dickenstein-Sessa [**DiS**], aux objets géométriques correspondants (disons les hypersurfaces réduites Y_j correspondant ensemblistement aux sous-ensembles analytiques $\{f_j = 0\}$ de U). En ce sens, notre approche est plus proche de celle de Passare [**P**] et de Tsikh [**T**].

La famille $f := (f_1, \dots, f_m)$ étant donnée, nous serons appelés à la "pondérer" de manière algébrique et géométrique. La pondération algébrique consiste en la donnée d'un m-uplet $(p_1, \dots, p_m)$ d'entiers positifs ou nuls. S'il est vrai que la relation

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} (\cdot) f_1^{p_1} \cdots f_m^{p_m} \\ f_1^{p_1+1}, \dots, f_m^{p_m+1} \end{bmatrix} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} (\cdot) \\ f_1, \dots, f_m \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

est une propriété fondamentale du calcul résiduel lorsque $m \le n$ et $(f_1, \dots, f_m)$ définissent une intersection complète dans U (auquel cas, l'égalité (1.1) est pensée comme une identité entre $(0, m)$-courants dans U et n'est que la traduction analytique dans un cas particulier de la loi de transformation), il n'en est certainement plus de même lorsque les f_j ne définissent plus une intersection complète dans U. Il est alors naturel d'introduire ce que nous appellerons une *pondération algébrique* des f_j par des exposants p_j pour construire des courants résiduels en s'inspirant de la représentation du courant résiduel dans le cas intersection complète sous la forme du membre de gauche de (1.1). Venons en maintenant à la pondération "géométrique". Notre objectif ultérieur est de considérer U comme un ouvert de carte d'une variété analytique complexe de dimension n et les f_j comme les sections globales de fibrés en droites sur lesquels on considèrera des métriques. Il est donc naturel de s'inspirer de la formule classique résultant du théorème d'isomorphisme de Dolbeault,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \varphi \\ f_1, \dots, f_m \end{bmatrix} = \\ &\lim_{\epsilon \mapsto 0} \frac{\gamma_m}{\epsilon^m} \int_{\left\{\sum_{j=1}^m \rho_j^2 |f_j|^{2(p_j+1)} = \epsilon\right\}} f^p \Big(\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \rho_k^2 \overline{f_k}^{p_k+1} \bigwedge_{l \ne k} \overline{\partial}(\rho_l^2 \overline{f_l}^{p_l+1}) \Big) \wedge \varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

valable toujours lorsque $m \le n$, les f_j définissant une intersection complète, φ étant une $(n, n-m)$ forme test $\overline{\partial}$-fermée au voisinage de $V(f) := \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$, et les ρ_j désignant des fonctions de classe C^1 et à valeurs strictement positives dans U, pour envisager une *pondération géométrique* des f_j correspondant à la donnée d'un m-uplet $(\rho_1,\dots,\rho_m)$ de fonctions réelles analytiques dans U, prenant toutes leurs valeurs dans $]0,\infty[$. On a de plus utilisé les notations abrégées

$$f^p := f_1^{p_1}\cdots f_n^{p_n}\,.$$

Cette pondération nous permettra de construire des courants résiduels en nous inspirant de la représentation du courant résiduel dans le cas intersection complète que donne le second membre de (1.2).

Le système de fonctions holomorphes $(f_1,\dots,f_m)$ ayant été fixé, ainsi que les pondérations algébrique $p=(p_1,\dots,p_m)$ et géométrique $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_m)$, nous sommes en mesure de définir nos courants résiduels. La construction est présentée dans [**PTY**] (sans pondération), puis dans [**BY4**] (avec pondération, ce qui n'affecte en fait que peu la preuve de l'existence des limites). À chaque sous-famille $\mathcal{I}:=\{i_1,\dots,i_r\}$ constituée de r éléments distincts de $\{1,\dots,m\}$, on associe un $(0,r)$ courant dans U défini par

$$\varphi\in\mathcal{D}^{(n,n-r)}(U)\mapsto \mathrm{Res}\begin{bmatrix}\varphi\\ f_{i_1},\dots,f_{i_r}\\ f\end{bmatrix}^{p,\rho} := \gamma_r[\Theta_\lambda]_0\,, \tag{1.3}$$

avec

$$\Theta_\lambda := \lambda\int_U \|f\|_{p,\rho}^{2(\lambda-r)}\overline{\partial}[\log\|f\|^2_{p,\rho}]\wedge f_{\mathcal{I}}^p\Big(\sum_{k=1}^r(-1)^{k-1}\rho_{i_k}^2\overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^r\overline{\partial}(\rho_{i_l}^2\overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1})\Big)\wedge\varphi\,,$$

où la notation $[\Theta_\lambda]_0$ signifie que Θ_λ est une fonction méromorphe du paramètre complexe λ, sans pôle à l'origine, de valeur en $\lambda=0$ précisément la quantité notée $[\Theta_\lambda]_0$, et

$$\|f\|^2_{p,\rho} := \sum_{j=1}^m \rho_j^2|f_j|^{2(p_j+1)}\,,\ f_{\mathcal{I}}^p := f_{i_1}^{p_{i_1}}\cdots f_{i_r}^{p_{i_r}}\,.$$

Notons que ce courant-et c'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons conservé la notation de symbole résiduel familière aux algébristes- dépend de manière alternée de l'ordre des éléments de $\mathcal{I}$. Il s'avère que la fonction méromorphe du paramètre λ figurant au second membre de (1.3) a tous ses pôles rationnels strictement négatifs et est à décroissance rapide uniforme sur toute bande verticale $\mathrm{Re}\,\lambda\in[\alpha,\beta]$ du plan complexe. On peut donc, en utilisant l'inversion de la transformation de Mellin, préférer à l'approche (1.3) l'approche plus directe

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}\begin{bmatrix}\varphi\\ f_{i_1},\dots,f_{i_r}\\ f\end{bmatrix}^{p,\rho} =\\ &=\lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\frac{\gamma_r}{\epsilon^r}\int_{\|f\|^2_{p,\rho}=\epsilon} f_{\mathcal{I}}^p\Big(\sum_{k=1}^r(-1)^{k-1}\rho_{i_k}^2\overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^r\overline{\partial}(\rho_{i_l}^2\overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1})\Big)\wedge\varphi\end{aligned} \tag{1.4}$$

ou encore, au prix de l'utilisation d'un théorème Taubérien élémentaire, l'approche

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad &\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \varphi \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,\rho} = \\
&= \lim_{\tau\mapsto 0^+} r\gamma_r\tau \int_U \frac{\overline{\partial}\|f\|^2_{p,\rho}\wedge f^p_{\mathcal{I}}\Big(\sum_{k=1}^r(-1)^{k-1}\rho^2_{i_k}\overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^r\overline{\partial}(\rho^2_{i_l}\overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1})\Big)}{\|f\|^2_{p,\rho}(\|f\|^2_{p,\rho}+\tau)^{r+1}}\wedge\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Les propriétés de ces courants ont été dégagées dans [**PTY**]; ils sont non triviaux seulement dans le cas où $d \le r \le \min(n,m)$, où d désigne la codimension de l'ensemble analytique $V(f)=\{f_1=\cdots=f_m=0\}$ par lequel ils sont d'ailleurs tous supportés. On a d'autre part

$$
\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \overline{h}\varphi \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,\rho} = 0 \tag{1.6}
$$

pour toute forme test $\varphi\in\mathcal{D}^{n,n-r}(U)$ et toute fonction h holomorphe dans U et s'annulant sur $V(f)$. On a enfin (et ce point est plus mystérieux)

$$
\operatorname{Res}\begin{bmatrix} h\varphi \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,\rho} = 0 \tag{1.7}
$$

pour toute forme test $\varphi\in\mathcal{D}^{n,n-r}(U)$ et toute fonction h holomorphe dans U telle que l'on ait, au voisinage de tout point de $V(f)$, une inégalité

$$
|f^p_{\mathcal{I}}h| \le c\Big(\sum_{j=1}^m |f_j|^{2(p_j+1)}\Big)^{\frac{r}{2}}\,, \tag{1.8}
$$

ou encore, de manière plus algébrique, lorsque le germe de $f^p_{\mathcal{I}}h$ en un point quelconque z de $V(f)$ appartient à la clôture intégrale (dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en z) de la puissance $r^{ème}$ de l'idéal engendré par les germes des $f_j^{p_j+1}$, $j=1,\dots,m$. Enfin, dans le cas $m\le n$ et où les f_j définissent une intersection complète, le seul courant non trivial (au signe près) de la famille de courants ainsi construite (en l'occurence le $(0,m)$ courant correspondant à l'ensemble $\mathcal{I}=\{1,\dots,m\}$) ne dépend ni de p, ni du choix de ρ et coïncide avec le courant résidu $\bigwedge_{j=1}^m \overline{\partial}(1/f_j)$ initialement construit par Coleff-Herrera. Si Coleff et Herrera ont aussi envisagé dans [**CoH**], comme Passare ultérieurement [**P**], le cas non-intersection complète, les objets introduits ci dessus ont le mérite, par rapport à ceux proposés dans ces travaux antérieurs, d'être portés par l'ensemble $V(f)$ et de dépendre de manière alternée de l'ordre dans lequel on prend les éléments extraits de la collection $(f_1,\dots,f_m)$ qui ont servi à les construire. Leur définition, via des versions infinitésimales des formules de représentation intégrale du type Bochner-Martinelli ou Andreotti-Norguet est assez naturelle, dans la mesure où c'est, on l'a vu, le changement de section dans de telles formules qui conditionne la loi de transformation et ses variantes dans le cas intersection complète. La liste de ces courants, lorsque le choix du paquet de fonctions extrait varie ainsi que les pondérations algébriques et géométriques, devrait rendre compte de propriétés de nature algébrique ou géométrique de l'idéal $(f_1,\dots,f_m)$.

