

Analyse Complexe

Alain Yger

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, TALENCE 33405,
FRANCE
E-mail address: `Alain.Yger@math.u-bordeaux1.fr`

Version du 5 janvier 2014.

RÉSUMÉ. Ce cours vise à présenter, au niveau M1, tant les aspects analytiques, algébriques, géométriques (sans négliger leur accompagnement historique et culturel) de l'Analyse Complexe en une variable. Il correspond à l'enseignement de cette UE à l'Automne 2013.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. Le plan complexe et les formes différentielles dans le plan	3
1.1. Le plan complexe et ses compactifications	3
1.2. Formes différentielles dans un ouvert du plan complexe	10
1.3. Intégration des formes différentielles	20
1.4. Formes localement exactes et chemins continus	38
Chapitre 2. Holomorphie et analyticité	55
2.1. Fonctions holomorphes : plusieurs points de vue	55
2.2. Formules de Cauchy et analyticité	65
2.3. Les inégalités de Cauchy et leurs conséquences	76
Chapitre 3. Singularités isolées, méromorphie et théorèmes d'approximation	89
3.1. Singularités isolées des fonctions holomorphes	89
3.2. Types de singularités isolées, méromorphie	99
3.3. Théorème de Weierstraß et résolution du $\bar{\partial}$	124
Chapitre 4. Fonctions harmoniques dans le plan	147
4.1. Harmonicité et sous-harmonicité	147
4.2. Autour du problème de Dirichlet	153
4.3. Formules de Jensen et Poisson-Jensen	170
Annexe A. Texte et corrigé du DS - 2011-2012	177
Annexe B. Texte et corrigé - Examen 2011-2012	187
Annexe C. Texte et corrigé du DS - 2012-2013	199
Annexe D. Texte et corrigé - Examen 2012-2013	209
Annexe E. Texte et corrigé du DS - 2013-2014	225
Annexe F. Texte et corrigé - Examen 2013-2014	227
Bibliographie	237
Index	239

Introduction

Ce cours suppose comme prérequis le bagage concernant les séries de fonctions, en particulier les séries entières et les séries de Fourier, acquis en Licence 2 (dans l'UE *Analyse 3*, ex UE MHT 401 [Y0]), ainsi que les bases du calcul différentiel acquises en Licence 3 (dans l'UE *Calcul Différentiel et Equations Différentielles*, ex UE MHT 513); le guide sous le serveur Ulysse¹ « **Annales : Contrat MAT401 Printemps 2007** » (séances 7,8,9) vous permettra en particulier de réviser vos acquis de Licence en ce qui concerne les séries entières et l'analyticité; pour ce qui est des bases de calcul différentiel nécessaires, les chapitres 14-15-16 de [MathL2] contiennent tous les outils qui me seront utiles. Au travers de ce cours, on entend dégager certaines idées invitant à des prolongements ultérieurs, tant sur l'angle analytique que géométrique, voire topologique (analyse complexe en plusieurs variables, surfaces de Riemann). Les principaux ouvrages dont je me suis inspiré, outre les chapitres 1-2-4 de [Y], sont ceux de Carlos Berenstein et Roger Gay ([BG], chapitres 1-2-3-4, l'ouvrage qui a inspiré la rédaction de [Y]), d'Eric Amar et Etienne Matheron [AM], de Mats Andersson [And]. On ajoutera aussi le livre (aujourd'hui très classique) de Walter Rudin [Rud], référence bien connue des candidats à l'agrégation. Le polycopié rédigé par Philippe Charpentier [Charp] pour l'UE MHT 734 (à 9 ECTS, à laquelle cette nouvelle UE, cette fois à 6 ECTS, se substitue) m'a aussi beaucoup servi; les exercices accompagnant ce cours correspondent en fait pour la plupart aux exercices d'accompagnement de cette UE MHT 734 pendant les années 2009-2010 et 2010-2011; beaucoup sont extraits des listes d'exercices (non corrigés) de [BG]; on les trouvera regroupés sous forme de fascicule (détaillés, mais non corrigés²) dans [Y1]. Il faut toutefois signaler que l'UE MHT 734 étant une UE à 9 ECTS, son contenu englobe des points qui ne seront pas évoqués ici : formes différentielles et calcul extérieur en dimension $n > 2$, analyse harmonique dans \mathbb{R}^n avec $n > 2$, théorème de Riemann et représentation conforme, théorème de la monodromie, etc. La lecture du polycopié [Charp] permet aux étudiants intéressés d'aller au delà de ces notes de cours. Les aspects culturels et historiques de l'Analyse complexe ne sont pas à négliger. Toutes les références historiques émaillant ces notes sont extraites du site <http://www.gap-system.org/~history> auquel j'invite vivement à se reporter pour situer les noms et le cheminement des idées au travers des siècles (du XVIII-ième au XX-ième), en des temps où l'analyse complexe a constitué tant un fil directeur (et unificateur) qu'un précieux auxiliaire, ce précisément à l'heure où les calculateurs efficaces nés avec l'informatique n'existaient pas encore!

1. Y accéder par l'espace Formation sous votre ENT et dérouler les onglets à partir de Formation initiale pour trouver ce guide sous le site de la Licence Mathématiques, Parcours Mathématiques Fondamentales, semestre 4.

2. Certains cependant, présentés sous une forme parfois différente, sont corrigés dans [Y].

Le plan complexe et les formes différentielles dans le plan

1.1. Le plan complexe et ses compactifications

1.1.1. Deux structures sur \mathbb{R}^2 . L'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de nombres réels est naturellement équipé d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel ; c'est le *plan (vectoriel) réel*. Le choix du point $O = (0, 0)$ comme origine et de la base canonique (\vec{i}, \vec{j}) comme base de ce \mathbb{R} -espace vectoriel fournit un *repère* (orthonormé pour le produit scalaire usuel) pour le \mathbb{R} -*espace affine* correspondant, dit *plan (affine) réel*. On sait d'autre part qu'il existe une correspondance biunivoque entre \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} via

$$(1.1) \quad (x, y) \longleftrightarrow x + iy$$

(au point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe son *affiche*). L'ensemble \mathbb{R}^2 peut ainsi être équipé d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel, la multiplication externe étant

$$(\alpha + i\beta) \cdot (x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x),$$

ce en conformité avec la règle de calcul algébrique

$$(\alpha + i\beta) \times (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

et la correspondance biunivoque (1.1) entre les points du plan affine réel et leurs affiches. L'ensemble des couples (x, y) de nombres réels, une fois identifié à \mathbb{C} et équipé de cette structure de \mathbb{C} -espace vectoriel, est le *plan (vectoriel) complexe*. Il s'agit d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1 (alors qu'avec la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel, nous avons affaire à un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2). En prenant comme repère $(0; 1)$ (1 étant ici le nombre complexe $1 \times 1 + 0 \times i$), on dispose d'un repère pour le \mathbb{C} -espace affine correspondant, dit *plan complexe*. Notons toutefois que cette terminologie est équivoque car il s'agit d'un \mathbb{C} -espace vectoriel complexe de dimension 1, donc d'une droite complexe, et non d'un plan ! On la conserve néanmoins dans la pratique courante.

Les points de \mathbb{R}^2 sont ainsi repérés de deux manières :

- par le couple (x, y) de leurs coordonnées *cartésiennes*, \mathbb{R}^2 (vu comme plan affine réel, équipé de sa structure de \mathbb{R} -espace affine de dimension 2) étant rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
- par leur affiche complexe $z = x + iy$, \mathbb{R}^2 étant ici vu comme le plan complexe, c'est-à-dire le \mathbb{C} -espace affine \mathbb{C} (équipé de sa structure de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1).

La *conjugaison complexe* $z \mapsto \bar{z}$ sera appelée à jouer un rôle majeur. Les formules de « passage » des coordonnées (x, y) aux « fausses coordonnées » (z, \bar{z}) sont

$$(1.2) \quad \begin{aligned} z &= x + iy & \bar{z} &= x - iy \\ x &= \frac{z + \bar{z}}{2} & y &= \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

La raison pour laquelle nous parlons de « fausses coordonnées » à propos du couple (z, \bar{z}) est la suivante : au contraire de (x, y) , le couple (z, \bar{z}) ne saurait être interprété comme un système de paramètres indépendants car \bar{z} est fonction de z (c'est le conjugué) ! Le paramètre complexe $z = x + iy$ intègre à lui seul les deux degrés de liberté dont dépend le point courant de \mathbb{R}^2 ; avec la connaissance à la fois de z et \bar{z} , nous avons automatiquement une information redondante. Nous verrons cependant dans la suite de ce cours que les formules (1.2) s'avèreront néanmoins utiles : on fera « comme si » le couple (z, \bar{z}) joue le rôle d'un couple de paramètres indépendants : une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{C} , s'exprime en effet, grâce aux formules (1.2), comme une fonction g de z et \bar{z} (définie cette fois dans $U \times \text{conj}(U)$) :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = g(z, \bar{z}).$$

Un autre repérage des points du plan complexe (ramené au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$) s'avère possible. C'est le *repérage polaire*, où, pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} r(z) &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \theta(z) &= \arg(z) \\ z &= r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Si $z = 0$, on a $r = 0$, mais la définition de l'argument devient irrelevante. Notons que dans cette formule (1.3), l'exponentielle complexe est définie comme la somme de la série entière (de rayon de convergence $+\infty$, voir le cours de MHT 401, on y reviendra plus loin)

$$\exp(w) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C},$$

les fonctions trigonométriques (complexes) \cos et \sin s'en déduisant par les relations d'Euler

$$(1.4) \quad \cos w := \frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2} \quad \sin w := \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

En revanche, la « fonction » $z \mapsto \arg z$ n'est pas une fonction au sens usuel (à une entrée z , on n'associe pas une « valeur » $\arg z$) ; l'argument en effet n'est défini que modulo 2π et ce que l'on convient de noter $\arg z$, lorsque z est un nombre complexe non nul, est l'ensemble de toutes les déterminations possibles de l'argument, parmi elles la détermination (dite *principale*), que l'on note $\text{Arg } z$, et qui est par convention celle appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$; ainsi, si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\arg z = \text{Arg } z + 2\pi\mathbb{Z} = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } z \notin]-\infty, 0[\\ \pi + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } z \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

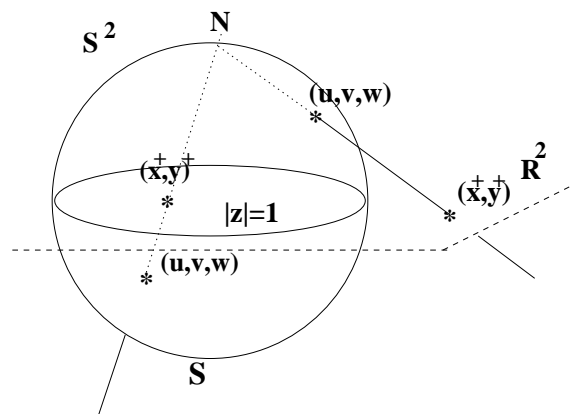


FIGURE 1.1. Sphère de Riemann et projection stéréographique

Notons au passage que la fonction $z \mapsto \text{Arg } z$ est bien C^∞ dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ au vu de son expression analytique¹ :

$$(1.5) \quad \text{Arg}(x + iy) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0].$$

On dit que la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \arg z$ est une *fonction multivaluée* ou encore une *fonction multivalente*² au lieu d'une fonction au sens classique du terme (c'est-à-dire *monovaluée* ou encore *monovalente*).

1.1.2. La sphère de Riemann. Il est commode de réaliser une compactification du plan complexe (équipé de sa topologie d'espace métrique usuelle, celle de \mathbb{R}^2) en lui adjoignant un point dit *point à l'infini*. Une manière de concrétiser cette réalisation consiste à plonger $\mathbb{R}_{x,y}^2$ dans $\mathbb{R}_{x,y,t}^3$ via

$$(x, y) \mapsto (x, y, 0)$$

($\mathbb{R}_{x,y}^2$ est alors considéré comme $\{(x, y, 0); (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{t = 0\}$) et à considérer la sphère unité

$$\mathbb{S}^2 := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

et son pôle nord $N := (0, 0, 1)$. On parle de *sphère de Riemann*³ pour désigner \mathbb{S}^2 au travers de sa relation avec le plan complexe (relation que nous allons expliciter). La figure 1.1 illustre les constructions qui vont suivre.

La *projection stéréographique depuis le pôle nord* est l'application π^+ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dans \mathbb{R}^2 définie ainsi : au point (u, v, w) de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, on associe le point $\pi^+(u, v, w) = (x^+(u, v, w), y^+(u, v, w), 0)$ du plan $\{t = 0\} \simeq \mathbb{R}_{x,y}^2$ où la droite issue de N et passant

1. Vérifier là en exercice en vous aidant de figures dans le plan.

2. Ces qualificatifs ont été introduits au XIX-ième siècle. Il est important de souligner que le concept de « fonction » à cette époque était bien souvent celui de fonction multivalente.

3. Élève de Gauß, Bernhard Riemann (1826-1866) a posé dans son traité de 1854 « *Sur les hypothèses sur lesquelles reposent les fondements de la géométrie* » les bases de ce qui allait devenir la géométrie différentielle. Au travers de l'étude des surfaces (plus particulièrement des surfaces de Riemann, dont \mathbb{C} et \mathbb{S}^2 sont des exemples), le couplage avec l'analyse complexe est omniprésent dans ses travaux.

par (u, v, w) perce ce plan. Par un calcul immédiat (basé sur le théorème de Thalès), on trouve

$$(1.6) \quad x^+(u, v, w) = \frac{u}{1-w} \quad y^+(u, v, w) = \frac{v}{1-w}.$$

Cette application π^+ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ dans $\mathbb{R}^2 \simeq \{t = 0\}$ s'avère être bijective et son inverse est l'application

$$(1.7) \quad (x, y, 0) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2} \right).$$

Ainsi le plan complexe se trouve-t'il en bijection (il s'agit même en fait d'un difféomorphisme C^∞) avec $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$; le pôle sud de \mathbb{S}^2 correspond à l'origine $(0, 0)$ du plan. Le pôle nord N de \mathbb{S}^2 est naturellement interprété comme le *point à l'infini* du plan complexe.

On peut répéter cette opération avec le pôle sud S et considérer cette fois l'application π^- de $\mathbb{S}^2 \setminus S$ dans \mathbb{R}^2 qui au point (u, v, w) de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ associe le point

$$(1.8) \quad \pi^-(u, v, w) = (x^-(u, v, w), -y^-(u, v, w), 0),$$

où $(x^-(u, v, w), -y^-(u, v, w), 0)$ désigne le point où la droite issue de S et passant par (u, v, w) perce le plan $\{t = 0\} \simeq \mathbb{R}_{x,y}^2$. La raison pour laquelle on introduit ici le signe $-$ devant $y^-(u, v, w)$ est le souci de respecter la cohérence des orientations : si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 , le repère $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ n'est plus direct dans \mathbb{R}^3 , alors que le repère $(\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$ l'est ! Toujours grâce au théorème de Thalès, on trouve cette fois

$$(1.9) \quad x^-(u, v, w) = \frac{u}{1+w} \quad y^-(u, v, w) = \frac{v}{1+w}.$$

L'application π^- de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ dans \mathbb{R}^2 s'avère être bijective et son inverse est l'application

$$(1.10) \quad (x, y, 0) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y)) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

Ainsi le plan complexe se trouve-t'il aussi en bijection (il s'agit encore ici d'un difféomorphisme C^∞) avec $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$; le pôle nord N de \mathbb{S}^2 correspond cette fois à l'origine $(0, 0)$ du plan, tandis que le pôle sud S est maintenant interprété comme le point à l'infini du plan complexe.

