Semestre 2, Année 2011-2012

UE N1M12011 : DS1 - Analyse 1

Date : 5 Mars 2012, 08h30-10h00 Durée : 1h30

Texte (en italiques) et corrigé (en roman).

Exercice I.

Soit a un nombre réel. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} a^k$ de la suite géométrique de raison a.

On rappelle l'identité remarquable

$$1 - X^{n+1} = (1 - X)(1 + X + \cdots + X^n).$$

En spécifiant $X = a$, on a

$$1 - a^{n+1} = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^n) = (1 - a) \times \sum_{k=0}^{n} a^k.$$

Si $a \neq 1$, on a donc, en divisant par $1 - a \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Si $a = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1.$$

1. *En déduire le calcul de la somme $\sum_{k=n}^{m} a^k$ pour $m \geq n$.*

   Si $m \geq n$, on a, en mettant a^n en facteur dans la somme,

   $$\sum_{k=n}^{m} a^k = a^n \sum_{k=0}^{m-n} a^k.$$

   En utilisant le résultat établi à la question précédente, on a donc

   $$\sum_{k=n}^{m} a^k = \begin{cases} a^n \times \left(\dfrac{1 - a^{m-n+1}}{1 - a}\right) = \dfrac{a^n - a^{m+1}}{1 - a} \text{ si } a \neq 1 \\ m - n + 1 \text{ si } a = 1. \end{cases}$$

2. *(Question de cours) Donner la définition d'une suite de Cauchy.*

Une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *de Cauchy* si et seulement si elle obéit au *critère de Cauchy* :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \quad \forall\, m > n \geq N(\epsilon),\ |u_m - u_n| < \epsilon.$$

3. *Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(3+e^{-k}\right)^k}$ est une suite de Cauchy.*

Pour $m > n$, on a, puisque $e^{-k} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq u_m - u_n &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(3+e^{-k})^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=n+1}^{m} (1/3)^k \\ &= (1/3)^{n+1} \times \frac{1-(1/3)^{m-n}}{1-1/3} \\ &= \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} \times (1-(1/3)^{m-n}) \\ &\leq \frac{3}{2} \times (1/3)^{n+1} = \frac{1}{2} \times (1/3)^n. \end{aligned}$$

Ceci résulte du résultat établi au **(2)**, que l'on utilise ici en prenant $a = 1/3$, en conservant m, et en remplaçant n par $n+1$. Il a fallu utiliser aussi (pour établir la dernière inégalité) le fait que $0 \leq (1/3)^{n-m} \leq 1/3$ (puisque $m - n \in \mathbb{N}^*$), donc que $1 - (1/3)^{n-m} \leq 1$.

Pour rendre $|u_m - u_n| = u_m - u_n < \epsilon$ lorsque $m > n$, il suffit donc de faire en sorte que $(1/3)^n < 2\epsilon$. Si l'on prend

$$m > n \geq N(\epsilon)$$

avec $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$$N(\epsilon) > \frac{\log(1/(2\epsilon))}{\log 3},$$

on aura bien, pour $m > n \geq N(\epsilon)$,

$$|u_m - u_n| \leq \frac{1}{2}\, 3^{-n} < \frac{1}{2} \times (2\epsilon) = \epsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy.

Exercice II

1. (*Question de cours*)
Donner la définition de $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ *(*$\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$*) et* $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ *(*$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$*) d'une suite* $(u_n)_n$ *de nombres réels.*

   Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels majorée, on appelle $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ ou $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ la limite de la suite décroissante minorée :
$$\big(\sup_{k\geq n} u_k\big)_n.$$
   C'est aussi la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi minorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée, on convient que
$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = +\infty.$$
   Si la suite $(u_n)_n$ est une suite de nombres réels minorée, on appelle $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ ou $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ la limite de la suite croissante majorée :
$$\big(\inf_{k\geq n} u_k\big)_n.$$
   C'est aussi la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ lorsque l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est non vide (par exemple lorsque la suite $(u_n)_n$ est aussi majorée). Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas minorée, on convient que
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = -\infty.$$

2. *Soit* $u_n = \sin\frac{n\pi}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. *Déterminer* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$.
Comme $|\sin(1/n)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}\right) = 0,$$
   et, par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Comme $|\sin(n\pi/4)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est le produit d'une suite bornée par une suite convergente (vers 1) ; la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc une suite bornée en valeur absolue, admettant donc une limite supérieure et une limite inférieure, toutes deux dans $\mathbb{R}$ (*cf.* la question de cours **(1)** ci-dessus). Si $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et convergeant vers un nombre réel l, on a nécessairement $l \in [-1, 1]$ (car cette suite extraite se présente comme le produit d'une suite bornée en valeur absolue par 1, en l'occurrence la suite $(\sin(\varphi(n)\pi/4))_{n\geq 1}$, par une suite convergeant vers 1). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc inclus dans $[-1, 1]$.