On vérifie immédiatement que, si p et $\tilde p$ sont deux pondérations algébriques telles que $0\le \tilde p_j\le p_j$, $j=1,\dots,m$, alors, on a les égalités:

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} (\cdot) f_{i_1}^{\tilde p_{i_1}}\cdots f_{i_r}^{\tilde p_{i_r}} \\ f_{i_1}^{p_{i_1}+1},\dots,f_{i_r}^{p_{i_r}+1} \\ f^{p+\underline{1}}\end{bmatrix}^{p-\tilde p,\rho} = \operatorname{Res}\begin{bmatrix} (\cdot) \\ f_{i_1}^{p_{i_1}-\tilde p_{i_1}+1},\dots,f_{i_r}^{p_{i_r}-\tilde p_{i_r}+1} \\ f^{p-\tilde p+\underline{1}}\end{bmatrix}^{p,\rho} \tag{1.9}$$

pour toute sous famille d'indices $\{i_1,\dots,i_r\}$ de $\{1,\dots,m\}$.

Il s'avèrera important pour la suite d'enrichir notre collection de courants résiduels en introduisant un second mécanisme de pondération algébrique $q=(q_1,\dots,q_m)$ (permettant cette fois l'exploration des idéaux $(f_1^{q_1+1},\dots,f_m^{q_m+1})$, $q\in\mathbf{N}^m$) et, pour ce faire, d'introduire les courants résiduels définis comme suit: si $\mathcal{I}=\{i_1,\dots,i_r\}$ est toujours un sous-ensemble de $\{1,\dots,m\}$, pour toute forme test φ de type $(n,n-r)$, on pose

(1.10)

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} \varphi \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f\end{bmatrix}^{p,q,\rho} := \frac{(|q|+r-1)!(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{q!(2i\pi)^r}\times$$
$$\lim_{\epsilon\mapsto 0^+}\frac{1}{\epsilon^{r+|q|}}\int_{\|f\|^2_{p,\rho}=\epsilon}(\rho^2|f|^{2p}\overline{f})^q f_{\mathcal{I}}^p\Big(\sum_{k=1}^r(-1)^{k-1}\rho_{i_k}^2\overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^r\overline{\partial}(\rho_{i_l}^2\overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1})\Big)\wedge\varphi$$

où

$$|q|:=\sum_{j=1}^m q_j,\ \ q!:=\prod_{j=1}^m q_j!$$

et

$$(\rho^2|f|^{2p}\overline{f})^q:=\prod_{j=1}^m\rho_j^{2q_j}|f_j^{2p_jq_j}|\overline{f_j}^{q_j},.$$

Ces courants dépendent de manière alternée de l'ordre des i_k, et sont toujours annulés (en tant que courants) par toute fonction antiholomorphe dans U s'annulant sur l'ensemble $V(f)$ des zéros communs des f_j. Le courant correspondant au sous ensemble d'indices $\mathcal{I}$ est annulé, quant à lui, par toute fonction holomorphe h satisfaisant au voisinage de $V(f)$ une inégalité

$$|f_1^{p_1q_1}\cdots f_m^{p_mq_m}f_{i_1}^{p_{i_1}}\cdots f_{i_r}^{p_{i_r}}h|\le c\Big(\sum_{j=1}^m|f_j|^{2(p_j+1)}\Big)^{\frac{r+|q|}{2}}, \tag{1.11}$$

L'existence de ces courants se prouve exactement comme celle des courants correspondant à la pondération $q=0$. Dans le cas où $m\le n$ et $f_1,\dots,f_m$ définissent une suite régulière, ces courants sont nuls lorsque $\mathcal{I}$ est différent du sous ensemble $\{1,\dots,m\}$ et l'on a, comme conséquence des formules de représentation intégrale d'Andreotti-Norguet et de la méthode de tranchage proposée dans [**PTY**], section

4, le résultat suivant: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}^{n,n-m}(U)$,

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} \varphi \\ f_1,\dots,f_m \\ f \end{bmatrix}^{p,q,\rho} = \Big\langle \bigwedge_{j=1}^{m} \frac{1}{f_j^{q_j+1}}\,,\,\varphi\Big\rangle\,.$$

Ceci justifie notre affirmation précédente, selon laquelle la pondération q correspond à une hiérarchie "verticale" dans l'échelle des idéaux engendrés par les puissances des f_j, tandis que la pondération p correspond, elle, à une exploration "horizontale" (à niveau q fixé) de l'éventail de courants associé au système de générateurs $(f_1^{q_1+1},\dots,f_m^{q_m+1})$, $q \in \mathbf{N}^m$.

2. Courants résiduels et courants trace.

Une des formules clef de la théorie du potentiel en plusieurs variables complexes est la formule de Lelong; si $m \le n$ et $f_1,\dots,f_m$ sont m fonctions de n variables définissant une intersection complète dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, on a

$$(dd^c \log(|f_1|^2 + \cdots |f_m|^2))^m = [V(f)]\,, \tag{2.1}$$

où $[V(f)]$ désigne le courant d'intégration (avec multiplicités) sur le cycle intersection des cycles Z_j, $j=1,\dots,m$, associés aux idéaux principaux (f_j), $j=1,\dots,m$, et le produit de courants est défini suivant un principe itératif basé sur l'intégration par parties et sur le fait que $\log(|f_1|^2+\cdots+|f_m|^2)$ est une fonction plurisousharmonique. Si les f_j ne définissent plus une intersection complète, mais un sous ensemble analytique de U de codimension pure $1 \le d \le n$, on peut toujours définir suivant le même principe les puissances successives de $dd^c \log(|f_1|^2+\cdots+|f_m|^2)$, en particulier le courant positif

$$[(f_1,\dots,f_m)]_d := (dd^c \log(|f_1|^2+\cdots|f_m|^2))^d\,.$$

Ce courant s'avère être un courant "diffus" qui n'est plus supporté par l'ensemble analytique $V(f)$ (voir par exemple [**BT**] pour quelques exemples).

Il se trouve que l'idée qui consiste à approcher les courants résiduels ou les courants d'intégration via le prolongement analytique (comme le suggérait Gelfand) peut permettre de corriger un tant soit peu ce problème. On commence par remarquer, toujours lorsque $m \le n$ et $f_1,\dots,f_m$ définissent une intersection complète dans U, que, si $\|f\|^2 := |f_1|^2+\cdots+|f_m|^2$,

$$\Big(\frac{1}{2i\pi}\overline{\partial}(\|f\|^{2\lambda}\partial\log\|f\|^2)\Big)^m = \frac{(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} m!\lambda}{(2i\pi)^m}\|f\|^{2m(\lambda-1)}\overline{df}\wedge df\,,$$

où $df := \bigwedge\limits_{j=1}^{m} df_j$. Ainsi, comme cela était prévisible,

$$\left[\Big(\frac{1}{2i\pi}\overline{\partial}(\|f\|^{2\lambda}\partial\log\|f\|^2)\Big)^m\right]_{\lambda=0} = \overline{\partial}\frac{1}{f}\wedge df = [V(f)]\,,$$

où $\overline{\partial}(1/f)$ désigne le courant résidu relatif à $f_1,\dots,f_m$ (pris dans cette ordre) et l'on retrouve donc de manière approchée la formule de Lelong (2.1). Si maintenant, on ne suppose plus, ni que $m \le n$, ni que $f_1,\dots,f_m$ définissent une intersection complète, on remarque que, pour tout r entre 1 et $\min(m,n)$, pour tout choix p et

ρ de pondérations algébrique et géométrique comme dans la section précédente, on a

$$\Big(\frac{1}{2i\pi}\overline{\partial}(\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}\partial \log \|f\|_{p,\rho}^2)\Big)^r = \|f\|_{p,\rho}^{2r\lambda} A_{p,\rho}^{(r)} + r\lambda \|f\|_{p,\rho}^{2r\lambda} B_{p,\rho}^{(r)}\,, \tag{2.2}$$

où $A_{p,\rho}^{(r)}$ et $B_{p,\rho}^{(r)}$ sont des formes dépendant des f_j et régulières hors de $V(f)$. Mieux, on vérifie au prix d'un calcul aisé en suivant le prolongement analytique de l'identité (2.2) en fonction du paramètre λ, que

(2.3)

$$\Big[r\lambda \|f\|_{p,\rho}^{2r\lambda} B_{p,\rho}^{(r)}\Big]_{\lambda=0} = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m} \Big(\prod_{l=1}^r (p_{i_l}+1)\Big) \ \mathrm{Res} \begin{bmatrix} \Big(\bigwedge\limits_{l=1}^r df_{i_l}\Big)\wedge(\cdot) \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,\rho},$$

l'égalité (2.3) étant entendue comme une égalité au sens des courants. D'autre part, le coefficient constant dans le développement de

$$\lambda \mapsto \Big[\|f\|_{p,\rho}^{2r\lambda} A_{p,\rho}^{(r)}\Big]$$

au voisinage de $\lambda = 0$ est un certain courant (diffus dans U cette fois) que nous noterons

$$\Big[\|f\|_{p,\rho}^{2r\lambda} A_{p,\rho}^{(r)}\Big]_{\lambda=0}.$$

Notons que $A_{p,\rho}^{(m)} = 0$ lorsque $m \leq n$ indépendamment du choix des pondérations p et ρ.