Un calcul s'avère particulièrement instructif ici : il est clair que $\pi^+ \circ (\pi^-)^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ entre le plan \mathbb{R}^2 privé de l'origine $(0, 0)$ et lui-même. Le calcul donne, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$(1.11) \quad \begin{aligned} (\pi^+ \circ (\pi^-)^{-1})(x, y) &= \pi^+ \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right). \end{aligned}$$

En termes d'affixes complexes, le difféomorphisme ${}^4 \pi^+ \circ (\pi^-)_{|\mathbb{C}^*}^{-1}$ est ainsi l'involution

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

de \mathbb{C}^* dans lui-même. Notons que la composée de π^+ avec l'inverse de la projection stéréographique depuis le pôle sud (on oublie cette fois le signe $-$ devant y^- dans (1.8)) correspond, une fois restreinte à \mathbb{C}^* et exprimée en termes d'affixes complexes, à l'*inversion géométrique*

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

par rapport au cercle unité; on sait que cette transformation géométrique importante préserve les valeurs absolues des angles orientés des figures, mais change leur signe.

1.1.3. La droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Il existe une autre manière de compactifier le plan complexe en lui ajoutant un point à l'infini. Cette construction est la transcription dans le cadre complexe de celle de la droite projective réelle. Elle puise ses origines dans le concept de *perspective* introduit par les artistes de la Renaissance, formalisée ultérieurement par des géomètres tels Girard Desargues (1591-1661) au milieu du XVII-ième siècle. On introduit sur

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

la relation d'équivalence de colinéarité

$$(z_0, z_1) \mathcal{R} (z'_0, z'_1) \iff z_0 z'_1 - z_1 z'_0 = 0.$$

L'espace quotient

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}}{\mathcal{R}}$$

est équipé d'une distance ainsi définie

$$(1.12) \quad d([z_0 : z_1], [w_0 : w_1]) := \frac{|z_0 w_1 - z_1 w_0|}{\sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2} \sqrt{|w_0|^2 + |w_1|^2}}$$

si $[z_0 : z_1]$ et $[w_0 : w_1]$ désignent les classes d'équivalence respectivement des couples (z_0, z_1) et (w_0, w_1) . La définition (1.12) est bien indépendante des représentants (z_0, z_1) et (w_0, w_1) choisis dans ces classes. On remarque que

$$(1.13) \quad \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[1 : z]; z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}.$$

L'application $z \mapsto [1 : z]$ est un homéomorphisme entre \mathbb{C} et son image, à savoir l'ouvert $U_0 = \{[1 : z]; z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le point $[0 : 1]$ s'interprète dans la décomposition (1.13) comme le point à l'infini du plan complexe \mathbb{C} .

REMARQUE 1.1. L'application

$$(u, v, w) \in \mathbb{S}^2 \mapsto \begin{cases} [u + iv : 1 - w] & \text{si } w \neq 1 \\ [1 + w : u - iv] & \text{si } w \neq -1 \end{cases}$$

(il y a compatibilité des deux définitions si $w^2 \neq 1$ du fait de l'équation de \mathbb{S}^2 : $u^2 + v^2 + w^2 = 1$) réalise un difféomorphisme entre la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 et la

4. On peut interpréter ce difféomorphisme comme un changement de carte sur la sphère \mathbb{S}^2 permettant de ramener l'étude d'un problème posé sur la sphère au voisinage du pôle nord (ou, ce qui revient au même, au voisinage de l'infini dans le plan complexe) à celle d'un problème posé au voisinage de 0 dans le plan complexe.

droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (que l'on peut paramétrer par deux cartes, qui sont en fait deux copies de \mathbb{C} , $U_0 := \{[1 : z] ; z \in \mathbb{C}\}$ et $U_1 = \{[z : 1] ; z \in \mathbb{C}\}$). Ceci montre bien la cohérence (entre elles) des deux manières de compactifier le plan complexe en lui ajoutant un point à l'infini. Les analystes préféreront la compactification *via* la sphère de Riemann, les algébristes celle réalisée par la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

1.1.4. Exercices. On profite de cette première section d'exercices pour proposer, outre quelques exercices en relation avec le contenu de cette première section, une liste d'exercices de révision (essentiellement extraits des listes d'exercices de l'UE MHT 401) autour des séries entières.

EXERCICE 1.1 (distance cordale dans \mathbb{C}). Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. On définit la *distance cordale* entre z_1 et z_2 comme la distance de leurs antécédents sur la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord. Montrer que cette distance vaut

$$d_{\text{cord}}(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

EXERCICE 1.2 (nombres de Bernoulli). En faisant la division suivant les puissances croissantes de X par $\sum_{k \geq 1} X^k/k!$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} X^k,$$

où les B_k sont les *nombres de Bernoulli*. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} (B_k/k!)z^k$?

EXERCICE 1.3 (fonctions de Bessel). Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une collection de nombres complexes $(J_n(z))_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^*, \exp \left[\frac{z}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) \zeta^n.$$

Vérifier que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=\max(0, -n)}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}.$$

Montrer enfin que J_n est solution de l'équation différentielle de Bessel⁵ :

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0.$$

Exprimer en fonction de J_1 la transformée de Fourier de la fonction caractéristique du disque unité, puis en fonction de J_0 celle de la mesure de masse 1 uniformément répartie sur le cercle unité.

EXERCICE 1.4 (fractions rationnelles et séries entières). Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ et R le maximum des modules de tous les pôles de F dans \mathbb{C} . Montrer que, pour $|z| > R$, la fonction $z \mapsto F(z)$ se développe dans la couronne $\{|z| > R\}$ sous la forme

$$F(z) = a_m z^m + \cdots + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{z^k}, \quad (*)$$

5. C'est pour résoudre un problème de mécanique céleste que le mathématicien et astronome allemand Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) introduisit cette équation différentielle (fondamentale en mécanique et en physique) et les fonctions solutions.

où $m \in \mathbb{N}$, $a_m, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ et la suite $(a_{-k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire. Réciproquement, si F est une fonction à valeurs complexes définie dans une couronne $\{|z| > R\}$ et se développant dans cette couronne sous la forme (*), où la suite $(a_{-k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ obéit à une relation de récurrence linéaire, peut-on affirmer que F est la restriction à la couronne $\{|z| > R\}$ d'une fraction rationnelle ?

EXERCICE 1.5 (fonctions génératrices). Si l'on demande de combien de manières on peut régler une somme de N Euros en jetons de 2 Euros et de 3 Euros, comment s'y prendre pour calculer ce nombre de manières ? Penser au développement en série entière au voisinage de 0 de

$$R(z) = \frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3}.$$

EXERCICE 1.6 (rayons de convergence). Calculer (en utilisant soit la règle de Cauchy, soit celle de d'Alembert) les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha z^k \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2} z^k \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k!}.$$

EXERCICE 1.7. Développer en série de puissances entières de x la fonction

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

EXERCICE 1.8 (lemme d'Abel⁶). Montrer que, si une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge en un point $z_0 \neq 0$ du plan complexe, elle converge dans tout le disque ouvert $D(0, |z_0|)$. Montrer que la somme de la série est continue sur le segment $[0, z_0]$.

EXERCICE 1.9 (équations différentielles dans le champ complexe).

a) On suppose que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ est une série entière de rayon de convergence R strictement positif, telle que si S, S', S'' désignent respectivement la somme de cette série entière, celle de la série dérivée, celle de la série dérivée deux fois, dans le disque ouvert de convergence $D(0, R)$, on ait

$$\forall z \in D(0, R), \quad (1-z^2)S''(z) - 2zS'(z) + S(z) = 0. \quad (*)$$

Trouver une relation simple entre a_k et a_{k+2} pour tout entier $k \geq 2$, ainsi que des relations entre a_0 et a_2 d'une part, a_1 et a_3 d'autre part.

b) Montrer qu'il existe une unique série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ solution du problème (*) posé au a), avec de plus $a_0 = 1, a_1 = 0$; quel est le rayon de convergence R de cette série entière ? En déduire qu'il existe une unique fonction réelle de la forme $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dans l'intervalle $] -R, R[$ telle que $f(0) = 1, f'(0) = 0$, et que f soit solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + f(x) = 0$$

sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$.

6. Ce lemme d'apparence anodine, que l'on retrouve dans les travaux du mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829), contemporain d'Évariste Galois, est un lemme absolument fondamental de l'analyse complexe et de la théorie des séries.

1.2. Formes différentielles dans un ouvert du plan complexe

1.2.1. Champs de vecteurs et 1-formes différentielles dans le plan.

Soit (x, y) un point du plan \mathbb{R}^2 . Les opérateurs différentiels réels $(\partial/\partial x)_{(x,y)} = \partial/\partial x$ et $(\partial/\partial y)_{(x,y)} = \partial/\partial y$ (ils ne dépendent pas en fait de (x, y)) engendrent un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, appelé *plan tangent* en (x, y) au plan \mathbb{R}^2 . Ce plan tangent est indépendant de (x, y) ; c'est le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 :

$$T_{\mathbb{R}^2} := \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial x} \oplus \mathbb{R} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Son dual $T_{\mathbb{R}^2}^*$ est appelé *espace cotangent* au point courant (x, y) de \mathbb{R}^2 (cet espace ne dépend pas du point (x, y)). La base duale de la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ est notée (dx, dy) .

DÉFINITION 1.1 (champs de vecteurs, 1-formes différentielles). Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une application ξ de classe C^k de U dans le complexifié $\mathbb{C} \partial/\partial x \oplus \mathbb{C} \partial/\partial y$ du plan tangent $T_{\mathbb{R}^2}$ est appelée *champ de vecteurs de classe C^k* , à valeurs complexes, dans U . Une application ω de classe C^k de U dans le complexifié $\mathbb{C} dx \oplus \mathbb{C} dy$ de l'espace cotangent $T_{\mathbb{R}^2}^*$ est appelée *1-forme différentielle de classe C^k* , ou encore *forme différentielle de degré 1*, à valeurs complexes, dans U . Si le champ de vecteurs (*resp.* la 1-forme différentielle) prend ses valeurs dans $T_{\mathbb{R}^2}$ (*resp.* dans $T_{\mathbb{R}^2}^*$), le champ (*resp.* la 1-forme) est dit réel (*resp.* réelle).

REMARQUE 1.2. *Cette remarque s'adresse aux étudiants ayant acquis des bases de Géométrie différentielle en Licence.* Dans le contexte plus général d'une surface Σ différentiable (on se contentera ici de se limiter au cadre des sous-variétés de \mathbb{R}^N vu en dans l'UE de géométrie différentielle de Licence 3 (MHT 612)), le plan tangent $T_X(\Sigma)$ en un point $X \in \Sigma$ s'interprète comme le \mathbb{R} -espace vectoriel des dérivations au point X de l'algèbre $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ des germes en X de fonctions C^∞ et à valeurs réelles définies sur la surface au voisinage de X . Une *dérivation* de $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ est une application \mathbb{R} -linéaire D de $\mathcal{E}_{\Sigma, X}$ dans \mathbb{R} , se pliant à la règle de Leibniz

$$D(uv) = u(X)D(v) + v(X)D(u) \quad \forall (u, v) \in \mathcal{E}_{\Sigma, X}.$$

Dans le cas particulier $\Sigma = \mathbb{R}^2$, on retrouve bien le fait que le plan tangent ne dépend pas de X et est engendré par les deux opérateurs différentiels $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$. L'espace cotangent $T_X^*(\Sigma)$ au point X de Σ est le \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 défini comme le dual de l'espace tangent $T_X(\Sigma)$. Les notions de champ de vecteurs et de 1-forme différentielle s'étendent à ce nouveau contexte. Parmi les surfaces pouvant jouer un rôle dans ce cours, on retiendra essentiellement la sphère de Riemann introduite dans la sous-section 1.1.2.

Un champ de vecteurs ξ de classe C^k , à valeurs complexes, dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 , s'exprime donc (de manière unique car $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial y$ constituent une base de $T_{\mathbb{R}^2}$) sous la forme

$$(1.14) \quad \xi(x, y) = \alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in U,$$

où les applications coordonnées α et β sont des applications de classe C^k de U dans \mathbb{C} . De même, une 1-forme différentielle ω de classe C^k , à valeurs complexes, dans ce même ouvert U de \mathbb{R}^2 , s'exprime (de manière unique car dx et dy constituent

une base de $T_{\mathbb{R}^2}^*$) sous la forme

$$(1.15) \quad \omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \forall (x, y) \in U,$$

où P et Q sont des fonctions de classe C^k de U dans \mathbb{C} . La 1-forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ (de classe C^k dans U) agit sur le champ de vecteurs (de classe C^k dans U) $\xi = \alpha \partial/\partial x + \beta \partial/\partial y$ en produisant la fonction, elle aussi de classe C^k (de U dans \mathbb{C}) :

$$(x, y) \in U \mapsto \langle \omega(x, y), \xi(x, y) \rangle_{(x, y)} = P(x, y) \alpha(x, y) + Q(x, y) \beta(x, y).$$

En utilisant les relations (1.2), il est utile de remarquer que la 1-forme $P dx + Q dy$ s'exprime aussi sous la forme

$$P dx + Q dy = A dz + B d\bar{z},$$

où

$$(1.16) \quad \begin{aligned} dz &:= dx + i dy & d\bar{z} &:= dx - i dy \\ A &:= \frac{P - iQ}{2} & B &:= \frac{P + iQ}{2}. \end{aligned}$$

On dispose d'ailleurs aussi des formules inverses

$$(1.17) \quad \begin{aligned} A dz + B d\bar{z} &= P dx + Q dy \\ P &= A + B & Q &= i(A - B). \end{aligned}$$

Il est aussi commode d'introduire les deux champs de vecteurs (sur \mathbb{R}^2)

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

puisque ceux ci réalisent avec $(dz, d\bar{z})$ un système en dualité, c'est-à-dire⁷ :

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, dz \right\rangle_z &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, d\bar{z} \right\rangle_z = 1 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, d\bar{z} \right\rangle_z &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, dz \right\rangle_z = 0. \end{aligned}$$

L'opérateur différentiel à coefficients complexes $\partial/\partial \bar{z}$ défini dans (1.18) jouera par la suite un rôle majeur : c'est l'*opérateur de Cauchy⁸ -Riemann*. S'il s'agit d'un opérateur différentiel complexe (et non réel) du fait de son expression, on peut faire apparaître un opérateur réel (mais du second ordre), agissant sur les fonctions C^∞ , en calculant

$$(1.20) \quad 4 \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta,$$

où Δ est l'opérateur laplacien⁹.