Pour $n = 8k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{(8k+2)\pi}{4} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

La suite extraite $(u_{8k+2})_{k\geq 0}$ a donc précisémént pour limite 1 (qui est justement la plus grande valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$). Le nombre 1 est donc bien la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, et l'on a

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = 1.$$

Pour $n = 8k + 6$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{(8k+6)\pi}{4} = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

La suite extraite $(u_{8k+6})_{k\geq 0}$ a donc précisément pour limite -1 (qui est justement la plus petite valeur d'adhérence que l'on pouvait espérer pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$). Le nombre -1 est donc bien la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et l'on a

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = -1.$$

Exercice III

On rappelle que, pour tout $x \geq 0$ on a $1 + x \leq e^x$.

1. *Soient $z_1, z_2, \ldots$ des nombres complexes. En écrivant*

$$\prod_{k=1}^{p+1}(1 + z_k) - 1 = \left(\prod_{k=1}^{p}(1 + z_k) - 1\right)(1 + z_{p+1}) + z_{p+1},$$

montrer, par récurrence sur p, que

$$\left|\prod_{k=1}^{p}(1+z_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{p}(1+|z_k|)-1,$$

et en déduire que

$$\left|\prod_{k=1}^{p}(1+z_k)-1\right| \leq e^{\sum_{k=1}^{p}|z_k|}-1.$$

Notons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(\mathscr{A}_p)$ l'assertion :

$$\left|\prod_{k=1}^{p}(1+z_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{p}(1+|z_k|)-1 \quad \forall\, z_1, ..., z_p \in \mathbb{C}.$$

L'assertion $\mathscr{A}_1$ est vraie car

$$|(1+z_1)-1| = |z_1| = 1+|z_1|-|z_1| \quad \forall\, z_1 \in \mathbb{C}.$$

On suppose que pour p donné dans $\mathbb{N}^*$, l'assertion $\mathscr{A}_p$ est vraie et l'on montre qu'alors $\mathscr{A}_{p+1}$ l'est aussi. Cette assertion $\mathscr{A}_p$ sera alors héréditaire. Elle sera ainsi prouvée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (c'est là le principe du raisonnement par récurrence).

Montrons donc $\mathscr{A}_{p+1}$ en supposant $\mathscr{A}_p$ vraie. Soient $z_1, ..., z_{p+1}$, une liste de $p+1$ nombres complexes. On a, en utilisant l'indication, puis deux fois l'inégalité triangulaire, enfin, au second membre de la seconde ligne, le fait que $\mathscr{A}_p$ soit supposée vraie pour passer à la ligne suivante :

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{p+1}(1+z_k)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{p}(1+z_k)-1\right)(1+z_{p+1})+z_{p+1}\right| \\
&\leq \left|\prod_{k=1}^{p}(1+z_k)-1\right| \times |1+z_{p+1}|+|z_{p+1}| \\
&\leq \left(\prod_{k=1}^{p}(1+|z_k|)-1\right)(1+|z_{p+1}|)+|z_{p+1}| \\
&= \prod_{k=1}^{p+1}(1+|z_k|)-1-|z_{p+1}|+|z_{p+1}| \\
&= \prod_{k=1}^{p+1}(1+|z_k|)-1.
\end{aligned}$$

L'assertion $\mathscr{A}_{p+1}$ est bien démontrée modulo le fait que $\mathscr{A}_p$ est vraie, ce qui valide la preuve de $\mathscr{A}_p$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ (par récurrence).

On a, en utilisant le résultat rappelé en préambule de l'exercice :

$$\prod_{k=1}^{p}(1+|z_k|) \leq \prod_{k=1}^{p} e^{|z_k|} = e^{|z_1|} \times \cdots \times e^{|z_p|} = e^{|z_1|+\cdots+|z_p|} = e^{\sum_{k=1}^{p}|z_k|}$$

puisque $e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ (même en fait lorsque a et b sont complexes). En retranchant 1 aux deux membres, on a donc :

$$\left|\prod_{k=1}^{p}(1+z_k) - 1\right| \leq e^{\sum_{k=1}^{p}|z_k|} - 1.$$

2. *(*Question de cours*) Énoncer le critère de Cauchy pour une suite de nombres complexes $(u_k)_{k\geq 0}$.*

   Une suite de nombres complexes $(u_k)_{k\geq 0}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \quad \forall\, m > n \geq N(\epsilon),\ |u_m - u_n| < \epsilon.$$

3. *Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres complexes vérifiant*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right) \leq M < +\infty.$$