Les courants qui semblent appelés à jouer le rôle du courant d'intégration une fois introduites les pondérations algébriques et géométriques p et ρ sont donc les courants définis, pour tout r entre codim $V(f)$ et $\min(m, n)$, par

(2.4)

$$[V(f)]_r^{p,\rho} :=$$

$$= \frac{1}{(p_1+1)\cdots(p_m+1)} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq m} \Big(\prod_{l=1}^r (p_{i_l}+1)\Big) \ \mathrm{Res} \begin{bmatrix} \Big(\bigwedge\limits_{l=1}^r df_{i_l}\Big)\wedge(\cdot) \\ f_{i_1},\dots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,\rho}.$$

Ce courant $[V(f)]_r^{p,\rho}$ est un courant de type (r, r); sa construction dépend du choix des pondérations p et ρ choisies. Nous renvoyons à [**BY4**] pour une preuve détaillée du résultat crucial suivant

Theorème 2.1. *Les courants $[V(f)]_r^{p,\rho}$ définis par les formules* (2.4) *pour r entre la codimension de l'ensemble analytique $V(f)$ et $\min(m, n)$, sont tous des courants positifs $\partial-$ et $\overline{\partial}$-fermés. Ce sont ces courants que l'on appellera courants-trace relativement au choix des pondérations géométriques p et ρ. Si $m \leq n$ et $f_1, \dots, f_m$ définissent une intersection complète dans U, alors, il n'y a qu'un seul courant trace, celui correspondant à $r = m$; c'est le courant d'intégration avec multiplicités $[V(f)]$ et il est en particulier indépendant des pondérations p et ρ.*

Esquisse de preuve. La preuve de ce résultat, qui se fait dans un premier temps lorsque les ρ_j sont des constantes, fait apparaitre diverses expressions pour l'expression de l'action du courant $[V(f)]_r^{p,\rho}$, toutes basées sur l'utilisation de l'une

des formules (1.3), (1.4) ou (1.5). Par exemple, on a, pour toute forme test de type $(n-r, n-r)$,
(2.5)

$$\begin{aligned}
< [V(f)]_r^{p,\rho}, \varphi > &= \left[\frac{\lambda(r-1)!}{(2i\pi)^r} \int_U \|f\|_{p,\rho}^{2\lambda} \frac{\overline{\partial}\|f\|_{p,\rho}^2}{\|f\|_{p,\rho}^2} \wedge \frac{\partial\|f\|_{p,\rho}^2}{\|f\|_{p,\rho}^2} \wedge \Phi_{f,p,\rho}^{(r)} \wedge \varphi \right]_{\lambda=0} \\
&= \lim_{\epsilon\mapsto 0^+} \frac{(r-1)!}{(2i\pi\epsilon)^r} \int_{\|f\|_{p,\rho}^2=\epsilon} \partial\|f\|_{p,\rho}^2 \wedge \Psi_{f,p,\rho}^{(r)} \wedge \varphi \\
&= -\lim_{\epsilon\mapsto 0^+} \frac{(r-1)!}{(2i\pi\epsilon)^r} \int_{\|f\|_{p,\rho}^2=\epsilon} \overline{\partial}\|f\|_{p,\rho}^2 \wedge \Psi_{f,p,\rho}^{(r)} \wedge \varphi \\
&= \lim_{\tau\mapsto 0^+} \frac{\tau r!}{(2i\pi)^r} \int_U \frac{\overline{\partial}\|f\|_{p,\rho}^2 \wedge \partial\|f\|_{p,\rho}^2 \wedge \Phi_{f,p,\rho}^{(r)}}{\|f\|_{p,\rho}^2(\|f\|_{p,\rho}^2+\tau)^{r+1}} \wedge \varphi \,,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_{f,p,\rho}^{(r)} &:= \frac{1}{\prod_{k=1}^m (p_k+1)} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{r-1}\leq m} \bigwedge_{l=1}^{r-1} \overline{\partial}(\rho_{i_l}\overline{f}_{i_l}^{p_{i_l}+1}) \wedge \partial(\rho_{i_l} f_{i_l}^{p_{i_l}+1}) \\
\Psi_{f,p,\rho}^{(r)} &:= \frac{1}{\prod_{k=1}^m (p_k+1)} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{r-1}\leq m} \bigwedge_{l=1}^{r-1} d(\rho_{i_l}\overline{f}_{i_l}^{p_{i_l}+1}) \wedge d(\rho_{i_l} f_{i_l}^{p_{i_l}+1}) \,.
\end{aligned}$$

Les diverses formules (2.5) permettent de vérifier immédiatement la positivité du courant (grâce à la quatrième de ces formules) et le fait qu'il soit ∂-fermé (suivant la seconde) et $\overline{\partial}$-fermé (suivant la troisième). Notons aussi que les formules (2.5) induisent immédiatement les relations

$$[V(f)]_r^{p,\rho} = \frac{[V(f_1^{p_1+1}, \ldots, f_m^{p_m+1})]_r^{0,\rho}}{(p_1+1)\cdots(p_m+1)} \,,$$

ce qui ramène tous les calculs au cas $p=0$. □

Si les calculs de ces courants-trace s'avèrent très difficiles en général, nous donnerons ici un exemple simple où ces calculs peuvent être menés à bien lorsque $m = r \leq n$ et-pour simplifier-les ρ_j toutes égales à 1 (ce qui signifie que l'on ne prend pas en compte de pondération géométrique). Il n'y a dans ce cas, la pondération algébrique $p = (p_1, \ldots, p_m)$ étant donnée, qu'un seul courant résiduel (que nous noterons T_m^p) de type $(0, m)$ relié au courant d'intégration $[V(f)]_m^p$ par la formule de factorisation

$$[V(f)]_m^p = T_m^p \wedge df$$

où $df = df_1 \wedge \cdots \wedge df_m$. Nous allons voir, lorsque $m = n$, que le calcul de l'action de T_n^p, donc aussi celle de $[V(f)]_n^p$, peut s'approcher par des calculs de pseudo-intégrales de Mellin-Barnes en plusieurs variables, suivant une idée due à M. Passare et A. Tsikh. Ce courant est aisé à calculer, en utilisant la proposition 3.1 de [**PTY**], lorsque $m = n$ et les f_j sont des monômes, i.e

$$f_j(\zeta) = \zeta_1^{\alpha_{j1}} \cdots \zeta_n^{\alpha_{jn}}, \ j = 1, \ldots, n \,.$$

Dans ce cas, on remarque que

$$< [V(f)]^p_n, \varphi >= \frac{< [V(\tilde{f})]^0_n, \varphi >}{(p_1+1)\cdots(p_n+1)}\,,$$

où $\tilde{f}_j = f_j^{p_j+1}$. Soit K_p le cône réel

$$K_p := \{x \in \mathbf{R}^n ; \sum_{j=1}^n (p_j+1)\alpha_{jk} x_j \geq 0,\ k = 1,\ldots,n\}\,.$$

Lorsque p est tel que $K_p \cap \{x \in \mathbf{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 0\} = \{0\}$ (et l'on peut toujours choisir la pondération algébrique pour qu'il en soit ainsi lorsque K_0 est un cône strict), on trouve, d'après le résultat de la proposition 3.1 de [**PTY**],

$$< [V(f)]^p_n, \varphi >= |\det[\alpha_{jk}]|\ \varphi(0)\,.$$

Dans les autres cas, le courant $[V(f)]^p_n$ est soit le courant nul, lorsque p est tel que $K_p \cap \{x \in \mathbf{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 0\}$ est un cône de dimension n), soit un courant à densité supporté par les axes, mais non concentré à l'origine, sinon (il faut alors discuter suivant la codimension dans $\mathbf{R}^n$ du cône $K_p \cap \{x \in \mathbf{R}^n,\ x_1 + \cdots + x_n \leq 0\}$). Le courant peut en tout cas être totalement explicité en utilisant la formule donnée dans l'énoncé de la Proposition 3.1 de [**PTY**].

3. Formules intégrales de type Cauchy-Weil.

Dans cette section, nous considérons toujours m fonctions holomorphes de n variables complexes, $f_1,\ldots,f_m$, dans un ouvert U de $\mathbf{C}^n$, ainsi qu'un choix (p,ρ) de pondérations algébriques et géométriques. Considérons, dans $U \times \mathbf{C}^m$ (les variables étant dénotées $\zeta_1,\ldots,\zeta_n,y_1,\ldots,y_m$), la $(1,0)$ forme différentielle

$$Q_{p,\rho,\lambda} := \|f(\zeta)\|^{2(\lambda-1)}_{p,\rho} \sum_{j=1}^m \overline{f_j(\zeta)} dy_j$$

associée au paramètre complexe pour l'instant arbitraire λ. Un calcul algébrique formel facile nous montre que, pour tout entier $r \in \{1,...,\min(m,n)\}$,

$$(\overline{\partial} Q_{p,\rho,\lambda})^r = \|f\|^{2r\lambda}_{p,\rho} \Big[(\overline{\partial} Q_{p,\rho,0})^r + \lambda r \overline{\partial} \log \|f\|^2_{p,\rho} \wedge Q_{p,\rho,0} \wedge (\overline{\partial} Q_{p,\rho,0})^{r-1} \Big]$$

et que

$$\begin{aligned} Q_{p,\rho,0} \wedge (\overline{\partial} Q_{p,\rho,0})^{r-1} &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (r-1)!\ \|f(\zeta)\|^{-2r}_{p,\rho} \times \\ \times \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} &\Big(\sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} \rho^2_{i_k} \overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1} \bigwedge_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^r \overline{\partial}(\rho^2_{i_l} \overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1}) \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{k=1}^r dy_k \Big)\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

La formule de Cauchy-Weil dans le cas classique où $f_1,\ldots,f_n$ définissent une suite régulière dans l'anneau local ${}_n\mathcal{O}$ s'énonce de la manière suivante: pour tout $h \in {}_n\mathcal{O}$, on a le développement suivant (convergent dans $\mathcal{O}_n$)

$$h = \sum_{q \in \mathbf{N}^n} \operatorname{Res} \begin{bmatrix} h(\zeta) \det[g_{jl}(\cdot,\zeta)] d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ f_1^{q_1+1}(\zeta),\ldots,f_n^{q_n+1}(\zeta) \end{bmatrix} f_1^{q_1} \cdots f_n^{q_n} \tag{3.2}$$

où les g_{jl}, $1 \leq j, l \leq n$, sont des diviseurs de Oka-Hefer, c'est à dire des germes à l'origine de fonctions holomorphes en $2n$ variables z, ζ tels que

$$f_j(z) - f_j(\zeta) = \sum_{l=1}^{n} g_{jl}(z,\zeta)(z_l - \zeta_l), \ j = 1, \dots, n \tag{3.3}$$

au voisinage de l'origine. Une forme faible de cette formule (on ne retient que la convergence en termes de série formelle et non la convergence dans ${}_n\mathcal{O}$) consiste à dire que pour tout $h \in {}_n\mathcal{O}$, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$h \equiv \sum_{q \in \{0,\dots,N\}^n} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} h(\zeta) \det[g_{jl}(\cdot,\zeta)] d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \\ f_1^{q_1+1}(\zeta), \dots, f_n^{q_n+1}(\zeta) \end{bmatrix} f_1^{q_1} \cdots f_n^{q_n} \tag{3.4}$$

modulo $(f_1^{N+1}, \dots, f_n^{N+1})$. C'est sous cette forme que nous allons proposer une version plus générale de la formule de Cauchy-Weil, lorsque les germes f_j, $j = 1, \dots, m$, ne définissent plus une suite régulière dans ${}_n\mathcal{O}$, ni même (comme c'est le cas dans les formules de représentation proposées dans [**Har**]), un germe d'application propre.