7. Faire la vérification en exercice.

8. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) demeure l'inventeur de l'analyse moderne. Il a considérablement œuvré pour l'essor de l'analyse complexe et sa formalisation au XIX-ième siècle.

9. On fait ici référence à Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien, astronome et physicien, dont les travaux ont contribué, comme ceux de Joseph-Baptiste Fourier, à aiguiller l'analyse complexe vers le champ des applications. Le laplacien, la transformée de Laplace, etc., sont des objets omniprésents dans les sciences de l'ingénieur aujourd'hui. On retrouvera le laplacien plus loin dans ce cours, avec les fonctions harmoniques.

1.2.2. Potentiel et 1-formes exactes. Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Si $F : U \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^{k+1} (ce qui signifie que $\operatorname{Re} F$ et $\operatorname{Im} F$ le sont), la différentielle de F peut être considérée comme une 1-forme de classe C^k à valeurs complexes, à savoir la 1-forme

$$dF := \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

d'après les formules (1.18) et (1.16). On dispose ainsi d'un opérateur \mathbb{R} -linéaire d de l'espace $C^{k+1}(U, \mathbb{C})$ des fonctions de classe C^{k+1} de U dans \mathbb{C} (on dit aussi 0-formes de classe C^{k+1} dans U et à valeurs complexes) dans l'espace des 1-formes de classe C^k de U dans \mathbb{C} .

DÉFINITION 1.2 (formes différentielles exactes). Une 1-forme ω de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \infty$) est dite exacte dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 s'il existe une fonction F de classe C^{k+1} de U dans \mathbb{C} telle que

$$(1.21) \quad \omega(x, y) = dF(x, y) \quad \forall (x, y) \in U.$$

On dit alors que la 1-forme différentielle ω *dérive du potentiel* complexe F , ou encore que F est une *primitive* de ω dans U .

REMARQUE 1.3. Si U est connexe et si ω est une 1-forme différentielle de classe C^k exacte dans U , deux potentiels complexes F_1 et F_2 dont ω dérive diffèrent d'une constante complexe. En effet $dF_1 = dF_2 = \omega$ implique $d(F_1 - F_2) = 0$, donc $F_1 - F_2 = \text{constante}$ localement de part l'inégalité des accroissements finis, donc aussi globalement dans U puisque U est connexe.

EXEMPLE 1.1 (fonctions puissance). Dans \mathbb{C} , un exemple majeur de forme exacte est celui des formes $(z - z_0)^k dz$, $k \in \mathbb{N}$. On vérifie en effet immédiatement que, dans \mathbb{C} tout entier,

$$(1.22) \quad d\left[\frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}\right] = (z - z_0)^k dz$$

puisque

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}[(x + iy - z_0)^{k+1}] &= (k+1)(x + iy - z_0)^k \\ \frac{\partial}{\partial y}[(x + iy - z_0)^{k+1}] &= i(k+1)(x + iy - z_0)^k \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'après la règle de Leibniz. Lorsque k est un entier strictement négatif, la forme $(z - z_0)^k dz$ est exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ lorsque $k \neq -1$ puisque la formule (1.22) reste valable dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ dans ce cas. Seul subsiste le problème concernant le cas $k = -1$ sur lequel nous reviendrons¹⁰.

1.2.3. 2-formes différentielles dans un ouvert du plan. Comme $T_{\mathbb{R}^2}^*$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, le produit extérieur $T_{\mathbb{R}^2}^* \wedge T_{\mathbb{R}^2}^*$ est une droite vectorielle réelle, engendrée par la *forme déterminant* $dx \wedge dy$, qui s'exprime aussi sous la forme

$$dx \wedge dy = \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right) \wedge \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right) = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{2i}.$$

¹⁰. Cette difficulté n'est pas une surprise si l'on pense à l'analyse réelle. En effet, la fonction $t \mapsto \log|t - t_0|$, primitive de $1/(t - t_0)$, est la seule, parmi les primitives des autres fonctions puissances $t \mapsto (t - t_0)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, qui ne se présente pas comme une fraction rationnelle, donc échappe au cadre de l'algèbre. Nous mettons ici le doigt sur un point majeur de l'analyse complexe.

DÉFINITION 1.3 (2-forme différentielle). Une 2-forme différentielle à valeurs complexes¹¹ et de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 est par définition une application de classe C^k de U dans le complexifié $\mathbb{C} dx \wedge dy$ de la droite vectorielle $T_{\mathbb{R}^2}^* \wedge T_{\mathbb{R}^2}^*$. Une telle 2-forme Ω s'exprime donc de manière unique sous la forme

$$(1.24) \quad \Omega(x, y) = \Phi(x, y) dx \wedge dy = \frac{1}{2i} \Phi(x, y) d\bar{z} \wedge dz,$$

où Φ désigne une fonction de classe C^k de U dans \mathbb{C} .

REMARQUE 1.4. On peut définir la notion de 2-forme différentielle (à valeurs complexes) sur une surface différentiable réelle (comme la sphère de Riemann). Une 2-forme différentielle ne s'annulant nulle part sur cette surface est appelée *forme volume* (c'est le cas de la forme déterminant dans \mathbb{R}^2). Le fait qu'il puisse exister une forme volume sur une surface différentiable est équivalent au fait que celle-ci soit orientable (ce qui n'est pas le cas, par exemple, du ruban de Möbius, de la bouteille de Klein, du plan projectif réel). C'est le cas, par contre, de toute sous variété de \mathbb{R}^N qui hérite d'une orientation induite par celle de \mathbb{R}^N . La sphère de Riemann, donc la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, sont orientables.

Nota. Sauf mention du contraire, toutes les 1 ou 2-formes différentielles envisagées à partir de maintenant seront toujours complexes.

Comme nous avons défini un opérateur \mathbb{R} -linéaire d allant du \mathbb{R} -espace vectoriel des 0-formes différentielles de classe C^{k+1} (dans un ouvert U de \mathbb{C}) dans le \mathbb{R} -espace vectoriel des 1-formes de classe C^k dans U (à savoir l'opérateur de différentiation $F \mapsto dF$), nous allons maintenant définir un opérateur \mathbb{R} -linéaire (que nous noterons naturellement aussi d) du \mathbb{R} -espace des 1-formes de classe C^{k+1} à valeurs complexes sur U dans le \mathbb{R} -espace des 2-formes de classe C^k à valeurs complexes dans U . Puisque nous avons en tête la construction d'un opérateur de différentiation, la règle que nous allons imposer pour cette définition est la règle de Leibniz : si f est une fonction de classe C^{k+1} de U dans \mathbb{C} et ω une 1-forme de classe C^{k+1} de U dans \mathbb{C} , on souhaite donc

$$d[f\omega] = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Les formes dx et dy étant constantes, on impose aussi $d[dx] = d[dy] = 0$. On trouve donc, compte tenu de ces règles et de la clause de \mathbb{R} -linéarité,

$$(1.25) \quad \begin{aligned} d[P dx + Q dy] &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Ou encore, ce qui revient au même (mais est plus en phase avec le point de vue complexe plutôt que réel) :

$$(1.26) \quad \begin{aligned} d[A dz + B d\bar{z}] &= dA \wedge dz + dB \wedge d\bar{z} = \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial z} dz + \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz + \left(\frac{\partial B}{\partial z} dz + \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge d\bar{z} \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) d\bar{z} \wedge dz = 2i \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

11. On dit aussi *forme différentielle de degré 2*.

Il est commode d'introduire les deux opérateurs linéaires ∂ et $\bar{\partial}$ agissant ainsi sur les 1-formes de classe C^1 :

$$(1.27) \quad \begin{aligned} \partial[Adz + Bd\bar{z}] &= \frac{\partial B}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} = -\frac{\partial B}{\partial z} d\bar{z} \wedge dz \\ \bar{\partial}[Adz + Bd\bar{z}] &= \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \end{aligned}$$

Ainsi l'action de d se scinde en celles de ces deux opérateurs \mathbb{R} -linéaires : $d = \partial + \bar{\partial}$. L'action des deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ est aussi définie sur les 0-formes (c'est-à-dire les fonctions) de classe C^1 ; on pose

$$(1.28) \quad \partial F := \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad \bar{\partial} F := \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

de manière, ici encore, à ce que l'action de d se scinde en celle de ces deux opérateurs \mathbb{R} -linéaires : $d = \partial + \bar{\partial}$.

On remarque immédiatement que, si F est une fonction de classe C^2 dans U ,

$$(1.29) \quad (d \circ d)[F] = d[dF] = 0$$

du fait du lemme de Schwarz¹² sur les dérivées croisées. Ceci s'écrit encore

$$(1.30) \quad \bar{\partial} \circ \partial = -\partial \circ \bar{\partial} \quad \partial \circ \partial = \bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0.$$

L'opérateur (du second ordre cette fois)

$$(1.31) \quad dd^c := \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial},$$

dit *opérateur de Monge-Ampère (complexe)*, joue un rôle important en théorie du potentiel¹³. On remarque que la formule (1.20) se lit aussi

$$(1.32) \quad dd^c F = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \Delta[F] \frac{dx \wedge dy}{4\pi}$$

pour toute fonction F de classe C^2 .

DÉFINITION 1.4 (forme fermée). Une 1-forme différentielle ω de classe C^1 dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 est dite *fermée* si et seulement si $d\omega = 0$.

EXEMPLE 1.2. Si f est une fonction de classe C^1 de U dans \mathbb{C} , la forme $f(z) dz$ est fermée dans U si et seulement si $\partial f / \partial \bar{z} \equiv 0$ dans U .

Puisque $d \circ d = 0$, toute 1-forme différentielle dans un ouvert U , exacte et de régularité au moins C^1 , est fermée. Nous verrons plus tard que la réciproque est fautive sans condition supplémentaire sur U . En revanche, nous avons un résultat très important, le *lemme de Poincaré*, qui nous assure que, sous une hypothèse particulière sur U (vérifiée si U est convexe, par exemple est un disque), alors toute

12. Il s'agit ici du mathématicien allemand Hermann Schwarz (1843-1921). On lui doit un résultat plus relevant en analyse complexe, dit aussi lemme de Schwarz (ou encore *principe de réflexion*), que nous verrons plus loin. Le résultat mentionné ici est un lemme classique de calcul différentiel, sans relation particulière avec l'analyse complexe.

13. L'équation de Monge-Ampère (et, avec elle, l'*opérateur de Monge-Ampère* réel), a été introduite par le mathématicien français Gaspard Monge (1746-1818) pour résoudre un problème de minimisation de coût pour une fonctionnelle de transport (c'est aujourd'hui le cadre de la théorie du *transport optimal*). On retrouve cet opérateur en électrodynamique (et théorie du potentiel) dans les travaux d'Ampère. C'est sous l'angle de la théorie du potentiel (et de l'analyse harmonique) qu'il apparaîtra dans ce cours.

forme fermée est exacte (le lemme propose même la construction explicite d'une primitive).

LEMME 1.1 (lemme de Poincaré¹⁴). *Soit U un ouvert du plan complexe étoilé par rapport au point $X_0 = (x_0, y_0)$, ce qui signifie que, pour tout $X = (x, y) \in U$, le segment $[X_0, X]$ reste inclus dans U . Soit $\omega = P dx + Q dy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 fermée dans U . La fonction F définie dans U par*

$$(1.33) \quad F(x, y) := \int_0^1 \left((x-x_0)P(X_0+t(X-X_0)) + (y-y_0)Q(X_0+t(X-X_0)) \right) dt$$

est de classe C^2 dans U et vérifie $dF = \omega$ dans U .

DÉMONSTRATION. On ne restreint nullement le problème en supposant U étoilé par rapport à l'origine ($x_0 = 0, y_0 = 0$). Puisque P et Q sont de classe C^1 , les théorèmes élémentaires de continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre¹⁵ assurent que la fonction proposée F est de classe C^2 dans U et que l'on a, en utilisant la règle de Leibniz,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) dt + x \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) t dt + y \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty) t dt.$$

Si l'on injecte l'hypothèse que la forme ω est fermée, soit

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(tx, ty) = \frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty) \quad \forall (x, y) \in U, \forall t \in [0, 1],$$

on trouve, pour tout (x, y) dans U ,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 P(tx, ty) dt + \int_0^1 \left(x \frac{\partial P}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial P}{\partial y}(tx, ty) \right) t dt,$$

soit (après intégration par parties)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 P(tx, ty) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} [P(tx, ty)] dt \\ &= \int_0^1 P(tx, ty) dt + \left[tP(tx, ty) \right]_0^1 - \int_0^1 P(tx, ty) dt \\ &= P(x, y) \quad \forall (x, y) \in U. \end{aligned}$$

Le même calcul (pour raisons de symétrie, on échange juste x et y , ainsi que P et Q) conduit à

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad \forall (x, y) \in U.$$

On a donc bien $dF = \omega$, ce qui achève la preuve du lemme. □

14. La formalisation du calcul extérieur doit pour une grande part aux travaux du géomètre différentiel et algébriste Élie Cartan (1869-1951). Ce lemme de Poincaré (mentionné en 1889 par Volterra, comme d'ailleurs la formule de Green-Riemann que nous verrons plus loin) ne figure qu'implicitement dans les travaux d'Henri Poincaré (1854-1912), mais il est évident que le pont entre l'analyse complexe et la géométrie constitue la trame d'une grande partie de son œuvre (on pourra se reporter à [CGL] pour un panorama de l'héritage scientifique de Poincaré).

15. Inutile ici d'invoquer la théorie de l'intégration vue en Licence 3. Les résultats vus en L2 (voir par exemple le cours de MHT 401 [Y0]) dans le cadre de l'intégration Riemann s'appliquent.

EXEMPLE 1.3 (le logarithme complexe). Notons qu'un ouvert étoilé est toujours connexe. Outre le cas des ouverts convexes (\mathbb{C} tout entier, un disque ouvert $D(z_0, r_0)$ de \mathbb{C} , etc.), un exemple particulièrement important d'ouvert étoilé est celui du *plan complexe fendu*, c'est-à-dire le plan complexe auquel on retire une demi-droite fermée $\{te^{i\theta_0}; t \geq 0\}$, avec $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, permettant l'accès à l'origine¹⁶. Un tel ouvert U_{θ_0} est étoilé par rapport à tout point de la demi-droite $\{te^{-i\theta_0}; t > 0\}$ opposée à la demi-droite retirée. La 1-forme

$$\omega_{\theta_0} : z \in U_{\theta_0} \mapsto (\log |z| + i \arg_{] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[}(z)) dz$$

(où $\arg_{] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[}$ désigne la détermination de l'argument appartenant à $] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[$) est une forme C^∞ et fermée dans U_{θ_0} . On se réfère à l'exemple 1.2. Pour montrer que l'on est bien en situation d'exploiter cet exemple, il est commode d'exprimer l'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\bar{z}$ en coordonnées polaires. On vérifie que si f est une fonction de classe C^1 dans U_{θ_0} et si

$$g : (r, \theta) \in]0, \infty[\times] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[\mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

on a

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}[f](r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{2} \left(e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [g](r, \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[f](r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [g](r, \theta). \end{aligned}$$

La fonction g correspondant ainsi à la fonction

$$f_{\theta_0} : (x, y) \in U_{\theta_0} \mapsto \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg_{] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[}(x + iy)$$

est la fonction $g(r, \theta) = \log r + i\theta$ et l'on déduit de la seconde relation dans (1.34) que $\partial f_{\theta_0}/\partial \bar{z} \equiv 0$ dans U_{θ_0} . La forme ω_{θ_0} est donc fermée dans U_{θ_0} , donc exacte d'après le lemme de Poincaré 1.1 (ce lemme en fournit d'ailleurs explicitement un potentiel F_{θ_0} dont elle dérive), si l'on utilise que U_{θ_0} est étoilé par rapport (par exemple) au point d'affixe $e^{-i\theta_0}$. Cette fonction F_{θ_0} vérifie donc $\partial F_{\theta_0}/\partial z \equiv f_{\theta_0}$ et $\partial F_{\theta_0}/\partial \bar{z} \equiv 0$ dans U_{θ_0} . En utilisant la première des relations (1.34), on observe aussi que

$$(1.35) \quad \frac{\partial}{\partial z}[f_{\theta_0}](x, y) = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \quad \forall (x, y) \in U_{\theta_0}.$$

La relation (1.35) justifie que l'on appelle la fonction f_{θ_0} une *détermination du logarithme complexe* dans le plan fendu U_{θ_0} .