   (a) *Montrer que la suite $n \mapsto \sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{k=n+p}|u_k|\right)$ est décroissante et converge vers 0.*

   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+p}|u_k| \leq \sum_{n}^{n+p+1}|u_k| \leq M.$$

   En prenant la borne supérieure sur $p \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n+1}^{n+1+p}|u_k|\right) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\right) \leq \sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\right) \leq M.$$

La suite
$$n \mapsto \sup_{p\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k| \right)$$
est donc bien décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite λ positive ou nulle. Si l'on avait $\lambda > 0$, la suite croissante majorée
$$\Big(\sum_{k=0}^{n} |u_k| \Big)_{n\geq 0} = (U_n)_{n\geq 0}$$
ne vérifierait pas le critère de Cauchy car on aurait :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sup_{p\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \Big| = \sup_{p\in\mathbb{N}} \big(\textstyle\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| \big) \geq \lambda > 0\ ; \tag{1}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existerait en effet $m(n) = n + p(n) > n$ (dans $\mathbb{N}$) tel que
$$|U_{m(n)} - U_n| \geq \lambda/2$$
(ce qui exprime bien que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ n'est pas de Cauchy) : si en effet ce n'était pas le cas, il y aurait au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \Big| \sum_{k=0}^{n+p} |u_k| - \sum_{k=0}^{n-1} |u_k| \Big| \leq \lambda/2,$$
ce qui serait en contradiction avec (1). Mais la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge (car croissante et majorée). Elle vérifie donc le critère de Cauchy. Avoir supposé $\lambda > 0$ conduit ainsi à une contradiction. Donc $\lambda = 0$.

(b) *En utilisant le résultat obtenu à la question 1., montrer que*
$$\left| \prod_{k=0}^{n+p} (1+u_k) - \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) \right| \leq e^M \left(e^{\sum_{k=n}^{k=n+p} |u_k|} - 1 \right).$$

Pour $p = 0$, l'inégalité est vraie car le membre de gauche est nul. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on observe que
$$\prod_{k=0}^{n+p} (1+u_k) = \prod_{k=0}^{n} (1+u_k) \times \prod_{k=n+1}^{n+p} (1+u_k)\,.$$

On a donc, en utilisant la mise en facteur, puis l'inégalité établie au à fin de la question **(1)** pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, enfin, une fois encore, l'inégalité rappelée en préambule de l'exercice pour passer cette fois de la ligne 2 à la ligne 3 :

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=0}^{n+p}(1+u_k)-\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right| &= \prod_{k=0}^{n}|1+u_k|\times\Big|\prod_{k=n+1}^{n+p}(1+u_k)-1\Big| \\ &\leq \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|)\times\big(e^{\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k|}-1\big) \\ &\leq e^{\sum_{k=0}^{n}|u_k|}\times\big(e^{\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k|}-1\big) \\ &\leq e^{M}\times\big(e^{\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k|}-1\big) \\ &\leq e^{M}\times\big(e^{\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|}-1\big).\end{aligned}$$

(c) *En déduire que la suite* $\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right)_{n\geq 0}$ *est une suite de Cauchy et conclure que cette suite converge vers une limite* l *telle que* $|l|\leq e^M$*.*

On pose $\Pi_n := \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$. On a établi à la question précédente que

$$\begin{aligned}\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, p\in\mathbb{N},\ |\Pi_{n+p}-\Pi_n| &\leq e^M\times\big(e^{\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|}-1\big) \\ &\leq e^M\times\big(e^{\sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\right)}-1\big)\end{aligned} \tag{2}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sup_{p\in\mathbb{N}}\big(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\big)\Big)=0$$

(*cf.* la question **(3a)**) et que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n=0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(e^{w_n}-1)=0$$

pour une suite $(w_n)_{n\geq 0}$ quelconque de nombres réels (la fonction exponentielle est continue en 0 et vaut 1 en ce point), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\big(e^{\sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\right)}-1\big)=0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe donc $N(\epsilon)$ tel que, pour tout

$$\Big(n \geq N(\epsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(0 \leq e^{\sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=n}^{n+p}|u_k|\right)} - 1 < \epsilon\, e^{-M}\Big).$$

En reportant dans (2), on en déduit

$$\forall\, n \geq N(\epsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ |\Pi_{n+p} - \Pi_n| < \epsilon.$$

La suite de nombres complexes $(\Pi_n)_{n\geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy, donc converge vers une limite finie $l \in \mathbb{C}$. Comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\Pi_n| \leq \prod_{k=0}^{n}(1+|u_k|) \leq \prod_{k=0}^{n} e^{|u_k|} = e^{\sum_{k=0}^{n}|u_k|} \leq e^M$$

on a aussi, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $|l| \leq e^M$.

FIN