Nous considérons ici m germes de fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_m$ en n variables (que nous supposerons relevés en des représentants dans une boule $B_n(0,R)$). Pour la commodité des formules que nous écrirons ci dessous, nous supposerons dans un premier temps que $m < n$, ce qui n'est pas restrictif, puisque nous pouvons toujours ajouter des variables "muettes" n'intervenant pas dans l'expression des f_j. Nous associerons aux f_j des systèmes de diviseurs de Oka-Hefer $(g_{jl})_l$, $j = 1, \dots, m$, et nous conviendrons de noter

$$G_j(z,\zeta) := \sum_{k=1}^{n} g_{jk}(z,\zeta) d\zeta_k\,, \ j = 1, \dots, m\,.$$

Nous supposerons que $f_1, \dots, f_m$ définissent un ensemble analytique $V(f)$ de codimension d (non nécessairement de codimension pure, la codimension étant entendue comme n moins la dimension maximale des composantes) et que les constantes strictement positives R' et R'' sont choisies de manière à ce que le produit $\Delta := B_{n-d}(0,R') \times B_d(0,R'')$ soit d'adhérence incluse dans $B_n(0,R)$, et tel que la restriction de la projection $(\zeta', \zeta'') \mapsto \zeta'$ à $B_{n-d}(0,R') \times B_d(0,R'')$ soit une application propre. On suppose de plus

$$\left[\overline{B_{n-d}(0,R')} \times \partial B_d(0,R'')\right] \cap V(f) = \emptyset. \tag{3.5}$$

Introduisons une application s des $n-d$ variables ζ' de classe C^1 au voisinage de $\{\|\zeta'\| = R'\}$ telle que

$$< s(\zeta'), \zeta' >= \sum_{j=1}^{n-d} s_j(\zeta')\zeta'_j \neq 0$$

dans ce voisinage. On note

$$\Sigma(\zeta') = \sum_{j=1}^{n-d} s_j(\zeta') d\zeta'_j\,.$$

et, pour tout k entre 1 et $n-d$,

$$\Sigma_k(\zeta') = \frac{1}{(2i\pi)^k} \Sigma(\zeta') \wedge [\overline{\partial}\Sigma(\zeta')]^{k-1}\,.$$

Nous choisissons enfin une fonction φ de classe C^∞, à support compact dans Δ, identiquement égale à 1 au voisinage de l'origine, et telle que

$$< s(\zeta'), \zeta' > \neq 0$$

au voisinage de $\mathrm{Supp}\,(d\varphi) \cap V(f)$ (ce qui est loisible sous l'hypothèse (3.5)).
Toutes ces précisions ayant été données, nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 3.1. *Soient p et ρ des pondérations algébrique et géométrique relatives au système de fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_m$ de n variables, avec $m < n$. Pour tout $h \in {}_n\mathcal{O}$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a*
(3.6)

$$h(z) \equiv$$

$$- \sum_{q \in \{0,\ldots,N\}^m} \sum_{r=d}^{m} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} h\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma_{n-r}(\zeta') \wedge \left(\bigwedge\limits_{l=1}^{r} G_{i_l}(z,\zeta)\right)}{<s(\zeta'), \zeta' - z'>^{n-r}} \\ \\ f_{i_1}, \ldots, f_{i_r} \\ \\ f \end{bmatrix}^{p,q,\rho} f^q(z)$$

modulo l'idéal engendré par $(f_1^{N+1}, \ldots, f_m^{N+1})$ avec toujours les notations standard $f^q = f_1^{q_1} \cdots f_m^{q_m}$. Si maintenant on suppose $m \ge n$ et l'idéal $(f_1, \ldots, f_m)$ $\mathcal{M}$-primaire, où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$, alors la formule développée de Cauchy-Weil se lit aussi comme la suite de congruences
(3.7)

$$h(z) \equiv \sum_{\substack{q \in \{0,\ldots,N\}^m \\ 1 \le i_1 \le \cdots \le i_n \le m}} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} h \bigwedge\limits_{l=1}^{n} G_{i_l}(z,\zeta) \\ f_{i_1}, \ldots, f_{i_n} \\ f \end{bmatrix}^{p,q,\rho} f^q(z) \quad \mathrm{mod}\ (f_1^{N+1}, \ldots, f_m^{N+1})$$

et ce pour tout N dans $\mathbf{N}$.

REMARQUE 3.1. Dans le cas particulier où $f_1, \ldots, f_m$ définissent une intersection complète, la formule se ramène via Stokes à la liste de congruences

$$h(z) \equiv - \sum_{q \in \{0,\ldots,N\}^m} \mathrm{Res} \begin{bmatrix} h\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma_{n-m}(\zeta') \wedge \left(\bigwedge\limits_{j=1}^{m} G_j(z,\zeta)\right)}{<s(\zeta'), \zeta' - z'>^{n-m}} \\ \\ f_1^{q_1+1}, \ldots, f_m^{q_m+1} \end{bmatrix} f^q(z)$$

modulo $(f_1^{N+1}, \ldots, f_m^{N+1})$, ce pour tout N dans $\mathbf{N}$.

PREUVE DU THÉORÈME 3.1. La preuve de (3.6) (sous l'hypothèse $m < n$) est basée sur l'utilisation des formules de Bochner-Martinelli pondérées. On introduit, λ désignant un paramètre complexe de partie réelle assez grande, la forme différentielle

$$Q_\lambda(z, \zeta) = \|f\|_{p,\rho}^{2(\lambda-1)} \Big(\sum_{j=1}^{m} \rho_j^2 |f_j|^{2p_j} \overline{f_j} G_j(z, \zeta) \Big).$$

On a alors, au voisinage de l'origine, la formule de représentation intégrale pour h (on pourra se référer aux formules de Bochner-Martinelli pondérés introduites dans

[**Bern**], en s'inspirant de la manière dont elles sont utilisées par exemple dans la section 5 de [**DiG**])
(3.8)

$$(2i\pi)^n h(z) =$$

$$-\int_\Delta h\Bigg(\sum_{r=0}^{m}\binom{N+m}{r}\left[1-\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}+\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j^2|f_j|^{2p_j}\overline{f_j}f_j(z)}{\|f\|_{p,\rho}^2}\right]^{N+m-r}\times$$

$$\times\,\overline{\partial}\varphi\wedge\frac{\Sigma_{n-r}(\zeta')}{< s(\zeta'),\zeta'-z'>^{n-r}}\Bigg)\wedge\Big(\overline{\partial}Q_\lambda(z,\zeta)\Big)^r.$$

On considère ensuite l'identité (3.8) comme une identité entre deux fonctions du paramètre λ admettant toutes les deux un prolongement méromorphe dans tout le plan complexe. En identifiant le coefficient de λ^0 dans le développement de Laurent du second membre de (3.8) au voisinage de l'origine avec $h(z)$, on obtient la formule (3.6). En ce qui concerne la preuve de (3.7), oubliant la condition $m \leq n$, on écrit la formule de représentation complète qui cette fois devient
(3.8')

$$(2i\pi)^n h(z) =$$

$$-\int_\Delta h\Bigg(\sum_{r=0}^{n-1}\binom{N+m}{r}\left[1-\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}+\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j^2|f_j|^{2p_j}\overline{f_j}f_j(z)}{\|f\|_{p,\rho}^2}\right]^{N+m-r}\times$$

$$\times\,\overline{\partial}\varphi\wedge\frac{\Sigma_{n-r}(\zeta')}{< s(\zeta'),\zeta'-z'>^{n-r}}\Bigg)\wedge\Big(\overline{\partial}Q_\lambda(z,\zeta)\Big)^r+$$

$$\int_\Delta h\binom{N+m}{n}\left[1-\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}+\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\rho_j^2|f_j|^{2p_j}\overline{f_j}f_j(z)}{\|f\|_{p,\rho}^2}\right]^{N+m-n}\Big(\overline{\partial}Q_\lambda(z,\zeta)\Big)^n$$

On reprend ensuite le même raisonnement. □

REMARQUE 3.2. On peut montrer, en utilisant par exemple l'équation fonctionnelle de Bernstein (voir par exemple [**Bjo1**] et [**Bjo2**])

$$\mathcal{Q}(\lambda,\zeta,\partial,\overline{\partial})\|f\|_{p,\rho}^{2(\lambda+1)} = b(\lambda)\|f\|_{p,\rho}^{2\lambda}$$