PROPOSITION 1.1 (locale exactitude des formes fermées). *Toute 1-forme ω de classe C^1 et fermée dans un ouvert U de \mathbb{C} est localement exacte dans cet ouvert. Plus précisément, étant donné un point (x, y) quelconque de U , la 1-forme ω est exacte dans le disque ouvert de centre (x, y) et de rayon la distance de (x, y) à la frontière de U .*

¹⁶. Un coup de ciseaux dans une feuille de papier suffit à produire une réalisation de plan complexe fendu.

1.2.4. Image réciproque d'une forme différentielle. La construction des champs de vecteurs et des 1-formes différentielles faite dans le cas du plan peut être répétée dans le cas de la droite réelle \mathbb{R} . L'espace tangent $T_{\mathbb{R}}$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R} d/dt$ (il ne dépend pas du point), son dual $T_{\mathbb{R}}^*$ est le \mathbb{R} -espace $\mathbb{R} dt$ ($\{dt\}$ est ici la base duale de $\{d/dt\}$), et une 1-forme différentielle sur de classe C^k (à valeurs complexes) un intervalle ouvert I de \mathbb{R} est par définition une application de classe C^k de I dans $\mathbb{C} dt$. Elle se représente donc de manière unique sous la forme

$$t \mapsto \tau(t) = \rho(t) dt,$$

où ρ désigne une fonction de classe C^k de I dans \mathbb{C} .

Étant donné un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , un ouvert U de \mathbb{R}^2 , et une application $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow U$ de classe C^l ($l \geq 1$), on peut associer à toute 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ sur U son *image réciproque* (en anglais *pullback*) définie comme la 1-forme sur I :

$$(1.36) \quad \gamma^*[\omega](t) = P[\gamma(t)] d\gamma_1 + Q[\gamma(t)] d\gamma_2 = \left(P(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + Q(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \right) dt.$$

Si ω est de classe C^k , cette 1-forme est de régularité au moins $C^{\min(k, l-1)}$. Si $\omega = dF$, où F est une fonction de classe C^{k+1} , on note que la règle de Leibniz du calcul différentiel implique

$$(1.37) \quad \gamma^*[\omega] = \gamma^*[dF] = d[F \circ \gamma],$$

autrement dit d commute avec la prise d'image réciproque pourvu que l'on convienne que, pour les 0-formes, c'est-à-dire les fonctions, $\gamma^*[F] := F \circ \gamma$, ce qui est naturel. Soient maintenant V et U deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}_{u,v}^2$ et $\mathbb{R}_{x,y}^2$, et Θ une application de classe C^l ($l \geq 1$) de V dans U , de jacobien

$$J_{\Theta} = \frac{\partial(\Theta_1, \Theta_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \partial\Theta_1/\partial u & \partial\Theta_1/\partial v \\ \partial\Theta_2/\partial u & \partial\Theta_2/\partial v \end{vmatrix}.$$

On peut associer à toute 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ sur U son *image réciproque* définie comme la 1-forme sur V :

$$(1.38) \quad \begin{aligned} \Theta^*[\omega](u, v) &= P[\Theta(u, v)] d\Theta_1(u, v) + Q[\Theta(u, v)] d\Theta_2(u, v) \\ &= \left((P \circ \Theta) \frac{\partial\Theta_1}{\partial u} + (Q \circ \Theta) \frac{\partial\Theta_2}{\partial u} \right) (u, v) du + \left((P \circ \Theta) \frac{\partial\Theta_1}{\partial v} + (Q \circ \Theta) \frac{\partial\Theta_2}{\partial v} \right) (u, v) dv. \end{aligned}$$

Si ω est de classe C^k , cette 1-forme est de régularité au moins $C^{\min(k, l-1)}$.

On peut également (sur le même principe que précédemment) associer à toute 2-forme $\Omega = \Phi dx \wedge dy$ sur U son *image réciproque* comme la 2-forme sur V :

$$(1.39) \quad \Phi^*[\Omega](u, v) = \Phi[\Theta(u, v)] d\Theta_1 \wedge d\Theta_2 = J_{\Theta}(u, v) \Phi[\Theta(u, v)] du \wedge dv.$$

Si Ω est de classe C^k , cette 2-forme est de régularité au moins $C^{\min(k, l-1)}$.

On note le résultat utile suivant :

PROPOSITION 1.2 (commutation image réciproque versus d). *Soient V et U deux ouverts de \mathbb{R}^2 , Θ une application de classe C^2 de U dans V , $\omega = Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^1 sur U . On a la relation*

$$(1.40) \quad d[\Theta^*[\omega]] = \Theta^*[d\omega],$$

autrement dit la prise d'image réciproque des 1-formes commute avec l'opérateur de différentiation des formes d .

DÉMONSTRATION. Utilisant la formule (1.38), le fait que $d \circ d = 0$ (on note que le lemme de Schwarz sur les dérivées croisées est caché ici) et que $d\Theta_1 \wedge d\Theta_1 = d\Theta_2 \wedge d\Theta_2 = 0$, le calcul donne bien :

$$\begin{aligned} d[\Theta^*[\omega]] &= d[P \circ \Theta] \wedge d\Theta_1 + d[Q \circ \Theta] \wedge d\Theta_2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} \circ \Theta \right) \times d\Theta_2 \right) \wedge d\Theta_1 + \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \circ \Theta \right) \times d\Theta_1 \right) \wedge d\Theta_2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \circ \Theta \right) d\Theta_1 \wedge d\Theta_2 \\ &= \Theta^*[d\omega]. \end{aligned}$$

□

1.2.5. Exercices.

EXERCICE 1.10 (le « yoga » des calculs en les coordonnées z et \bar{z}). Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} (les coordonnées y étant respectivement dénotées z et w), f une fonction différentiable de U dans V , g une fonction différentiable de V dans \mathbb{C} . Exprimer $\partial(g \circ f)/\partial z$ et $\partial(g \circ f)/\partial \bar{z}$ en fonction de $f, g, \partial f/\partial z, \partial f/\partial \bar{z}, \partial g/\partial w, \partial g/\partial \bar{w}$. Indication : *exprimer plutôt l'action de la différentielle de $g \circ f$ sur*

$$h = (h_1, h_2) \longleftrightarrow h_1 + ih_2.$$

EXERCICE 1.11 (laplacien en coordonnées polaires).

a) Vérifier que, pour toute fonction F de classe C^2 et à valeurs complexes dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 , on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) [F] = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z} \right) [F] = \frac{1}{4} \Delta [F],$$

où

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

désigne l'opérateur de Laplace (ou *laplacien*) en dimension 2.

b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et V son image réciproque par l'application

$$(r, \theta) \in]0, \infty[\times \mathbb{R} \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Vérifier que si F est une fonction de classe C^2 dans U , à valeurs dans \mathbb{C} , on a, pour $(r, \theta) \in V$,

$$\Delta_{(x,y)} [F](r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) [G](r, \theta)$$

si $G(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Déterminer toutes les fonctions F de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, radiales ($F(x, y)$ ne dépend que de $\sqrt{x^2 + y^2}$), et solutions de $\Delta[F] \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

EXERCICE 1.12 (formes exactes, formes fermées). Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la forme

$$\omega_\alpha := \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{|z|^\alpha}, \quad z = x + iy,$$

est elle fermée dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

EXERCICE 1.13 (formes exactes, formes fermées). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction de classe C^1 de U dans \mathbb{C} ; montrer que $f(z) dz$ est fermée si et seulement si $\partial f / \partial \bar{z} \equiv 0$ et que $f(z) d\bar{z}$ est fermée si et seulement si $\partial f / \partial z \equiv 0$.

EXERCICE 1.14. Soit θ_0 un nombre réel, U_{θ_0} l'ouvert

$$U_{\theta_0} = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0} ; t \geq 0\}$$

(le plan complexe « fendu » le long de la demi-droite issue de l'origine et dirigée par $e^{i\theta_0}$) et, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la 1-forme différentielle dans U_{θ_0} définie par

$$\omega_\alpha(z) = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg]_{\theta_0, \theta_0+2\pi[}(z)} dz.$$

Pourquoi cette forme est-elle exacte dans U_{θ_0} quelque soit la valeur de α ? Montrer que les fonctions F de classe C^1 dans U_{θ_0} telles que $dF = \omega_\alpha$ sont de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \frac{|z|^{\alpha+1}}{\alpha+1} \exp\left(i(\alpha+1)\arg]_{\theta_0, \theta_0+2\pi[}(z)\right)$$

si $\alpha \neq -1$ (C étant une constante arbitraire) et de la forme

$$z \in U_{\theta_0} \longmapsto F(z) = C + \log |z| + i \arg]_{\theta_0, \theta_0+2\pi[}(z)$$

si $\alpha = -1$ (C désignant toujours une constante arbitraire).

EXERCICE 1.15 (formes différentielles et équations différentielles). Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 et $Pdx + Qdy$ une 1-forme de classe C^1 fermée dans U . Écrire ce que cela signifie sur P et Q . On désigne par F une primitive de $Pdx + Qdy$ dans U , c'est-à-dire une fonction de classe C^2 dans U telle que $dF = Pdx + Qdy$. Pourquoi existe-t-il bien une telle primitive? Quelle est l'équation cartésienne du graphe de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad y(x_0) = y_0,$$

lorsque (x_0, y_0) est un point de U où Q ne s'annule pas?

EXERCICE 1.16 (division des formes). À quelle condition une 2-forme continue $\Omega = F dx \wedge dy$ dans un ouvert U de \mathbb{C} s'écrit elle $\Omega = d|z|^2 \wedge \Xi$, où Ξ est une 1-forme continue (on distinguera les cas où $0 \in U$ et $0 \notin U$). Quelles sont, lorsque cela est possible, toutes les 1-formes continues Ξ solutions de $d|z|^2 \wedge \Xi = \Omega$?

EXERCICE 1.17 (image réciproque de 2-formes différentielles). Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} et Φ une application de classe C^1 de U dans V . Exprimer $\Phi^*[d\bar{z} \wedge dz]$ en termes de $|\partial\Phi/\partial z|$ et de $|\partial\Phi/\partial \bar{z}|$.

EXERCICE 1.18 (facteurs intégrants locaux dans un ouvert de \mathbb{R}^2). Soit ω une 1-forme de classe C^1 dans un ouvert de \mathbb{R}^2 , telle que $\omega(z_0) \neq 0$ (ce qui signifie $(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)) \neq 0$ si $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$). Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un voisinage $V_{(x_0, y_0)}$ de (x_0, y_0) dans U , une fonction f_{x_0, y_0} de classe C^1 dans ce voisinage et ne s'y annulant pas, telle que la forme $f_{(x_0, y_0)} \times \omega$ soit exacte dans $V_{(x_0, y_0)}$.

- (1) Montrer que l'on peut se ramener à résoudre le problème dans la situation particulière où $\omega = dx + R(x, y) dy$.

- (2) En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz¹⁷, montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$ assez petits tels que, pour tout x dans $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$, il existe dans $]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ une unique solution $y \mapsto \varphi_x(y)$ du problème de Cauchy :

$$\frac{d\varphi_x}{dy} = -R(\varphi_x, y) \quad \& \quad \varphi_x(y_0) = x.$$

Montrer aussi (voir le cours de calcul différentiel de L3, en particulier ce qui concerne la dépendance en des paramètres dans le théorème de Cauchy-Lipschitz) que l'on peut, quitte à choisir ϵ et η assez petits, affirmer que $(x, y) \mapsto \varphi_x(y)$ est de classe C^1 dans $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\times]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$.

- (3) Montrer que $\Phi : (x, y) \mapsto (x, y) = (\varphi_x(y), y)$ réalise un difféomorphisme local entre deux voisinages de (x_0, y_0) dans U . Vérifier que l'on a au voisinage de (x_0, y_0) :

$$\Phi^* [dx + R(x, y) dy] = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}(\varphi_x(y), y) dx.$$

En déduire que la forme $\Phi^* [dx + R(x, y) dy]$ a un facteur intégrant ne s'annulant pas au voisinage de (x_0, y_0) , et qu'il en est de même pour la forme $dx + R(x, y) dy$ (en utilisant l'opérateur $(\Phi^{-1})^*$).

La méthode utilisée dans cet exercice relève d'une stratégie très importante en géométrie, à savoir le *redressement des champs de vecteurs* (cf. [HY], Exercice 1.18 et son corrigé).

1.3. Intégration des formes différentielles

1.3.1. Chemins paramétrés dans \mathbb{R}^2 .

DÉFINITION 1.5 (chemin continu du plan). Un *chemin paramétré continu* de \mathbb{R}^2 est une application continue γ d'un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} dans le plan \mathbb{R}^2 . Le point $\gamma(a)$ est appelé *origine*, le point $\gamma(b)$ *extrémité*. L'ensemble $\gamma([a, b])$ est appelé *support* du chemin γ . Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un *lacet*; si tel est le cas et que de plus $\gamma|_{[a, b]}$ est injective, on dit que γ est un *lacet simple*. Étant donné un chemin continu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, on appelle *paramétrage admissible* de ce chemin tout autre chemin paramétré continu $\tilde{\gamma} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, où φ est un homéomorphisme strictement croissant de $[a, b]$ dans $[a', b']$.

Il ne faut pas confondre la notion de *chemin* (notion fonctionnelle, un chemin est une fonction !) et celle de *support d'un chemin* (qui est une notion géométrique). Attention ! Il existe des chemins continus très pathologiques : la *courbe de Peano*, chemin continu d'origine $(0, 0)$ et d'extrémité $(1, 1)$ dont le support est le carré plein $[0, 1] \times [0, 1]$ (son graphe « noircit » donc complètement ce carré plein), le *flocon de Von Koch* (modèle des courbes fractales), etc. (voir la figure 1.2). Pour pouvoir conduire des calculs explicites (par exemple des calculs d'intégrales curvilignes de 1-formes différentielles), il faut certainement introduire plus de régularité, ce que nous allons faire dans un premier temps (avant de revenir au cas simplement continu ultérieurement).