($b \in \mathbf{Q}[\lambda]$) qui régit le prolongement analytique de

$$\lambda \mapsto \|f\|_{p,\rho}^{2\lambda},$$

que le second membre de (3.6) ou (3.7) définit un développement convergent au voisinage de l'origine. Il suffit pour cela de remarquer que, pour tout q dans $\mathbf{N}^n$, pour tout sous-ensemble ordonné $\mathcal{I} = \{i_1, ..., i_r\}$ de $\{1, ..., m\}$, l'action du courant résiduel

$$\mathrm{Res}\begin{bmatrix} (\cdot) \\ f_{i_1},\ldots,f_{i_r} \\ f \end{bmatrix}^{p,q,\rho}$$

sur une $(n, n-r)$ forme-test φ s'exprime comme la valeur en 0 de la fonction méromorphe

$$\lambda \mapsto \lambda \frac{(|q|+r-1)!(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{q!(2i\pi)^r} \int_{\mathbf{C}^n} \|f\|_{p,\rho}^{2(\lambda-r-1-|q|)}\, \Omega_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I}) \wedge \varphi\,,$$

où

$$\Omega_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I}) := (\rho^2|f|^{2p}\overline{f})^q f_{\mathcal{I}}^p\, \overline{\partial}\|f\|_{p,\rho}^2 \wedge \Big(\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\rho_{i_k}^2\, \overline{f_{i_k}}^{p_{i_k}+1} \bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{r} \overline{\partial}(\rho_{i_l}^2 \overline{f_{i_l}}^{p_{i_l}+1})\Big)$$

(via la transformation de Mellin dans (1.10)). On peut transformer l'expression obtenue grâce à $r+|q|+2$ itérations de l'équation fonctionnelle de Bernstein et ensuite l'estimer en module par

$$A(\varphi;b;r)\frac{(|q|+r-1)!}{q!} \sup_{\substack{\zeta\in \mathrm{Supp}\ \varphi\\ |\lambda|=\eta}} \|f\|_{p,\rho}^{2(\lambda+1)} \Big|(\mathcal{Q}^*)^{r+|q|+2}(\lambda,\zeta,\partial,\overline{\partial})\big[\Theta_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I};\varphi)\big]\Big|\,,$$

où $\eta>0$ est choisi strictement inférieur à la distance entre -1 et les autres racines de b, $\mathcal{Q}^*$ désigne l'adjoint de $\mathcal{Q}$, et l'expression $\Theta_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I};\varphi)$ provient de l'identité

$$\Omega_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I}) \wedge \varphi = \Theta_{p,\rho,q}(f;\mathcal{I};\varphi) d\overline{\zeta} \wedge d\zeta\,.$$

La convergence des développements (3.6) ou (3.7) au voisinage de l'origine résulte de ces estimations et du fait que ρ est une pondération réelle analytique.

Sur le principe des formules (3.6) ou (3.7), il est possible de construire d'autres familles de courants résiduels, générant d'autres formules de représentation du type Cauchy-Weil développé. Par exemple, nous pouvons définir une seconde collection de symboles résiduels, indexée cette fois par les sous-ensembles ordonnés $\mathcal{I}$ de $\{1,...,m\}$, par les éléments $p\in\mathbf{N}^m$ et les directions $t\in]0,+\infty[^m$ (on oublie ici la pondération géométrique en prenant $\rho=\underline{1}$). On définit l'action d'un $(0,r)$ (où $r:=\#\mathcal{I}$) courant en posant, φ désignant une forme test de type $(n,n-r)$,

$$\mathrm{Res}\left[\left[\begin{matrix}\varphi\\ f_{i_1},\dots,f_{i_r}\\ f\end{matrix}\right]\right]_t^{(p,0)} := \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} r!}{(2i\pi)^r}\times$$
$$\times\left[\lambda\int \frac{|f|^{2tr\lambda}\ |f_{\mathcal{I}}|^{2p}}{\|f\|_{p,\underline{1}}^{2r}}\,\omega_t[f]\wedge\Big(\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}(p_{i_k}+1)\overline{f_{i_k}}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{r}\overline{df_{i_l}}\Big)\wedge\varphi\right]_{\lambda=0}$$

où

$$|f|^{2tr\lambda} := \prod_{j=1}^{m}|f_j|^{2rt_j\lambda}\,,\ |f_{\mathcal{I}}|^{2p} := \prod_{k=1}^{r}|f_{i_k}|^{2p_{i_k}}\,,\ \omega_t[f] := \sum_{j=1}^{m} t_j\frac{\overline{df_j}}{\overline{f_j}}\,.$$

On génère aussi à partir de cette famille (induisant en quelque sorte une exploration "horizontale" de la gamme des idéaux résiduels correspondant à l'idéal $(f_1,\dots,f_m)$), une exploration "verticale" de la gamme des idéaux du type

$$(f_1^{q_1+1},\dots,f_m^{q_m+1})\,,\ q\in\mathbf{N}^m\,.$$

Étant donné un tel multiindice q, une partie ordonnée $\mathcal{I}$ de $\{1,...,m\}$ de cardinal r et deux pondérations $p \in \mathbf{N}^m$, $t \in]0,\infty[^m$, on définit l'action d'un $(0,r)$ courant sur une forme test φ par

$$\mathrm{Res}\left[\left[\begin{matrix}\varphi\\ f_{i_1},\dots,f_{i_r}\\ f\end{matrix}\right]\right]_t^{(p,q)} := \frac{(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}(r+|q|)!}{(2i\pi)^r}\times$$

$$\left[\lambda\int\frac{|f|^{2t(|q|+r)\lambda}\,|f_{\mathcal{I}}|^{2p}|f|^{2q}\overline{f}^q}{\|f\|_{p,\underline{1}}^{2r}}\omega_t[f]\wedge\Big(\sum_{k=1}^r(-1)^{k-1}(p_{i_k}+1)\overline{f_{i_k}}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^r\overline{df_{i_l}}\Big)\wedge\varphi\right]_{\lambda=0}$$

avec

$$|q| := q_1+\cdots+q_m,\ |f|^{2q} = |f_1|^{2q_1}\cdots|f_m|^{2q_m},\ \overline{f}^q := \overline{f_1}^{q_1}\cdots\overline{f_m}^{q_m}$$

Dans ce cas, on obtient des analogues aux formules (3.6) et (3.7), mais en remplacant les symboles résiduels $\mathrm{Res}\,[\cdot]^{p,q,\rho}$ par les nouveaux symboles $\mathrm{Res}[[\cdot]]_t^{p,q}$. Le principe de démonstration est en tout point identique, excepté que l'on travaille cette fois avec la forme différentielle

$$Q^\lambda(z,\zeta) := |f_1|^{2t_1\lambda}\cdots|f_m|^{2t_m\lambda}\frac{\Big(\sum_{j=1}^m|f_j|^{2p_j}\overline{f_j}G_j(z,\zeta)\Big)}{\|f\|_{p,\underline{1}}^2},$$

indexée par un paramètre complexe de partie réelle prise au départ arbitrairement grande, et que l'on suivra ensuite grâce au prolongement analytique.

Les formules de Cauchy-Weil obtenues sont, lorsque $f_1,\dots,f_m$ ne définissent plus une intersection complète, de mauvaises formules de division-interpolation, au sens où la formule écrite au cran N ne respecte pas l'appartenance (si appartenance il y a) de h à l'idéal $(f_1^{N+1},\dots,f_m^{N+1})$. Pour s'en convaincre, on remarque que, si les m_0 premiers éléments $f_1,\dots,f_{m_0}$ définissent une intersection complète, tandis que $f_{m_0+1},\dots,f_m$ sont dans le radical de l'idéal $(f_1,\dots,f_{m_0})$, alors la formule (3.6) obtenue avec une pondération algébrique du type $p_j=0$, $j=1,\dots,m_0$, $p_j=P$, $j=m_0+1,\dots,m$, avec P arbitrairement grand, devient la formule

$$h(z)\equiv-\sum_{q\in\{0,\dots,N\}^{m_0}}\mathrm{Res}\left[\begin{matrix}h\overline{\partial}\varphi\wedge\frac{\Sigma_{n-m_0}(\zeta')\wedge\big(\bigwedge_{j=1}^{m_0}G_j(z,\zeta)\big)}{<s(\zeta'),\zeta'-z'>^{n-m_0}}\\ f_1^{q_1+1},\dots,f_{m_0}^{q_{m_0}+1}\end{matrix}\right]f_1^{q_1}(z)\cdots f_{m_0}^{q_{m_0}}(z)$$

modulo $(f_1^{N+1},\dots,f_m^{N+1})$. Cependant, on peut se poser la question de savoir si un choix judicieux des pondérations algébriques (p dans le premier cas, (p,t) dans le second cas) ne conduirait pas à ce qui serait cette fois une “bonne” formule de division-interpolation au cran N.

Applications

4.1 Formules de Jacobi généralisées

Soient P_1, ..., P_n, n polynômes de n variables induisant sur $\mathbf{P}^n$ des diviseurs de Cartier effectifs $\mathcal{D}_1$, ..., $\mathcal{D}_n$ dont l'intersection des supports est incluse dans $\mathbf{C}^n$ (ce qui signifie que les parties homogènes de plus haut degré des P_j définissent l'origine comme seul zéro commun). Alors, c'est un résultat classique de Jacobi que

$$\deg Q \leq \sum_{j=1}^{n} \deg P_j - n - 1 \Longrightarrow \mathrm{Res}\begin{bmatrix} Q(X)dX \\ P_1, \ldots, P_n \end{bmatrix} = 0 \tag{4.1}$$

(par le symbole de droite, nous entendons la somme complète de tous les résidus locaux aux points de la variété $V(P)$, forcément compacte -donc finie- des zéros communs des P_j dans $\mathbf{C}^n$). Le fait que les $\mathcal{D}_j$ s'intersectent proprement dans $\mathbf{P}^n$ joue un rôle essentiel dans la preuve (et l'interprétation géométrique) de ce résultat. Il existe d'ailleurs une version torique du théorème de Jacobi, due à Khovanski [**Kho**] et que l'on peut formuler de manière quasiment identique: si $F_1, \ldots, F_n$, sont n polynômes de Laurent de polyèdres de Newton respectifs Δ_1,..., Δ_n, tels que les diviseurs de Cartier effectifs $\mathrm{div}(F_j) + E(\Delta_j)$ sur une variété torique $\mathcal{X}$ lisse associée à un raffinement de l'éventail correspondant au polyèdre $\Delta_1 + \cdots + \Delta_n$ (ici $E(\Delta_j)$ désigne le $\mathbf{T}$-diviseur de Cartier sur $\mathcal{X}$ correspondant à Δ_j) aient des supports dont l'intersection est incluse dans $\mathbf{T}^n$, et si G est un polynôme de Laurent, alors

$$\mathrm{Supp}\, G \subset \mathrm{int}(\Delta_1 + \cdots + \Delta_n) \Longrightarrow \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{T}^n \\ F(\alpha)=0}} \mathrm{Res}_\alpha \left[\frac{G}{F_1 \cdots F_n} \frac{d\zeta}{\zeta_1 \cdots \zeta_n}\right] = 0 \tag{4.2}$$

(par intérieur d'un polyèdre, on entend ici son intérieur relatif, soit l'intérieur dans le sous-espace affine engendré par les sommets du polyèdre).

Ces deux énoncés s'étendent au cas où les P_j (resp. les F_j) n'induisent plus sur $\mathbf{P}^n$ (resp. sur une variété torique lisse associée à un éventail compatible avec les polyèdres de Newton Δ_j qui leur correspondent) n diviseurs dont l'intersection des supports est incluse dans $\mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{T}^n$). Les deux résultats dans cette direction sont les suivants [**VY**]:

THÉORÈME 4.1. *On suppose que $P_1, \ldots, P_n$ sont n polynômes de n variables et qu'il existe des nombres rationnels $\delta_1, \ldots, \delta_n$ (non nécessairement positifs) et des constantes $R \geq 0$, $c > 0$, telles que*

$$\|\zeta\| \geq R \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|P_j(\zeta)|}{\|\zeta\|^{\delta_j}} \geq c\,. \tag{4.3}$$

Alors, les P_j, $j = 1, \ldots, n$, définissent une variété algébrique $V(P)$ discrète -donc finie- dans $\mathbf{C}^n$, et pour tout polynôme Q de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\deg Q \leq \sum_{j=1}^{n} \delta_j - n - 1 \Longrightarrow \mathrm{Res}\begin{bmatrix} Q(X)dX \\ P_1, \ldots, P_n \end{bmatrix} = 0\,. \tag{4.4}$$

THÉORÈME 4.2. *On suppose que $F_1, \ldots, F_n$, sont n polynômes de Laurent en n variables et qu'il existe des polyèdres rationnels $\delta_1, \ldots, \delta_n$, dont la somme de Minkowski est un polyèdre de même dimension que celle de la somme des polyèdres de Newton des F_j, et des constantes $R \geq 0$, $c > 0$, telles que*

$$\|Re(\zeta)\| \geq R \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{|F_j(e^{\zeta_1}, \ldots, e^{\zeta_n})|}{\exp(\max\limits_{\xi \in \delta_j} \mathrm{Re} < \xi, \zeta >)} \geq c\,. \tag{4.5}$$

Alors, les F_j, $j=1,\dots,n$, définissent une variété algébrique $V^*(F)$ discrète -donc finie- dans $\mathbf{T}^n$, et pour tout polynôme de Laurent G en n variables,

$$\text{Supp}\, G \subset \text{int}(\delta_1+\cdots+\delta_n) \Longrightarrow \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{T}^n\\ F(\alpha)=0}} \text{Res}_\alpha \left[\frac{G}{F_1\cdots F_n}\,\frac{d\zeta}{\zeta_1\cdots\zeta_n}\right]=0\,. \tag{4.6}$$

Remarque 4.1. Si les δ_j coïncident avec les degrés des P_j (tous supposés strictement positifs) dans l'énoncé du théorème 4.1, nous retrouvons le résultat de Jacobi. Si les δ_j coïncident avec les polyèdres de Newton des F_j, nous retrouvons avec le théorème 4.2 le résultat de Khovanskii.

Esquisses de preuve pour les théorèmes 4.1 et 4.2. Les deux preuves sont formellement identiques et détaillées dans [**VY**]. Parce que l'argument sur lequel elles se base illustre l'idée de pondération géométrique introduite lors de la construction de nos courants résiduels, nous l'esquisserons ici. Nous sommes dans les deux cas dans des situations de *non intersection complète*, non certes dans $\mathbf{C}^n$ (théorème 4.1) ou $\mathbf{T}^n$ (théorème 4.2), mais dans un voisinage de l'hyperplan à l'infini $\{X_0=0\}$ dans le premier cas, ou du complémentaire du tore dans une compactification torique compatible avec tous les polyèdres en jeu dans le second cas, voisinage dans lequel les diviseurs induits par les P_j (ou les F_j) s'intersectent cette fois non nécessairement de manière transverse, au contraire de ce qui se passe dans les énoncés classiques de Jacobi ou Khovanskii.

On remarque d'abord que l'on ne perd pas en généralité en se ramenant au cas où les nombres (resp. les polyèdres δ_j) sont tous entiers (resp. à sommets dans $\mathbf{Z}^n$) pour $j=1,\dots,n$. Ceci résulte des formules de changement de base dans le calcul résiduel (voir par exemple [**Li**]).

Pour la preuve du théorème 4.1, on choisit ensuite un entier $M>0$ tel que $\delta_j+M\geq \deg(P_j)$ pour tout $j=1,\dots,n$. Pour la preuve du théorème 4.2, le rôle de M sera tenu par un polyèdre Δ de dimension n, contenant l'origine comme point intérieur, et tel que $\text{conv}\,(\text{Supp}\,(F_j))\subset \delta_j+\Delta$ pour tout j entre 1 et n (notons la similarité des constructions dans les deux cas).

Dans le premier cas, on introduit dans $\mathbf{C}^n$ la pondération géométrique

$$\rho_j(\zeta) := \frac{1}{(1+\|\zeta\|^2)^{\frac{M+\delta_j}{2}}}\,; \tag{4.7}$$

dans le second cas, on se donne, pour chaque j entre 1 et n, un système

$$(G_0^{(j)},\dots,G_n^{(j)})$$

de $n+1$ polynômes de Laurent de polyèdres de Newton $\delta_j+\Delta$, tels qu'il existe deux constantes $c_j, C_j>0$ avec, pour tout $\zeta\in\mathbf{C}^n$,

$$c_j\, e^{\max\limits_{\xi\in\delta_j+\Delta}\text{Re}<\xi,\zeta>} \leq \|G^{(j)}(e^\zeta)\| := \sum_{k=0}^n |G_k^{(j)}(e^{\zeta_1},\dots,e^{\zeta_n})| \leq C_j\, e^{\max\limits_{\xi\in\delta_j+\Delta}\text{Re}<\xi,\zeta>}$$

On pose alors dans ce cas

$$\tilde\rho_j(\zeta) := \frac{1}{\|G^{(j)}(e^\zeta)\|}\,,\ j=1,\dots,n\,. \tag{4.8}$$

Notons encore le parallèle avec la pondération géométrique introduite dans le premier cas (4.7).

L'idée consiste ensuite à introduire une union $\overline{U}$ de boules fermées disjointes, incluses dans $\mathbf{T}^n$ dans le second cas, chacune d'elle contenant en son intérieur un point et un seul de $V(P)$ (resp. de $V^*(F) := \{\zeta \in \mathbf{T}^n,\ F_j(\zeta) = 0,\ j = 1,\dots,n\}$), tous les points de ces ensembles étant recouverts. Il résulte des formules de Bochner-Martinelli classiques que l'on a, dans le premier cas

(4.9)

$$\operatorname{Res}\begin{bmatrix} Q(\zeta)d\zeta \\ P_1,\dots,P_n\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\partial U}\|P\|_{0,\rho}^{-2n} Q\Big(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\rho_k^2\overline{P_k}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n\overline{\partial}(\rho_k^2\overline{P_k})\Big)\wedge d\zeta =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\left[\int_{\partial U}\|P\|_{0,\rho}^{2(\lambda-n)} Q\Big(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\rho_k^2\overline{P_k}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n\overline{\partial}(\rho_k^2\overline{P_k})\Big)\wedge d\zeta\right]_{\lambda=0}$$

ou, dans le second cas,

(4.10)

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{T}^n\\ F(\alpha)=0}}\operatorname{Res}_\alpha\left[\frac{G}{F_1\cdots F_n}\,\frac{d\zeta}{\zeta_1\cdots\zeta_n}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\partial U}\|F\|_{0,\tilde\rho}^{-2n} G\Big(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\tilde\rho_k^2\overline{F_k}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n\overline{\partial}(\tilde\rho_k^2\overline{F_k})\Big)\wedge\frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\left[\int_{\partial U}\|F\|_{0,\tilde\rho}^{2(\lambda-n)} G\Big(\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\tilde\rho_k^2\overline{F_k}\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^n\overline{\partial}(\tilde\rho_k^2\overline{F_k})\Big)\wedge\frac{d\zeta}{\zeta}\right]_{\lambda=0}$$

si $\frac{d\zeta}{\zeta} := \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{\zeta_j}$.