17. Voir le cours de Calcul Différentiel de L3.

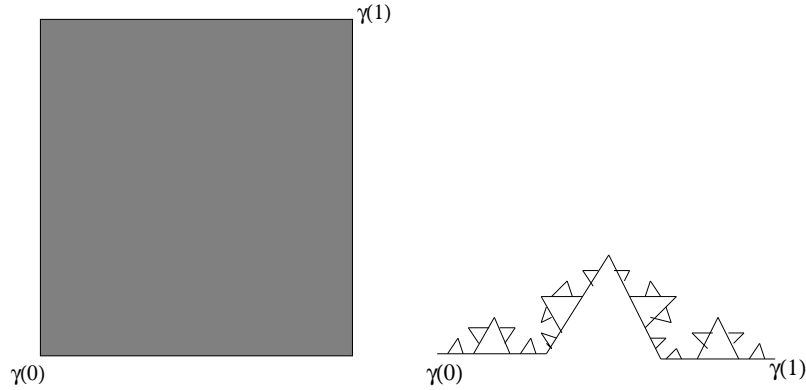


FIGURE 1.2. Courbe de Peano et flocon de Von Koch

DÉFINITION 1.6 (chemin paramétré C^1 par morceaux). Un *chemin paramétré C^1 par morceaux* γ est une application continue et C^1 par morceaux d'un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . Ceci signifie, outre que γ est continue, qu'il existe une subdivision

$$(1.41) \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < b = t_N$$

telle que la restriction de γ à chaque segment fermé $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, soit de classe C^1 sur ce segment¹⁸. On appelle *paramétrisation admissible* d'un tel chemin tout autre chemin $\tilde{\gamma}$ paramétré C^1 par morceaux $\tilde{\gamma} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$, où φ est une application de classe C^1 strictement croissante entre $[a, b]$ et $[a', b']$.

EXEMPLE 1.4 (bords orientés de triangles). Tout triangle plein T du plan orienté (le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est supposé direct) induit un chemin paramétré C^1 par morceaux : le chemin consistant à suivre son bord dans le sens trigonométrique. Une subdivision avec $N = 1$ (trois nœuds) est alors adaptée pour décrire ce chemin paramétré. On notera ∂T_+ ce chemin paramétré.

1.3.2. Intégrale curviligne d'une 1-forme le long d'un chemin paramétré C^1 par morceaux. Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un chemin paramétré C^1 par morceaux et $\omega = P dx + Q dy$ une 1-forme différentielle continue dans un ouvert U contenant le support de γ , on peut définir l'*intégrale curviligne* de ω le long de γ . Cette définition correspond, lorsque ω est une 1-forme réelle, à celle du calcul de la *circulation* (on dit aussi en physique *travail*) du champ de forces $(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ le long du chemin paramétré γ . Si (1.41) est une subdivision de $[a, b]$ correspondant à γ , on pose

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &:= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_{|[t_j, t_{j+1}]}^*[\omega] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(P(\gamma(t))(\gamma_1')|_{[t_j, t_{j+1}]} + Q(\gamma(t))(\gamma_2')|_{[t_j, t_{j+1}]} \right) dt. \end{aligned}$$

18. C'est-à-dire se prolonge C^1 sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant ce segment.

Cette définition ne dépend ni du choix de la subdivision¹⁹, ni de la paramétrisation admissible choisie pour le chemin γ . En effet, si $\varphi : [a, b] \rightarrow [a', b']$ est de classe C^1 et strictement croissante (avec $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$), on a

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\tilde{\gamma} \circ \varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

du fait de la formule de changement de variables dans les intégrales de Riemann.

1.3.3. Exactitude des 1-formes et intégration curviligne. Lorsque la forme ω est exacte, l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \omega$ sur un chemin C^1 par morceaux γ ne dépend en fait que de manière très faible du chemin : elle ne dépend que de l'origine et de l'extrémité de ce chemin. C'est cette proposition importante (Proposition 1.3) qui nous permettra ultérieurement de donner un sens à l'intégration curviligne d'une 1-forme continue localement exacte sur un chemin simplement continu.

PROPOSITION 1.3 (intégrale curviligne des formes exactes). *Soit ω une 1-forme continue dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 , exacte et dérivant d'un potentiel F dans cet ouvert ($\omega = dF$ dans U). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ un chemin C^1 par morceaux de support inclus dans U . On a*

$$(1.43) \quad \int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Si en particulier γ est un lacet, cette intégrale curviligne est nulle.

DÉMONSTRATION. On introduit la subdivision (1.41) correspondant à γ . Il suffit de remarquer que, pour tout $j = 0, \dots, N-1$, on a

$$(1.44) \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t))(\gamma'_1)_{|[t_j, t_{j+1}]} + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t))(\gamma'_2)_{|[t_j, t_{j+1}]} \right) dt = F(\gamma(t_{j+1})) - F(\gamma(t_j))$$

(on reconnaît sous l'intégrale de gauche la dérivée de la fonction $t \mapsto F(\gamma_{|[t_j, t_{j+1}]}(t))$). On ajoute ensuite les égalités (1.44), $j = 0, \dots, N-1$, pour obtenir la formule voulue (puisque γ est continue, les termes intermédiaires se détruisent dans cette somme télescopique). \square

EXEMPLE 1.5 (non exactitude de la forme dz/z dans \mathbb{C}^*). Si la forme dz/z était exacte dans \mathbb{C}^* , on devrait avoir, d'après la Proposition 1.3, si γ désigne le lacet $t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$ (de support dans \mathbb{C}^*),

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0.$$

Or un calcul immédiat donne

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi.$$

Il y a donc une contradiction. La forme dz/z est localement exacte (car fermée, on le voit tout de suite) dans \mathbb{C}^* , mais n'est pas exacte dans cet ouvert. Ceci complète la discussion à propos de l'exactitude des formes du type $(z - z_0)^k dz$, $k \in \mathbb{Z}$, envisagée à l'exemple 1.1.

¹⁹. Pour voir cela, on passe par une subdivision raffinée englobant les nœuds des deux subdivisions en jeu.

En fait, les bords orientés de triangles pleins (exemple 1.4) jouent un rôle particulier : celui de « chemins-test » pour tester la locale exactitude d'une forme continue. On a vu (Proposition 1.1) que toute 1-forme de classe C^1 fermée dans un ouvert est localement exacte dans cet ouvert, la réciproque étant vraie (toute 1-forme C^1 localement exacte est fermée puisque $d \circ d = 0$). Nous allons donner ici un critère permettant de caractériser les formes localement exactes lorsqu'elles sont simplement continues (et non plus C^1).

PROPOSITION 1.4. *Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Une 1-forme continue ω dans U est localement exacte dans cet ouvert si et seulement si on a*

$$(1.45) \quad \int_{\partial T_+} \omega = 0 \quad \forall T \subset U,$$

T désignant ici un triangle fermé plein.

DÉMONSTRATION. Prouvons d'abord que, si la condition (1.45) est vérifiée pour tout triangle plein inclus dans U , ω est localement exacte. Nous noterons (comme souvent dans ce cours à partir de maintenant) les points du plan par leurs affixes complexes. Soit $z_0 \in U$. Nous allons vérifier (si (1.45) est vérifiée) que ω est exacte dans le disque de centre z_0 et de rayon la distance $r(z_0) = r$ de z_0 au bord de U . On peut se ramener (par translation) à supposer $z_0 = 0$. On introduit dans $D(0, r)$ la fonction

$$z = x + iy \mapsto F(x, y) := \int_{[0, z]} \omega,$$

où $[0, z]$ désigne le chemin paramétré $t \in [0, 1] \mapsto tz$ correspondant au segment $[0, z]$ du disque $D(0, r)$ parcouru de 0 à z . Si $h = h_1 + ih_2$ est une perturbation complexe voisine de 0 dans \mathbb{C} , on a, du fait de l'hypothèse (1.45) appliquée au triangle plein de sommets 0, z , $z + h$ (inclus dans $D(0, r)$, donc dans U , du fait de la convexité de $D(0, r)$),

$$\begin{aligned} F(x + h_1, y + h_2) - F(x, y) &= \int_{[z, z+h]} \omega \\ &= \int_0^1 (h_1 P(z + th) + h_2 Q(z + th)) dt \\ &= P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2 + o(|h|). \end{aligned}$$

La dernière ligne est justifiée par le fait que ω (donc P et Q) est continue en $z = x + iy$. On a bien ainsi $dF = \omega$ dans $D(0, r)$ (car on reconnaît avec la forme \mathbb{R} -linéaire $(h_1, h_2) \mapsto P(x, y)h_1 + Q(x, y)h_2$ la différentielle de F au point (x, y) d'affixe z).

Nous montrons la réciproque par l'absurde²⁰. Prenons donc un triangle plein $T = T_0$ inclus dans U et supposons

$$\left| \int_{\partial T_+} \omega \right| = \eta > 0.$$

Découpons le triangle T en quatre triangles en utilisant les milieux des côtés comme sur la figure 1.3. Comme la somme des intégrales curvilignes sur les bords orientés

²⁰. Nous aurons plus tard l'occasion de ré-investir cet argument pour démontrer le théorème de Cauchy-Goursat.

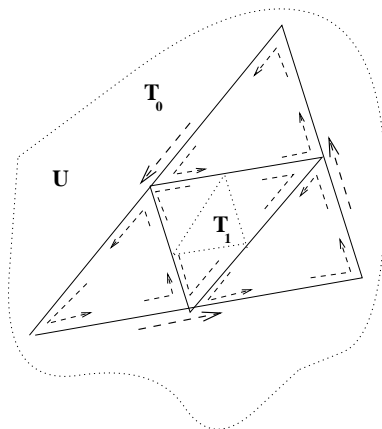


FIGURE 1.3. Découpage de triangle (preuve de la Proposition 1.4)

(dans le sens positif) de ces quatre triangles (dits triangles « à la génération 1 ») vaut l'intégrale

$$\int_{\partial T_+} \omega,$$

et est donc un nombre de module $\eta > 0$, il existe certainement un de ces triangles, appelons le T_1 , tel que

$$\left| \int_{(\partial T_1)_+} \omega \right| \geq \frac{\eta}{4}$$

(la somme de quatre nombres complexes de module strictement inférieur à $\eta/4$ ne peut avoir un module égal à η du fait de l'inégalité triangulaire). On recommence avec T_1 l'opération faite avec T_0 . On introduit ainsi un triangle T_2 , emboîté dans T_1 , tel que

$$\left| \int_{(\partial T_2)_+} \omega \right| \geq \frac{\eta}{4^2}.$$

On poursuit l'opération, pour aboutir à la construction d'une suite $(T_k)_{k \geq 0}$ de triangles pleins, emboîtés les uns dans les autres, dont le diamètre tend vers 0 (en $O(1/2^k)$) lorsque k tend vers l'infini, avec

$$(1.46) \quad \left| \int_{(\partial T_k)_+} \omega \right| \geq \frac{\eta}{4^k} > 0.$$

Du fait que \mathbb{R}^2 est complet (donc vérifie la propriété des *compacts emboîtés*²¹), il existe un point z_0 de T , donc de U , intersection de tous les triangles pleins emboîtés T_k , $k \geq 0$. Il est impossible que la forme ω soit exacte au voisinage de z_0 . Si tel était le cas, la forme ω serait exacte au voisinage de T_k pour k assez grand et l'intégrale de ω sur $(\partial T_k)_+$ devrait être nulle d'après la proposition 1.3 puisque $(\partial T_k)_+$ est un lacet. Ceci est en contradiction avec (1.46). \square

21. L'intersection d'une suite de compacts emboîtés dont le diamètre tend vers 0 est non vide et consiste en un singleton. Ceci caractérise d'ailleurs la complétude d'un espace métrique.

Avant de clôturer cette sous-section, nous allons établir un résultat important impliquant encore l'intégration curviligne sur le bord (orienté) des triangles. Ce résultat sera la « brique de base » dans la *formule de Green Riemann* à venir plus loin. Il permet de retrouver le fait que, si ω est une 1-forme de classe C^1 fermée dans un ouvert U , alors la condition (1.45) est remplie dans U , et, par conséquent, si l'on invoque la Proposition 1.4, la forme ω est localement exacte dans U . Ce que l'on savait déjà (Proposition 1.1), mais que la Proposition 1.5 ci-dessous permet de retrouver.

PROPOSITION 1.5 (formule de Stokes, version de base). *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , T un triangle plein inclus dans cet ouvert, ω une 1-forme de classe C^1 dans U . On a la formule*

$$(1.47) \quad \int_{\partial T_+} \omega = \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

DÉMONSTRATION. Si T est un triangle « aplati » (c'est-à-dire d'intérieur vide), on vérifie toute de suite que les deux membres de la formule (1.47) sont nuls. On peut supposer donc que T est un triangle plein d'intérieur non vide. Nous allons dans un premier temps établir la formule (1.47) lorsque T désigne le 1-simplexe standard

$$\Sigma_1 := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; t \geq 0, s \geq 0, t + s \leq 1\}.$$

Ce 1-simplexe standard, enveloppe convexe de l'ensemble constitué de l'origine et des extrémités des vecteurs \vec{i}, \vec{j} de la base canonique de \mathbb{R}^2 (rapportée à l'origine) constitue l'analogue du dimension 2 du segment $[0, 1] = \Sigma_0$ en dimension 1. En dimension 3, le 2-simplexe standard est le tétraèdre enveloppe complexe de l'origine et des trois extrémités des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, et l'on peut bien sûr continuer ainsi en toute dimension pour construire le $(n-1)$ -simplexe standard Σ_{n-1} dans \mathbb{R}^n .

Supposons $\Sigma_1 \subset U$ et $\omega = P dx + Q dy$. Le calcul de l'intégrale de $P dx$ sur les chemins paramétrés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, correspondant aux trois côtés du bord de Σ_1 ($[0, 1], [1, i], [i, 0]$, dans cet ordre) donne respectivement

$$\int_0^1 P(t, 0) dt, \quad - \int_0^1 P(t, 1-t) dt, \quad 0,$$

et la somme de ces trois nombres vaut

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_j} P(x, y) dx = - \int_0^1 (P(t, 1-t) - P(t, 0)) dt = - \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx.$$

Le calcul est en tout point semblable lorsque l'on remplace la forme $P dx$ par la forme $Q dy$ et l'on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_j} Q(x, y) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy.$$

Si l'on « concatène » les trois chemins paramétrés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en le chemin paramétré C^1 par morceaux $(\partial \Sigma_1)_+$, on obtient la formule suivante :

$$\int_{(\partial \Sigma_1)_+} (P dx + Q dy) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Fubini²² (qui s'applique ici car toute fonction continue de deux variables est bornée, donc intégrable, sur le compact Σ_1) pour conclure à la formule (1.47) dans ce cas particulier $T = \Sigma_1$.