Ensuite on considère $\overline{U}$ comme le complémentaire d'une n-chaine Σ dans l'espace projectif (pour ce qui est du premier cas) ou dans une variété torique lisse $\mathcal{X}$ compatible avec les polyèdres $\delta_1,\dots,\delta_n,\Delta_1,\dots,\Delta_n,\Delta$ (pour ce qui est du second cas). Si l'on note $\Theta(P,Q,\lambda)^{\delta,M}$ (resp. $\Theta(F,G,\lambda)^{\delta,\Delta}$) la forme différentielle figurant sous l'intégrale sur ∂U au second membre de (4.9) (resp. de (4.10)), on peut via Stokes re-écrire ces formules comme

$$\text{(4.9')}\qquad \operatorname{Res}\begin{bmatrix} Q(\zeta)d\zeta \\ P_1,\dots,P_n\end{bmatrix} = -\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\left[\int_\Sigma\overline{\partial}(\Theta(P,Q,\lambda)^{\delta,M})\right]_{\lambda=0}$$

ou

(4.10')

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{T}^n\\ F(\alpha)=0}}\operatorname{Res}_\alpha\left[\frac{G}{F_1\cdots F_n}\,\frac{d\zeta}{\zeta_1\cdots\zeta_n}\right] = -\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n}\left[\int_\Sigma\overline{\partial}(\Theta(F,G,\lambda)^{\delta,\Delta})\right]_{\lambda=0}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à lire au niveau des coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^n$ ou sur la variété torique $\mathcal{X}$ l'hypothèse de propreté (4.3) (resp. (4.5)) faite sur les P_j (resp. les F_j) au voisinage de l'infini dans $\mathbf{P}^n$ (resp. dans $\mathcal{X}$), puis à exploiter ces informations au voisinage de tout point x de $\mathbf{P}^n \setminus \mathbf{C}^n$ (resp. de $\mathcal{X} \setminus \mathbf{T}^n$) pour voir que, sous l'hypothèse faite sur Q (resp. sur G), le calcul de

$$\left[\int_{\Sigma} \overline{\partial}(\Theta(P,Q,\lambda)^{\delta,M})\varphi\right]_{\lambda=0}$$

(resp. de

$$\left[\int_{\Sigma} \overline{\partial}(\Theta(F,G,\lambda)^{\delta,\Delta})\varphi\right]_{\lambda=0})$$

lorsque φ est une fonction test de support dans un voisinage arbitrairement petit de x (en suivant le prolongement analytique) donne la valeur 0. On renvoie à [**VY**] pour le détail de cette technique. Il est clair que c'est le choix d'une judicieuse pondération géométrique qui nous a permis de représenter sous la forme d'un résidu à l'infini particulier la somme des résidus à distance finie. $\square$

Remarque 4.2. Signalons que dans un travail en préparation, Michel Hickel a proposé une preuve différente du théorème 4.1, reposant cette fois sur la version complète du théorème de Briançon-Skoda

$$\overline{\mathbf{I}^{n+p-1}} \subset \mathbf{I}^p,\ p \geq 1\,,$$

pour tout idéal $\mathbf{I}$ de ${}_{n+1}\mathcal{O}$ (voir [**LS**]). Cette approche, basée sur l'utilisation, pour la représentation des symboles résiduels, d'une pondération algébrique et non plus géométrique comme c'est le cas pour l'approche de [**VY**], a le mérite d'éviter le recours aux noyaux du type Bochner-Martinelli et donc à la conjuguaison complexe, et par la même de permettre une extension du théorème 4.1 à un cadre algébrique moins restrictif que celui de la caractéristique zéro auquel l'approche proposée dans [**VY**] nous restreint. Un tel résultat peut naturellement être exploité aux fins d'affiner les résultats présentés dans [**BY3**], sections 3 à 5. Il est aussi probable qu'une telle approche puisse être également développée en vue d'établir une preuve alternative (et moins analytique) du théorème 4.2.

Remarque 4.3. Signalons aussi que de tels énoncés induisent également des conséquences géométriques du type Cayley-Bacharach (voir [**GrH**], chapitre 6) qui mériteraient d'être étudiées de manière plus profonde et mieux comprises du point de vue géométrique.

4.2 Quelques questions liées au jacobien de n fonctions holomorphes de n variables

Pour illustrer l'idée consistant, étant donnée une famille de fonctions holomorphes f_j, $j = 1, \dots, m$, de n variables complexes, à construire une collection de courants résiduels dépendant du choix d'une pondération cette fois algébrique $p \in \mathbf{N}^m$, nous évoquerons ici quelques questions liées au problème de la division du jacobien de n fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_n$ (ou germes de fonctions holomorphes) de n variables par l'idéal $(f_1, \dots, f_n)$.

Il est bien connu (mais non complètement trivial, car la preuve de ce fait repose sur la théorie de la dualité) que si $f_1, \dots, f_n$ définissent une suite régulière dans l'anneau local ${}_n\mathcal{O}$, alors le Jacobien $J(f_1,\dots,f_n)=\det[\partial f_k/\partial\zeta_l]_{1\le k,l\le n}$ ne peut appartenir à l'idéal $(f_1,\dots,f_n)$; en revanche, on a toujours, $\mathcal{M}$ désignant l'idéal maximal, $\mathcal{M}J\subset(f_1,\dots,f_n)$.

Si maintenant $P_1,\dots,P_n$ désignent des polynômes homogènes en n variables ayant un zéro commun distinct de l'origine, une utilisation judicieuse de l'identité d'Euler [**Spo**] permet de démontrer que $J(P_1,\dots,P_n)\in(P_1,\dots,P_n)$ (au sens global) et même d'exhiber des quotients explicites. Ce résultat était déjà mentionné (dans un contexte algébrique) dans le traité de E. Netto [**Net**], volume 2, section 441, mais sans une preuve au sens rigoureux du terme. C'est à A. Ploski que nous devons mention de ces résultats. Il est par conséquent intéressant de se poser le problème de l'appartenance du Jacobien à l'idéal dans le cas local, lorsque $f_1,\dots,f_n$ ne définissent plus une suite régulière dans ${}_n\mathcal{O}$. Les méthodes analytiques ne nous ont pas encore permis de répondre positivement (en exhibant une formule de division explicite comme dans le cas homogène) à cette question naturelle, mais nos diverses tentatives pour exhiber un contre-exemple se sont toutes soldées par des échecs. De fait, tout récemment, et après que ce manuscrit ait été rédigé, M. Hickel [**Hi**] a démontré, en utilisant les résultats algébriques de Scheja-Storch [**ScS**], que le jacobien de $f_1,\dots,f_n$ appartenait bien toujours à l'idéal $(f_1,...,f_n)$, ce dès que les f_j, $j=1,...,n$, ne définissaient pas une suite régulière dans ${}_n\mathcal{O}$.

Voici en tout cas les deux résultats positifs développés dans un travail récent en collaboration avec C. Berenstein. Étant donné un idéal $\mathbf{I}$ dans un anneau local, on notera $a(\mathbf{I})$ le nombre minimal d'éléments de $\mathbf{I}$ nécessaires pour engendrer un idéal ayant même clôture intégrale que $\mathbf{I}$ dans l'anneau.

Théorème 4.3. *Soit $f_1,\dots,f_n$ n éléments de ${}_n\mathcal{O}$ et J leur Jacobien. Si $\mathbf{I}$ désigne l'idéal engendré par $f_1,\dots,f_n$, alors on a toujours l'inclusion $\sqrt{\mathbf{I}}\,J\subset\mathbf{I}$; de plus, on dispose, pour tout h dans $\sqrt{\mathbf{I}}$, d'une formule de division explicite*

$$hJ=u_{h,1}f_1+\cdots u_{h,n}f_n\,.$$

Théorème 4.4. *Soient $f_1,\dots,f_n$ n éléments de ${}_n\mathcal{O}$ engendrant un idéal $\mathbf{I}$ tel que $a(\mathbf{I})=n$, ou que $a(\mathbf{I})=n$, mais tel qu'il existe $d\in\{1,\dots,n-1\}$ avec $\sqrt{\mathbf{I}}=\sqrt{(f_1,\dots,f_d)}$. Alors le Jacobien J de $f_1,\dots,f_n$ appartient à I et l'on dispose dans le second cas d'une formule de division explicite*

$$J=u_1f_1+\cdots+u_nf_n\,.$$

Remarque 4.3. Si $f_1,\dots,f_n$ ne forment pas une suite régulière dans ${}_n\mathcal{O}$, le fait que $a((f_1,\dots,f_n))$ soit égal à n ne peut se produire, comme nous l'a fait remarquer M. Hickel, que lorsque *tous* les idéaux $(f_1^{p_1+1},\dots,f_n^{p_n+1})$, $p\in\mathbf{N}^n$, ont une composante $\mathcal{M}$-primaire immergée.

Preuves (esquisses). Elles reposent sur les formules de division-interpolation du type (3.6), écrites dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $n+1$ variables, quitte à introduire des variables additionnelles "muettes" comme dans la section 3. Suivant le lemme de normalisation de Noether, les variables sont organisées en deux blocs ζ',ζ'', et la forme $\Sigma(\zeta')$ sera toujours celle qui a été introduite dans la section 3.

Commencons par le théorème 4.4. Dans le premier cas (celui où $a((f_1,\dots,f_n))=d<n$, on divise le Jacobien J de $f_1,\dots,f_n$ grâce à la formule (3.6), en prenant $m=$

d et comme germes de fonctions holomorphes d éléments $\tilde{f}_1, \ldots \tilde{f}_d$ de $(f_1, \ldots, f_n)$ tels que $\overline{(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d)} = \overline{(f_1, \ldots, f_n)}$ (la construction de ces éléments est possible du fait de l'hypothèse faite sur l'analytic spread). On prend dans ce cas comme pondération algébrique la pondération triviale $p_j = 0$, $j = 1, \ldots, d$. Dans le second cas, on fait la même chose, mais en prenant cette fois $m = n$ et comme germes de fonctions holomorphes les germes $f_1, \ldots, f_n$, avec une pondération algébrique définie par $p_j = 0$, $j = 1, \ldots, d$, $p_j = nM$, $j = d+1, \ldots, n$, où M est un entier tel que $f_{d+1}^M, \ldots, f_n^M$ soient dans la clôture intégrale de $(f_1, \ldots, f_d)$ (le fait que $\sqrt{(f_1, \ldots, f_n)} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_d)}$ implique que le choix d'un tel M soit possible).
En ce qui concerne la preuve du théorème 4.3, on utilisera une formule de division du type (3.6) avec $f_1, \ldots, f_n$, le choix de la pondération algébrique étant dans ce cas indifférent, pour diviser non plus J, mais hJ, avec $h \in \sqrt{I}$. Les objets dénotés φ et Σ sont ceux introduits dans la section 4, une fois la situation de division préparée via l'utilisation du lemme de normalisation de Noether.

Dans tous les cas, on montre (via une résolution des singularités) que la formule (3.6) (avec $N = 0$) se réduit, lorsque l'on divise J, soit à

$$(4.11) \qquad J(z) \equiv -\operatorname{Res} \begin{bmatrix} J\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma(\zeta')}{<s(\zeta'),\zeta'-z'>} \wedge \bigwedge_{j=1}^{d} \widetilde{G}_j(z,\zeta) \\ \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d \\ \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d \end{bmatrix}^0 \mod (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d)\,,$$

où $\widetilde{G}_j := \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_{jk} d\zeta_k$, avec $\tilde{f}_j(z) - \tilde{f}_j(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_{jk}(z,\zeta)(z_k - \zeta_k)$, dans le premier cas du théorème 4.4, soit à

$$(4.11') \qquad J(z) \equiv -\operatorname{Res} \begin{bmatrix} J\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma(\zeta')}{<s(\zeta'),\zeta'-z'>} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} G_j(z,\zeta) \\ f_1, \ldots, f_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}^p \mod (f_1, \ldots, f_n)\,.$$

dans le second cas envisagé dans l'énoncé de ce même théorème, les G_j désignant alors les $(1,0)$ formes associées à des systèmes de Oka-Hefer pour les f_j. Quant à la division de hJ par $(f_1, \ldots, f_n)$ lorsque h est dans le radical de $(f_1, \ldots, f_n)$ (qui elle joue un rôle dans la preuve du théorème 4.3) elle se réduit à
(4.12)

$$hJ \equiv -\operatorname{Res} \begin{bmatrix} hJ\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma(\zeta')}{<s(\zeta'),\zeta'-z'>} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} G_j(z,\zeta) \\ f_1, \ldots, f_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}^0 \mod (f_1, \ldots, f_n)$$

$$\equiv -\operatorname{Res} \begin{bmatrix} h \det[g_{jk}]_{1\le j,k\le n}\overline{\partial}\varphi \wedge \frac{\Sigma(\zeta')}{<s(\zeta'),\zeta'-z'>} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} df_j \\ f_1, \ldots, f_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}^0 \mod (f_1, \ldots, f_n)\,.$$

Nous avons omis ici l'indexation correspondant à la pondération géométrique ρ car celle ci n'est pas ici prise en compte (on prend $\rho_j \equiv 1$ pour tout j). L'argument conduisant à ces formules est détaillé dans [**BY4**]. On voit alors que le théorème

4.3 résulte simplement du fait que

$$\psi \in \mathcal{D}_0 \mapsto \operatorname{Res} \begin{bmatrix} \psi df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \\ f_1, \ldots, f_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}$$

est un germe de mesure positive portée par $V(f_1, \ldots, f_n)$ et de l'utilisation de la formule de division (4.12). Quant au théorème 4.4, il résulte, lorsque l'analytic spread de $(f_1, \ldots, f_n)$ est strictement inférieur à n, de ce que, dans ce cas

$$\operatorname{Res} \begin{bmatrix} (\cdot)\, J \\ \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d \\ \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_d \end{bmatrix}^0 \equiv 0\,;$$

dans l'autre cas (celui où le radical de $(f_1, \ldots, f_n)$ est défini par $f_1, \ldots, f_d$ avec $d < n$), c'est cette fois le choix de p qui implique la nullité du courant

$$\operatorname{Res} \begin{bmatrix} \cdot \\ f_1, \ldots, f_n \\ f_1, \ldots, f_n \end{bmatrix}^p .$$

Ces deux faits se voient facilement après désingularisation (on renvoie à [**BY4**] pour les détails). Ainsi, en utilisant (4.11) ou (4.11'), on achève la preuve du théorème 4.4. □

Citons également une application importante de ces techniques, mêlant cette fois les deux pondérations algébrique et géométrique, et développée dans [**BY4**]: on peut exprimer, étant donnés m polynômes homogènes de $n+1$ variables définissant dans $\mathbf{P}^n$ un sous ensemble algébrique V de dimension pure, le courant d'intégration (les multiplicités étant prises en compte) correspondant à V. Ce travail prolonge un travail déjà effectué dans [**BY5**] sous l'hypothèse restrictive que V soit définie comme intersection complète.

References

[Bern] B. Berndtsson, *A formula for interpolation and division in* $\mathbf{C}^n$, Math. Ann **263** (1983), 399–418.

[Bjo1] J. E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland, Amsterdam (NL), 1979.

[Bjo2] J. E. Björk, *Analytic $\mathcal{D}$-modules and their applications*, Kluwer, Amsterdam (NL), 1993.

[BoH1] J. Y. Boyer, M. Hickel, *Une généralisation de la loi de transformation pour les résidus*, Bulletin Soc. Math. France **125** (1997), 315–335.

[Br] D. W. Brownawell, *Bounds for the degrees in the Nullstellensatz*, Annals of Math. **126** (1987), 577–591.

[BT] E. Bedford, B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation*, Inventiones math. **37, 1** (1976), 1–44.

[BY1] C. A. Berenstein, A. Yger, *Effective Bézout identities in* $\mathbf{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, Acta Mathematica **166** (1991), 69–120.

[BY2] C. A. Berenstein, A. Yger, *Une formule de Jacobi et ses conséquences*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **24** (1991), 363–377.

[BY3] C. A. Berenstein, A. Yger, *Residue calculus and Effective Nullstellensatz*, Amer. J. Math. **121, 4** (1999), 723–796.

[BY4] C. A. Berenstein, A. Yger, *Analytic residue theory in the non complete intersection case*, J. reine angew. Math. **527** (2000), à paraitre.

[BY5] C. A. Berenstein, A. Yger, *Green currents and analytic continuation*, Journal d'Analyse Mathématique **75** (1998), 1–50.

[CoH] N. Coleff, M. Herrera, *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Springer-Verlag (Lecture Notes in Math. 633), Berlin, New-York, 1978.

[DiG] A. Dickenstein, R. Gay, C. Sessa, A. Yger, *Analytic functionals annihilated by ideals*, manuscr. math. **90** (1996), 175–223.

[DiS] A. Dickenstein, C. Sessa, *Canonical representative in moderate cohomology*, Inventiones math. **80** (1985), 417–434.

[Ela] L. Ein, R. Lazarsfeld, *A geometric effective Nullstellensatz*, Inventiones math. **137, 2** (1999), 427–448.

[ElM] M. Elkadi, B. Mourrain, *Approche effective des résidus algébriques*, Rapport de Recherche INRIA (Sophia-Antipolis, FR) **2884** (1996).

[GrH] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-InterScience, New-York, 1978.

[Ha] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Springer-Verlag (Lecture Notes in Math. 20), Berlin, New-York, 1966.

[Har] R. Harvey, *Integral formulae connected by Dolbeault's isomorphism*, Rice University Studies **56, 2** (1969), 77–97.

[Hi] M. Hickel, *Une remarque à propos du jacobien de n germes de fonctions holomorphes à l'origine de* $\mathbf{C}^n$, Ann. Polon. Math (2001), à paraitre.

[Hu] R. Hübl, *Traces of Differential Forms and Hochschild Homology*, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics 1368), Berlin, New-York, 1980.

[Kho] A. Khovanskii, *Newton polyedra and the Euler-Jacobi formula*, Russian Mathematical Surveys **33** (1978), 237–238.

[Ko1] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, Journal of the Amer. Math. Soc **1** (1988), 963-975.

[Ko2] J. Kollár, *Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals*, J. Eur. Math. Soc. **1** (1999), 313–337.

[Ku] E. Kunz, *Kähler differentials*, Vieweg (Vieweg Advanced Lectures in Mathematics), Braunschweig, Wiesbaden, 1986.

[Kyt] A. M. Kytmanov, *A transformation formula for Grothendieck residues and some of its applications*, Siberian Math. Journal **169** (1988), 495–499.

[Li] J. Lipman, *Residues and traces of differential forms via Hoschschild homology*, American Math. Soc. (Contemporary Math. 61), Providence, 1987.

[LS] J. Lipman, A. Sathaye, *Jacobian ideals and a theorem of Briançon-Skoda*, Michigan Math Journal **28** (1981), 199-222.

[Net] E. Netto, *Vorlesungen über Algebra*, Teubner, Leipzig, 1900.

[P] M. Passare, *Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions*, Math. Scand. **62** (1988), 75–152.

[PTY] M. Passare, A. Tsikh, A. Yger, *Residue currents of the Bochner-Martinelli type*, Publicacions Matematiques (Barcelona, SP) **44** (2000), 85–117.

[ScS] G. Scheja, U. Storch, *Residuen bei Vollständigen Durchschnitten*, Math. Nachr. **91** (1979), 157–170.

[Spo] S. Spodzieja, *On some property of a homogeneous polynomial mapping*, Bulletin de la Soc. des Sciences et des lettres de Lódz **39, 5** (1989), 1–5.

[T] A. Tsikh, *Multidimensional residues and their applications*, Amer. Math. Soc (Translations of the AMS 103), Providence, 1992.

[VY] A. Vidras, A. Yger, *On some generalizations of Jacobi's residue formula*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup **34** (2001), à paraitre.

Laboratoire de Mathématiques Pures, Université Bordeaux 1, 33405, Talence, France

E-mail address: yger@math.u-bordeaux.fr