Il reste à passer au cas d'un triangle quelconque (d'intérieur non vide) T . Effectuons le changement de variable L , affine et de déterminant strictement positif²³, transformant le triangle T en le 1-simplexe standard Σ_1 . Le membre de droite de (1.47) devient, grâce à la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue²⁴,

$$\det L \iint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(L(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(L(u, v)) \right) du dv.$$

Mais l'on remarque (voir la sous-section 1.2.4 et en particulier la Proposition 1.2) que

$$\begin{aligned} d(Pdx + Qdy) &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ L^*[d(Pdx + Qdy)] &= d[L^*[Pdx + Qdy]] \\ &= \det L \times \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(L(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(L(u, v)) \right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Il suffit d'observer que l'on a aussi

$$\int_{L \circ (\partial T)_+} \omega = \int_{\partial T_+} L^*[\omega]$$

pour conclure que (1.47) se lit aussi, si $L^*[\omega] = \tilde{P} du + \tilde{Q} dv$,

$$\int_{\partial T_+} L^*[\omega] = \iint_T \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} \right) dudv.$$

La formule (1.47) est ainsi prouvée par changement de variable (en travaillant avec $T = \Sigma_1$ et $\tilde{\omega} = (L^{-1})^*[\omega]$ en place de ω). \square

REMARQUE 1.5. Si Θ est une application de classe C^2 de Σ_1 dans \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire une application se prolongeant en une application de classe C^2 à voisinage ouvert de Σ_1) qui réalise un C^1 -difféomorphisme entre Σ_1 et son image, et est telle que $\text{Jac}[\Theta] > 0$ dans Σ_1 (respect des orientations), alors, pour toute 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ de classe C^1 au voisinage de $\Theta(\Sigma_1)$, on a encore la formule

$$(1.48) \quad \int_{\Theta[\partial(\Sigma_1)_+]} \omega = \iint_{\Theta(\Sigma_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ceci résulte du fait que la formule (1.47) pour $T = \Sigma_1$ soit compatible avec d'une part le changement de variable dans les intégrales curvilignes couplé avec la prise d'image réciproque (pour ce qui est du membre de gauche), d'autre part avec la formule de changement dans l'intégration Lebesgue toujours couplé avec la prise d'image réciproque (pour ce qui est du membre de droite). Le fait que d commute avec la prise d'image réciproque des 1-formes (Proposition 1.2) joue pour cela un rôle fondamental; c'est ici d'ailleurs qu'intervient la nécessité de supposer Θ de classe au moins C^2 (lemme de Schwarz). Le fait que Θ doive respecter les orientations ($\text{Jac}[\Theta] > 0$ dans Σ_1) est aussi primordial.

22. Voir le cours de MHT 512, [Yint], Théorème 3.8.

23. Préserver les orientations est ici important!

24. Voir le cours de MHT 512, [Yint], Théorème 2.5.

1.3.4. Intégration des 2-formes différentielles. Nous avons dans ce qui précède introduit dans la sous-section 1.3.2 l'intégration des 1-formes sur les chemins paramétrés C^1 par morceaux. Il serait logique d'intégrer les 2-formes contre non plus des chemins paramétrés C^1 -par morceaux, mais des « nappes paramétrées » fonctions cette fois non plus d'un, mais de deux paramètres.

Si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\Omega = \Phi dx \wedge dy$ une 2-forme continue dans U , on peut considérer tout compact $K \subset\subset U$ inclus dans U comme une nappe paramétrée (précisément par $(t, s) = (x, y) \in K$, attention! respecter l'ordre des variables en accord avec l'orientation du plan est ici capital) et poser

$$(1.49) \quad \int_K \Phi dx \wedge dy := \iint_K \Phi(x, y) dx dy,$$

Cette définition²⁵ reste cohérente avec la prise d'image réciproque des 2-formes pourvu que l'on opère des changements de variables (C^1 -difféomorphismes)

$$(u, v) \in V \longleftrightarrow \Theta(u, v) = (x, y) \in U$$

qui préservent les orientations ($\text{Jac}[\Theta] > 0$ dans U). On a bien en effet

$$(1.50) \quad \int_{\Theta^{-1}(K)} \Theta^*[\Omega] = \int_K \Omega.$$

du fait de la définition (1.39) de $\Theta^*[\Omega]$ et de la formule de changement de variables dans l'intégration Lebesgue (voir [Yint], Théorème 2.5).

Afin de rester le plus élémentaire possible, nous allons introduire des compacts K très particuliers (qui joueront un rôle analogue à celui joué par les chemins paramétrés C^1 par morceaux). Pour cela, nous avons besoin d'une définition assez naive.

DÉFINITION 1.7 (polygones à trous). On appelle *polygone (non croisé) à trous* du plan tout sous-ensemble fermé borné Δ du plan d'intérieur non vide dont la frontière est constituée d'une union finie de lacets réalisés comme des lignes brisées sans point double.

Un tel domaine Δ se présente comme un polygone fermé, mais avec un éventuel nombre fini de « trous ». Voir la figure 1.4 : sur cette figure, l'union des deux polygones fermés non croisés Δ_1 et Δ_2 est un polygone à trous dont l'unique « trou » a été ici hachuré; on voit d'ailleurs aisément qu'il est toujours possible (comme sur la figure 1.4) de découper tout polygone à trous du plan (quel que soit le nombre de trous qu'il présente) en l'union de deux polygones fermés Δ_1 et Δ_2 non croisés, dont les intérieurs sont non disjoints.

Étant donné un tel polygone fermé non croisé du plan (sans trous), il est toujours possible (voir la figure 1.5, figure de gauche) de le « trianguler », c'est-à-dire de l'écrire comme une union de triangles fermés pleins T_1, \dots, T_N dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, de telle manière que, si $T_{j_1} \neq T_{j_2}$ et $T_{j_1} \cap T_{j_2} \neq \emptyset$, alors $T_{j_1} \cap T_{j_2}$ est soit réduit à un point (sommet commun aux deux triangles), soit consiste en une arête (commune aux deux triangles). Qu'il existe au moins une telle triangulation se voit par exemple en faisant une récurrence sur le nombre de sommets k de la ligne polygonale (en partant du cas initial $k = 3$, où le polygone est un triangle plein) constituant la frontière de ce polygone. Il est donc possible de

25. Il faut ici la voir comme telle.

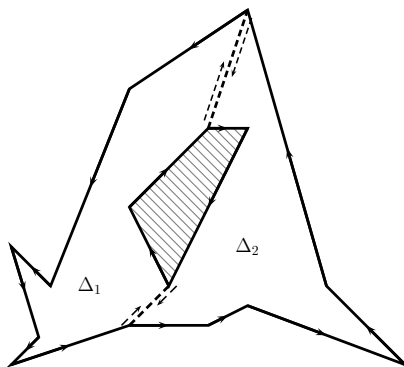


FIGURE 1.4. Polygone à trous

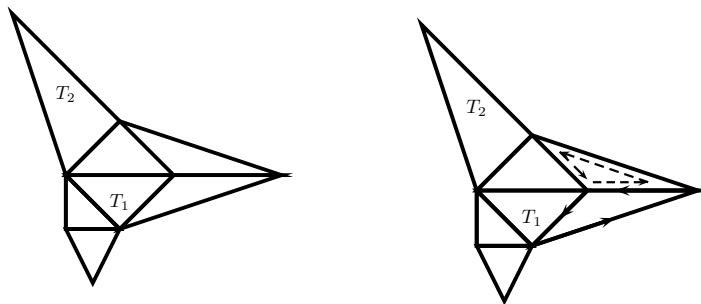


FIGURE 1.5. Triangulation d'un polygone non croisé et orientations induites sur les arêtes

triangler également un polygone à trous Δ en l'écrivant comme union $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ de deux polygones fermés non croisés d'intérieurs disjoints.

DÉFINITION 1.8 (nappe paramétrée plane simple²⁶). Soit Δ un polygone à trous dans $\mathbb{R}_{u,v}^2$. Une application $\Theta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2$ est dite C^2 par morceaux sur Δ si elle est continue, injective, et s'il existe une triangulation $\{T_1, \dots, T_N\}$ de Δ telle que la restriction $\Theta|_{T_j}$ de Θ à chaque triangle plein fermé T_j soit de classe C^2 et telle que $\text{Jac}[\Theta|_{T_j}] > 0$ sur T_j , $j = 1, \dots, N$. On appelle *nappe paramétrée plane simple de classe C^2* la donnée d'un polygone à trous et d'une application $\Theta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 par morceaux. Le compact $\Theta(\Delta)$ est dit *support* de la nappe paramétrée plane simple.

Les nappes paramétrés planes simples de classe C^2 vont être appelées à jouer le rôle des chemins paramétrés C^1 par morceaux sur lesquels l'intégration des 1-formes continues était bien définie. En cohérence donc avec la formule (1.42), on définit, si Ω est une forme continue au voisinage de $\Theta(\Delta)$, l'intégrale de $\Omega = \Phi dx \wedge dy$ sur la

26. Par « simple », il faut entendre ici « sans points doubles ».

nappe paramétrée plane simple Θ par

$$(1.51) \quad \int_{\Theta} \Omega := \sum_{j=1}^N \int_{T_j} \Theta_{|T_j}^*[\Omega] = \sum_{j=1}^N \iint_{T_j} \Psi_j(u, v) \, dudv,$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_j(u, v) \, du \wedge dv &= \Theta_{|T_j}^*[\Phi \, dx \wedge dy] = \Phi(\Theta(u, v)) \, d\Theta_1(u, v) \wedge d\Theta_2(u, v) \\ &= \Phi(\Theta(u, v)) \times \left(\frac{\partial((\Theta_{|T_j})_1, (\Theta_{|T_j})_2)}{\partial(u, v)}(u, v) \right) \, du \wedge dv \\ &= \Phi(\Theta(u, v)) \, \text{Jac}[\Theta_{|T_j}](u, v) \, du \wedge dv. \end{aligned}$$

Comme c'est le cas pour la définition de l'intégrale curviligne des 1-formes sur un chemin C^1 par morceaux (*cf.* (1.42)), cette définition ne dépend pas du paramétrage Θ de la nappe, pourvu que celui-ci soit admissible au sens suivant : si $\tilde{\Theta} : \tilde{\Delta} \mapsto \mathbb{R}^2$ est une autre nappe paramétrée de classe C^2 telle que $\Theta = \tilde{\Theta} \circ \varphi$, où $\varphi : \Delta \rightarrow \tilde{\Delta}'$ est un difféomorphisme de classe C^2 entre Δ et $\tilde{\Delta}'$, de jacobien strictement positif dans Δ , alors $\int_{\Theta} \Omega = \int_{\tilde{\Theta}} \Omega$ d'après la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue. En particulier, l'expression (1.51) ne dépend pas de la triangulation de Δ , pourvu toutefois que celle-ci soit adaptée à la nappe Θ en accord avec la Définition 1.8.

1.3.5. La formule de Green-Riemann. Le théorème fondamental de l'analyse en dimension 1 s'énonce ainsi :

THEOREME 1.1 (théorème fondamental de l'analyse en dimension 1). *Soit F une fonction à valeurs complexes, de classe C^1 sur le segment fermé $[0, 1]$ (ce qui est équivalent à dire que f est la restriction à $[0, 1] = \Sigma_0$ d'une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert $] - \epsilon, 1 + \epsilon[$ contenant $[0, 1]$). Alors*

$$(1.52) \quad \int_{(\partial[0,1])_+} F := F(1) - F(0) = \int_{[0,1]} F'(t) \, dt := \int_{[0,1]} dF$$

la quantité $F(1) - F(0)$ pouvant en effet être interprétée comme l'intégration de F sur le bord orienté de $[0, 1]$, l'extrémité étant chargée positivement (+), l'origine étant chargée négativement (-), et $\{0, 1\}_{\text{orienté}} = (\partial[0, 1])_+$ se comportant donc comme un dipôle.

REMARQUE 1.6. Le point de vue utilisé ici est celui de la théorie de l'intégration, dt représente la mesure de Lebesgue. Le fait de considérer le bord comme un dipôle revient à l'orienter, en conformité avec l'orientation de $[0, 1]$.

En dimension 2, le 1-simplexe standard est $\Sigma_1 = \{(t, s) ; t \geq 0, s \geq 0, t + s \leq 1\}$, son bord orienté est le chemin paramétré $(\partial\Sigma_1)_+$ et le théorème fondamental de l'analyse en dimension 2 s'exprime naturellement comme un cas particulier de la formule de Stokes (Proposition 1.5). Il s'agit juste d'une reformulation, à la lumière de l'approche développée dans la sous-section 1.3.4.

THEOREME 1.2 (théorème fondamental de l'analyse en dimension 2). *Soit ω une 1-forme différentielle à valeurs complexes, de classe C^1 sur Σ_1 (c'est-à-dire se prolongeant en une 1-forme différentielle de classe C^1 au voisinage de Σ_1). Soit Σ_1*

la nappe paramétrée $(u, v) \in \Sigma_1 \mapsto (u, v)$ et $(\partial\Sigma_1)_+$ son bord orienté (il s'agit d'un chemin paramétré C^1 par morceaux). On a,

$$(1.53) \quad \int_{(\partial\Sigma_1)_+} \omega = \int_{\Sigma_1} d\omega.$$

On observe le parallèle formel entre les deux formulations (1.52) et (1.53), suivant que l'on soit en dimension 1 ou 2. On pourrait évidemment continuer et formuler le théorème fondamental de l'analyse en dimension 3 et au delà. Mais il faudrait pour cela avoir poussé le développement du calcul extérieur et des formes différentielles en dimension supérieure (voir par exemple [MathL2], chapitre 15, pour le cas de la dimension 3).

Le point de vue formel développé dans la sous-section 1.3.4 et l'observation faite à la remarque 1.5 nous permettent de formuler un résultat capital, la *formule de Green-Riemann*²⁷, incarnation du *théorème de Stokes*²⁸ dans le contexte de la dimension deux.

THEOREME 1.3 (formule de Green-Riemann). *Soit $\Theta : \Delta \mapsto \mathbb{R}^2$ une nappe paramétrée plane simple de classe C^2 au sens de la définition 1.8. Soit $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(M)}$, les chemins paramétrés C^2 par morceaux correspondant aux composantes connexes de la frontière de $K = \Theta(\Delta)$ parcourues chacune une seule fois en conservant le domaine K à sa gauche²⁹. Soit $\omega = Pdx + Qdy = Adz + Bd\bar{z}$ une 1-forme différentielle de classe C^1 au voisinage de K . On a*

$$(1.54) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^M \int_{\gamma^{(j)}} (Pdx + Qdy) &= \int_{\Theta} d\omega = \int_{\Theta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

ou encore

$$(1.55) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^M \int_{\gamma^{(j)}} (Adz + Bd\bar{z}) &= \int_{\Theta} d\omega = \int_{\Theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) d\bar{z} \wedge dz \\ &= 2i \iint_K \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dx dy. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.7. La formule de Green-Riemann est en fait valable pour tout compact K dont le bord est union disjointe de courbes lisses (exception faite des points où deux telles courbes se rencontrent) de classe C^1 . Le résultat prouvé ici

27. George Green (1793-1841), physicien et mathématicien anglais : ce sont ses travaux consacrés à la théorie du potentiel et à l'électromagnétisme (autour de 1828) qui ont vraisemblablement motivé l'apparition d'un tel résultat. Le géomètre et analyste allemand Bernhard Riemann (1826-1866) y a également attaché son nom. C'est Volterra (1887), puis Poincaré (1889), qui expliciteront le raisonnement et les constructions qui conduisent à sa généralisation en dimension supérieure (*formule de Stokes*).

28. George Stokes, physicien, mécanicien et mathématicien irlandais (1819-1903) : ses travaux liés à la mécanique des fluides et aux lois de l'hydrodynamique sont à l'origine du théorème qui porte son nom, théorème que l'on peut considérer comme la version 2-dimensionnelle du théorème fondamental de l'analyse. La vision générale sera donnée par Henri Poincaré (1889) et Élie Cartan.

29. Le compact K se présente, comme celui du polygone à trous Δ , comme un « gruyère » (voir la figure 1.6) ; le lacet $\gamma^{(1)}$ correspondant au bord externe de K correspond à un parcours dans le sens trigonométrique, tandis que les autres lacets $\gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(M)}$ (correspondant aux bords des trous du gruyère) correspondent à des parcours dans le sens des aiguilles d'une montre.

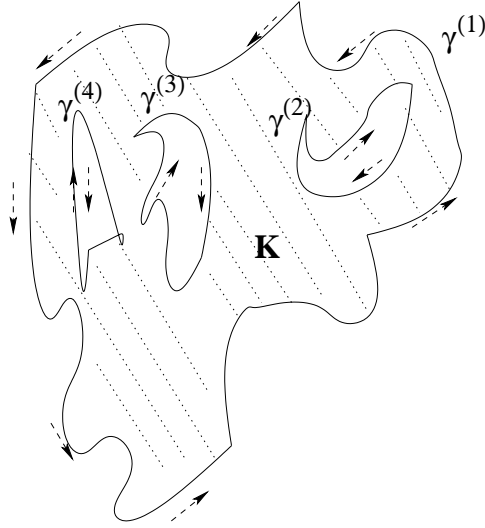


FIGURE 1.6. Un compact à bord orienté dans le plan

ne permet que de retrouver le cas où les courbes lisses définissant le bord sont de classe C^2 . Il est cependant facile de constater par perturbation que, du fait que les dérivées d'ordre 2 des lacets $\gamma^{(j)}$ n'interviennent en aucune manière dans les formules (1.54) ou (1.55), celles-ci restent valables si le bord de K est union de courbes lisses de classe C^1 .

DÉMONSTRATION. Elle se ramène immédiatement au cas où Δ est un triangle, cas qui a déjà été traité dans la remarque 1.5 (on note que dans la formule (1.48), le 1-simplexe Σ_1 peut être remplacé par un triangle arbitraire). On introduit ensuite une triangulation de Δ obtenue en concaténant des triangulations des deux polygones non croisés Δ_1 et Δ_2 (voir la figure 1.4). Tous les bords des triangles T_j sont orientés dans le sens trigonométrique (voir le schéma de droite sur la figure 1.5). On ajoute ensuite toutes les formules du type (1.48) obtenues. Il ne reste plus qu'à constater que toutes les contributions des intégrales curvilignes correspondant aux arêtes (transformées par Θ) des triangles T_j qui ne sont pas partie prenante du bord de Δ s'annihilent deux à deux. L'orientation des arêtes restantes (dont l'image recompose le bord de K) induit, par transformation *via* Θ qui respecte les orientations (puisque de jacobien strictement positif), l'orientation voulue pour les chemins $\gamma^{(j)}$. La formule de Green-Riemann est bien démontrée dans ce cas (presque général, en tout cas amplement suffisant à nos besoins). \square

Si $K \subset \mathbb{R}^2$ désigne un compact à bord orienté (comme dans le Théorème 1.3), on peut définir en tout point z du bord (excepté les points où deux courbes lisses se rencontrent, correspondant aux images par Θ de sommets de triangles T_j impliqués dans une triangulation du polygone à trous Δ conditionnant la définition de Θ) une normale extérieure au compact K . Ce vecteur (supposé unitaire) $\vec{n}_{\text{ext}}(z)$ pointe vers la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$ lorsque z est un point du bord « extérieur » de K (le support du lacet C^1 par morceaux $\gamma^{(1)}$, voir la figure 1.6); il pointe vers l'intérieur du « trou » qu'entoure le lacet $\gamma^{(j)}$ ($j = 2, \dots, M$) concerné

lorsque z est un point du bord « intérieur » de K , c'est-à-dire un point à la frontière de l'une des composantes connexes bornées de $\mathbb{C} \setminus K$.

Il est également possible de définir une *mesure de longueur* $\sigma_{\partial K}$ supportée par le bord de K : si E_j est un sous-ensemble mesurable du support du chemin paramétré C^1 par morceaux $\gamma^{(j)} : t \in [a_j, b_j] \mapsto \gamma^{(j)}(t)$, $j = 1, \dots, M$, on pose

$$\begin{aligned} \sigma_{\partial K}(E_j) &:= \int_{(\gamma^{(j)})^{-1}(E_j)} \|(\gamma^{(j)})'(t)\| dt \\ &\leq \int_{[a_j, b_j]} \|(\gamma^{(j)})'(t)\| dt = \text{longueur}(\text{Supp } \gamma^{(j)}) < +\infty \end{aligned}$$

puisque la fonction $\gamma^{(j)}$ est supposée C^1 par morceaux. La mesure $\sigma_{\partial K}$ est donc une mesure borélienne positive de masse totale finie, supportée par le compact ∂K . Une fois armés de ces définitions, nous pouvons énoncer une reformulation de la formule de Green-Riemann : c'est la *formule de la divergence*, ou encore de *Green-Ostrogradski*³⁰ (en dimension 2 ici).

THEORÈME 1.4 (formule de la divergence ou de Green-Ostrogradski). *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3. Soit $\vec{F} = (F_1, F_2)$ une champ 2-dimensionnel complexe de classe C^1 au voisinage de K , c'est-à-dire une application de classe C^1 au voisinage de K , à valeurs dans \mathbb{C}^2 . On a*

$$(1.56) \quad \int_{\partial K} \langle \vec{F}, \vec{n}_{\text{ext}} \rangle d\sigma_{\partial K} = \iint_K \text{div}(\vec{F}) dx dy,$$

où la *divergence* $\text{div}(\vec{F})$ du champ \vec{F} est définie par

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

La quantité figurant au membre de gauche de (1.56) est appelée *flux (sortant) du champ \vec{F} au travers du bord orienté du compact K* .

REMARQUE 1.8. La remarque 1.7 vaut également pour la validité de la formule de la divergence.

DÉMONSTRATION. On introduit la 1-forme différentielle complexe définie au voisinage de K par $\omega := F_1 dy - F_2 dx$. Pour tout $j = 1, \dots, M$, on a (en dehors des points anguleux du support de $\gamma^{(j)}$),

$$\begin{aligned} (\gamma^{(j)})^*[\omega](t) &= F_1(\gamma^{(j)}(t)) (\gamma_2^{(j)})'(t) - F_2(\gamma^{(j)}(t)) (\gamma_1^{(j)})'(t) \\ &= \left\langle \vec{F}(\gamma^{(j)}(t)), \vec{n}_{\text{ext}}(\gamma^{(j)}(t)) \right\rangle \|(\gamma^{(j)})'(t)\|. \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie que $d\omega = \text{div}(\vec{F}) dx \wedge dy$. La formule (1.56) résulte donc de la formule de Green-Riemann (1.54), appliquée avec cette forme ω (au vu de la définition de la mesure de bord $\sigma_{\partial K}$). \square

Un corollaire de la formule de la divergence nous sera utile par la suite : ce sont les formules de Green.

30. Mikhail V. Ostrogradski (1801-1862), mathématicien et mécanicien russe qui fit ses études à Paris avec Cauchy et Fourier vers 1822; il mit en évidence le rôle de la *divergence* d'un champ de forces et sa relation au flux. C'est plutôt en dimension 3 que la *formule de la divergence* porte son nom.

THEORÈME 1.5 (formules de Green). *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3. Soient F et G deux fonctions de classe C^2 au voisinage de K , à valeurs complexes. On a les formules (la première sous forme dis-symétrique, la seconde sous forme symétrique)*

$$(1.57) \quad \begin{aligned} \int_{\partial K} F \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\text{ext}}} d\sigma_{\partial K} &= \int_{\partial K} \langle F \vec{\nabla} G, \vec{n}_{\text{ext}} \rangle d\sigma_{\partial K} \\ &= \iint_K (F \Delta[G] + \langle \vec{\nabla} F, \vec{\nabla} G \rangle) dx dy \end{aligned}$$

$$(1.58) \quad \begin{aligned} \int_{\partial K} \left(F \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_{\text{ext}}} - G \frac{\partial F}{\partial \bar{n}_{\text{ext}}} \right) d\sigma_{\partial K} &= \int_{\partial K} \langle F \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} F, \vec{n}_{\text{ext}} \rangle d\sigma_{\partial K} \\ &= \iint_K (F \Delta G - G \Delta F) dx dy, \end{aligned}$$

où $\vec{\nabla}$ désigne la prise de gradient et Δ le laplacien.

REMARQUE 1.9. La remarque 1.7 vaut également pour la validité des formules de Green.

DÉMONSTRATION. Pour obtenir la formule (1.57), on utilise la formule de la divergence (1.56) avec le champ $\vec{F} = F \vec{\nabla} G$. Pour obtenir la formule (1.58), on écrit la formule de la divergence (1.56) avec cette fois $\vec{F} = G \vec{\nabla} F$, puis on la soustrait à (1.57). \square

1.3.6. La formule de Cauchy-Pompeiu. En analyse complexe, la formule de Green-Riemann se décline comme une formule très utile, la *formule de Cauchy-Pompeiu*³¹.

PROPOSITION 1.6 (formule de Cauchy-Pompeiu). *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3. Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage de K . Soit z un point intérieur à K . On a, si $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(M)}$ désignent les chemins paramétrés C^1 par morceaux correspondant au bord orienté de K (comme sur la figure 1.6), la formule de représentation suivante :*

$$(1.59) \quad \begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \left(\sum_{j=1}^M \int_{\gamma^{(j)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\gamma^{(j)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) \frac{d\xi d\eta}{z - \xi - i\eta}. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.10. La remarque 1.7 vaut également pour la validité de cette formule. Il ne faut pas oublier que $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ est intégrable dans \mathbb{R}^2 (donc dans \mathbb{C}) au voisinage de sa singularité z (en vertu du critère de Riemann). Donc l'intégrale double dans (1.59) est bien convergente au sens de Lebesgue. Comme dans la première ligne des formules (1.54) et (1.55), l'intégrale double sur K d'une 2-forme (au membre de droite de la première ligne dans la formule (1.59)) est ici à comprendre comme l'intégrale de la 2-forme sur la nappe paramétrée Θ dont K représente le support (cf. la section 1.3.4) ; ceci vaut aussi au second et troisième membre de la suite d'égalités (1.60) un peu plus bas.

31. Au nom de Cauchy, est attaché ici celui de Dimitrie Pompeiu (1873-1954), mathématicien roumain spécialiste d'analyse complexe et de mécanique ; il a donné son nom à un célèbre problème de géométrie intégrale (lié aussi à l'analyse harmonique) qu'il souleva en 1929.

DÉMONSTRATION. On introduit ϵ strictement inférieur à la distance de z au bord de K et on applique la formule de Green-Riemann en prenant comme compact $K_\epsilon = K \setminus D(z, \epsilon)$ (qui est, comme K , un compact à bord orienté) et comme 1-forme différentielle

$$\omega = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On vérifie aisément que

$$d\omega = \bar{\partial}\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

en vertu de la règle de Leibniz car $(\partial/\partial \bar{\zeta})(1/(\zeta - z)) = 0$. La formule de Green-Riemann (1.54) implique donc, si $\gamma_{z,\epsilon} : t \in [0, 2\pi] \mapsto z + \epsilon e^{it}$,

$$\begin{aligned} (1.60) \quad & \left(\sum_{j=1}^M \int_{\gamma^{(j)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) - \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \iint_{K \setminus D(z,\epsilon)} d\omega \\ & = \iint_{K \setminus D(z,\epsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} = 2i \iint_{K \setminus D(z,\epsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) \frac{d\xi d\eta}{\xi + i\eta - z}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(z + \epsilon e^{it}) dt$$

compte tenu de la définition du chemin paramétré $\gamma_{z,\epsilon}$. En passant à la limite (lorque ϵ tend vers 0) dans (1.60) et en utilisant, d'une part le fait que f est continue en z , d'autre par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ est intégrable sur K , on obtient bien la formule (1.59). \square

1.3.7. Exercices.

EXERCICE 1.19 (la formule de Green-Riemann et le lemme de Schwarz).

a) Montrer que si G_1 et G_2 sont deux fonctions continues sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{C} , telles que

$$\iint_R G_1(x, y) dx dy = \iint_R G_2(x, y) dx dy$$

pour tout rectangle fermé plein R inclus dans U , alors $G_1 \equiv G_2$ dans U .

b) Dédurre de a) que si F est une fonction de classe C^2 dans U , à valeurs complexes, alors on a $(\partial^2/\partial x \partial y)[F] \equiv (\partial^2/\partial y \partial x)[F]$ dans U .

EXERCICE 1.20 (une application directe de Green-Riemann). Soit Γ le bord du carré $[-1, 1]^2$ orienté dans le sens trigonométrique. Calculer

$$\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Indication : remarquer que la 1-forme sous cette intégrale curviligne est fermée dans \mathbb{C}^* et que par conséquent on peut remplacer $[-1, 1]^2$ par le disque de centre 0 et de rayon ϵ , avec ϵ arbitraire ; on expliquera pourquoi.

EXERCICE 1.21 (une application directe de Green-Riemann). Calculer l'aire de la boucle du *folium de Descartes* d'équation cartésienne

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

(a désignant un paramètre réel). Indication : on paramètrera cette courbe en cherchant le point d'intersection avec la droite d'équation $y = tx$, t désignant le paramètre que l'on utilisera ; la boucle correspond, on le montrera, aux valeurs du paramètre entre 0 et $+\infty$.

EXERCICE 1.22 (une approche au théorème du point fixe de L. Brouwer³²). Soit $f = (P, Q)$ une application définie et de classe C^2 au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0, 1)}$ du plan complexe, à valeurs dans \mathbb{R}^2 , et telle que

$$f(\overline{D(0, 1)}) \subset \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\} = \partial\overline{D}$$

(f réalise une rétraction du disque fermé sur son bord).

a) Si l'on suppose en plus des hypothèses ci-dessus que la restriction de f à $\partial\overline{D(0, 1)}$ est l'identité, déduire de la formule de Green-Riemann que, si γ désigne le lacet $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta}$,

$$\int_{\gamma} PdQ = 0.$$

Indication : on montrera que la forme $Pdx + Qdy$ est fermée dans le disque unité ouvert $D(0, 1)$. Montrer que l'hypothèse additionnelle implique $\gamma^*[PdQ] = \gamma^*[xdy]$ et en déduire

$$\int_{\gamma} PdQ = \pi.$$

Que peut-on en conclure ?

b) Soit F une application définie et de classe C^2 au voisinage de $\overline{D(0, 1)}$, à valeurs dans \mathbb{R}^2 , telle que $F(\overline{D(0, 1)}) \subset \overline{D(0, 1)}$ et que $F(x, y) \neq (x, y)$ pour tout (x, y) dans $\overline{D(0, 1)}$. Pour tout (x, y) dans $\overline{D(0, 1)}$, on note $G(x, y)$ le point d'intersection du cercle unité $\partial\overline{D(0, 1)}$ avec la demi-droite issue de $F(x, y)$ et dirigée par le vecteur (non nul par hypothèses) $(x, y) - F(x, y)$. Vérifier que $(x, y) \mapsto G(x, y)$ se prolonge en une fonction (P, Q) de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0, 1)}$ qui vérifie les hypothèses de l'en-tête de l'exercice et du **a)**. En déduire que F admet nécessairement un point fixe dans $\overline{D(0, 1)}$ (i.e. un point (x_0, y_0) tel que $F(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$).

EXERCICE 1.23 (formule de Green-Riemann et séries entières). Soient $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sa somme dans $D(0, R)$. On suppose f injective dans le disque fermé $\overline{D(0, r)}$, où $0 < r < R$.

a) Montrer que $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto f(re^{i\theta})$ est un lacet de classe C^1 simple et que la surface du domaine borné entouré par ce lacet vaut

$$\frac{1}{2i} \int_{\gamma_r} \overline{f(\xi + i\eta)} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi + i\eta) (d\xi + id\eta),$$

où $\gamma_r : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto re^{i\theta}$.

b) Vérifier que la surface calculée au **a)** vaut $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n}$, et en déduire l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k} \leq \left(\sup_{|z|=r} |f(z)| \right)^2.$$

32. Luitzen Brouwer (1881-1966), théoricien néerlandais de la mesure.

EXERCICE 1.24. Soit K un compact à bord orienté du plan (comme dans la formule de Green-Riemann ou les formules de Green) et F une fonction de classe C^2 au voisinage de K . Montrer que

$$\iint_K \Delta F \, dx dy = \int_{\partial K} \frac{\partial F}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} \, d\sigma_{\partial K}.$$

Cette propriété basique est exploitée en traitement d'image pour faire surgir les lignes de rupture ou de contraste d'une image.

EXERCICE 1.25 (formule de Neumann³³). Soient f une fonction de classe C^2 au voisinage du disque fermé $\overline{D} = \overline{D}(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 et z un point de D . On suppose que $\Delta f \equiv 0$ dans D (une telle fonction est dite *harmonique*). Montrer que, pour tout point z de D , on a, en posant $\vec{n}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la formule de Neumann en dimension deux :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}_\theta}(e^{i\theta}) \log |z - e^{i\theta}| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_\theta} [\log |e^{i\theta} - z|] d\theta.$$

Indication : *appliquer la seconde formule de Green.*

EXERCICE 1.26 (formule de Cauchy-Pompeiu). Soit φ une fonction de classe C^1 dans \mathbb{C} , nulle hors du disque $D(0, R_0)$ pour un certain $R_0 > 0$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{z - \zeta} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta},$$

où l'on a noté sous l'intégrale $\zeta = \xi + i\eta$.

b) Dédire de a) qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 dans \mathbb{R}^2 (que l'on explicitera) telle que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}(z) = \varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

EXERCICE 1.27 (formule de Cauchy-Pompeiu). Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage du disque unité fermé du plan complexe et z un point fixé du disque unité ouvert. En utilisant la formule de Cauchy-Pompeiu pour représenter au point z la fonction

$$\zeta \mapsto f(\zeta) \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)$$

(on remarquera que cette fonction est aussi C^1 au voisinage du disque unité fermé), montrer que

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} + \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{(1 - \bar{\zeta}z)^2},$$

où l'on a noté $\zeta = \xi + i\eta$.

EXERCICE 1.28 (de la formule de Cauchy-Pompeiu à l'identité de Bézout). Soient p_1, \dots, p_m m polynômes de n variables sans zéros communs dans \mathbb{C} , avec

33. On la doit au mathématicien et physicien allemand Carl Gottfried Neumann (1832-1925), dans ses travaux en théorie du potentiel et électrodynamique.

$d = \max(\deg p_j) > 0$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\} \mapsto \sum_{j=1}^m \left(\frac{\overline{p_j(\zeta)}}{\sum_{j=1}^m |p_j(\zeta)|^2} \right) \frac{p_j(\zeta) - p_j(z)}{\zeta - z}$$

se prolonge en une fonction Q_z de classe C^1 dans \mathbb{C} . Calculer $Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1$.

b) Soit $R > 0$ et z un point du disque ouvert $D(0, R)$. Représenter au point z avec la formule de Cauchy-Pompeiu la fonction

$$\zeta \in D(0, R) \mapsto (Q_z(\zeta)(z - \zeta) + 1)^2.$$

c) En fixant z et en faisant tendre R vers l'infini dans la formule établie au b), construire m polynômes q_1, \dots, q_m à coefficients complexes tels que

$$1 = \sum_{j=1}^m p_j(z)q_j(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Quelle autre méthode (algébrique cette fois) permet aussi de calculer de tels polynômes q_j ?

EXERCICE 1.29 (une approche à la formule des résidus dans le cadre algébrique). Soient P et Q deux polynômes à coefficients complexes, z_1, \dots, z_p les zéros distincts du polynôme Q , de multiplicités respectives μ_1, \dots, μ_p . Pour tout $j = 1, \dots, p$, on effectue la division suivant les puissances croissantes

$$(1.61) \quad \frac{P(z_j + X)}{Q(z_j + X)} = \sum_{k=-\mu_j}^{\infty} \alpha_{j,k} X^k,$$

et on pose $\text{Res}_{z_j}[Pdz/Q] := \alpha_{j,-1}$.

a) Montrer que, si K est un compact à bord orienté (comme dans la formule de Cauchy-Pompeiu), sans trous, tel qu'aucun point z_j , $j = 1, \dots, p$ ne soit au bord de K , alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta = \sum_{z_j \in K} \text{Res}_{z_j}[Pdz/Q],$$

où ∂K_+ désigne le bord orienté de K (dans le sens trigonométrique).

b) Montrer que, si K contient dans son intérieur tous les points z_1, \dots, z_p et si l'on a $\deg P \leq \deg Q - 2$, alors

$$\int_{\partial K_+} \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} d\zeta = 0.$$

EXERCICE 1.30 (formule de Lelong-Poincaré (cadre algébrique)). Soient $R = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, z_1, \dots, z_p ses zéros (affectés de multiplicités μ_1, \dots, μ_p), w_1, \dots, w_q ses pôles (affectés d'ordres ν_1, \dots, ν_q); vérifier, pour toute fonction φ de classe C^2 nulle hors d'un disque de rayon R contenant $z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q$, la formule de Lelong-Poincaré

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Delta[\varphi](x, y) \log |R(x + iy)| dx dy = 2\pi \left(\sum_{j=1}^p \mu_j \varphi(z_j) - \sum_{j=1}^q \nu_j \varphi(w_j) \right)$$

après avoir prouvé la convergence de l'intégrale double. Indication : on utilisera la seconde formule de Green en s'inspirant de la preuve de la formule de Cauchy-Pompeiu.

1.4. Formes localement exactes et chemins continus

Dans cette section, nous allons nous placer dans le cadre des chemins paramétrés continus d'un ouvert du plan (sans plus de régularité, voir la Définition 1.5) et donner un sens à l'intégration sur ces chemins des 1-formes continues et localement exactes³⁴. Le chemin n'étant plus C^1 par morceaux, nous n'avons plus droit à la définition (1.42) de la sous-section 1.3.2. Cette construction nous permettra de dégager le concept de *relèvement d'un chemin*, ainsi que deux notions très importantes dans le champ de l'analyse complexe (sous l'angle ici plutôt topologique) : la notion de *logarithme complexe* (Proposition 1.11) et la notion d'*indice* (Définition 1.11).

1.4.1. Primitive d'une 1-forme localement exacte le long d'un chemin continu.

DÉFINITION 1.9 (primitive d'une 1-forme localement exacte le long d'un chemin continu). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin continu du plan, de support inclus dans un ouvert U , et ω une 1-forme différentielle continue et localement exacte dans U . On dit qu'une fonction continue $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une *primitive de ω le long de γ* si et seulement si, pour chaque $t_0 \in [a, b]$, il existe un voisinage $V(\gamma(t_0))$ de $\gamma(t_0)$ inclus dans U , une primitive $F_{\gamma(t_0)}$ de ω dans $V(\gamma(t_0))$ (i.e. $dF_{\gamma(t_0)} = \omega$ dans $V(\gamma(t_0))$), tels que,

$$(1.62) \quad \exists \epsilon_{t_0} > 0, \forall t \in]t_0 - \epsilon_{t_0}, t_0 + \epsilon_{t_0}[, \gamma(t) \in V(\gamma(t_0)) \text{ et } \Phi(t) = F_{\gamma(t_0)}(\gamma(t)).$$

Notons que la clause (1.62) implique la continuité de Φ . La proposition suivante assure à la fois l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une telle primitive d'une 1-forme localement exacte le long d'un chemin.

PROPOSITION 1.7 (existence et unicité d'une primitive d'une forme localement exacte le long d'un chemin continu). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin continu et ω une 1-forme continue et localement exacte au voisinage du support de γ . Il existe au moins une primitive de ω le long du chemin γ . De plus, deux primitives Φ_1 et Φ_2 de ω le long de γ diffèrent d'une constante.

DÉMONSTRATION. Il est plus facile de prouver d'abord l'unicité (à une constante près) d'une telle primitive. En effet, supposons que Φ_1 et Φ_2 soient deux telles primitives de ω le long de γ . Au voisinage de $\gamma(t_0)$, il existe donc deux primitives $F_{\gamma(t_0),1}$ et $F_{\gamma(t_0),2}$ de ω , telles que, pour t voisin de t_0 , on ait à la fois $\Phi_1(t) = F_{\gamma(t_0),1}(\gamma(t))$ et $\Phi_2(t) = F_{\gamma(t_0),2}(\gamma(t))$. Mais les deux primitives $F_{\gamma(t_0),1}$ et $F_{\gamma(t_0),2}$ diffèrent nécessairement d'une constante au voisinage de $\gamma(t_0)$ (d'après l'inégalité des accroissements finis, voir aussi la Remarque 1.3). La fonction $t \in [a, b] \mapsto \Phi_2(t) - \Phi_1(t)$ est ainsi une fonction continue localement constante sur le connexe $[a, b]$. Elle est donc bien constante, ce qui prouve l'unicité, à une constante près, de la primitive de ω le long de γ .

³⁴. On ne peut parler ici de « formes fermées » puisque les 1-formes localement exactes que l'on prétend intégrer ne sont plus supposées C^1 , mais seulement continues, c'est-à-dire C^0 .

Pour prouver l'existence, nous allons « dénouer³⁵ » le chemin paramétré continu $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t)$ en un chemin continu de $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$ ne présentant plus aucun point double, par exemple le chemin

$$\Gamma : t \in [a, b] \mapsto (\gamma(t), \varphi(t)),$$

où φ désigne un homéomorphisme strictement croissant arbitraire entre $[a, b]$ et $[\varphi(a), \varphi(b)] = [a', b']$. La 1-forme différentielle $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, localement exacte au voisinage du support de γ , peut aussi être considérée cette fois comme la 1-forme $\Omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy + 0 dw$, localement exacte (comme 1-forme différentielle en trois variables), au voisinage du support du chemin « dénoué » Γ . Nous allons prouver qu'il existe alors un voisinage \mathbb{U} du support de Γ dans \mathbb{R}^3 , et une fonction $\mathbb{F} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$, tels que $d\mathbb{F} = \Omega$ dans \mathbb{U} , i.e.,

$$(1.63) \quad \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial x}(x, y, w) = P(x, y), \quad \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial y}(x, y, w) = Q(x, y), \quad \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial w}(x, y, w) = 0 \quad \forall (x, y, w) \in \mathbb{U}.$$

Admettons ce résultat pour l'instant. Posons

$$\forall t \in [a, b], \quad \Phi(t) := \mathbb{F}(\gamma(t), \varphi(t)).$$

Comme $\partial \mathbb{F} / \partial w \equiv 0$ dans un voisinage connexe $\mathbb{V}(\Gamma(t_0))$ de $\Gamma(t_0) = (\gamma(t_0), \varphi(t_0))$ (tel que $\mathbb{V}(\Gamma(t_0)) \subset \mathbb{U}$), la fonction $(x, y, w) \mapsto \mathbb{F}(x, y, w)$ ne dépend que de (x, y) dans $\mathbb{V}(\Gamma(t_0))$ (car constante en z dans ce voisinage); elle s'exprime même comme une certaine primitive $F_{\gamma(t_0)}$ de la forme ω dans le voisinage de $\gamma(t_0)$ défini comme la projection de $\mathbb{V}(\Gamma(t_0))$ sur $\mathbb{R}_{x,y}^2$. On a donc bien, pour chaque $t_0 \in [a, b]$, pour t assez voisin de t_0 ,

$$\Phi(t) = \mathbb{F}(\gamma(t), \varphi(t)) = \mathbb{F}(\gamma(t), \varphi(t_0)) = F_{\gamma(t_0)}(\gamma(t)),$$

ce qui prouve que Φ est bien une primitive de ω le long de γ .

Il reste à prouver notre assertion concernant l'existence de \mathbb{U} et de la primitive $\mathbb{F} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ de Ω . Notons

$$\mathbb{E} := \left\{ t \in [a, b]; \Omega \text{ admet une primitive au voisinage de } \Gamma([a, t]) \right\}.$$

L'ensemble \mathbb{E} est évidemment un sous-ensemble ouvert de $[a, b]$ (puisque le chemin Γ est continu). Nous allons montrer que \mathbb{E} est aussi fermé dans $[a, b]$. Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{E}}$. Puisque Ω est une 1-forme localement exacte au voisinage de $\Gamma(t_0)$ (car ω est localement exacte au voisinage de $\gamma(t_0)$), il existe une primitive $\mathbb{F}_{\Gamma(t_0)}$ de Ω (i.e. $d\mathbb{F}_{\Gamma(t_0)} = \Omega$) dans une certaine boule ouverte $B(\Gamma(t_0), \epsilon)$. Le fait que Γ soit continu et que t_0 soit adhérent à \mathbb{E} implique qu'il existe $t \in \mathbb{E}$ tel que $\Gamma([t, t_0]) \subset B(\Gamma(t_0), \epsilon)$. Puisque $t \in \mathbb{E}$, il existe un voisinage ouvert \mathbb{U}_t de $\Gamma([a, t])$ dans \mathbb{R}^3 et une primitive \mathbb{F}_t de Ω dans \mathbb{U}_t . On note C_t la composante connexe de l'ouvert $\mathbb{U}_t \cap B(\Gamma(t_0), \epsilon)$ contenant le point $\Gamma(t)$. Dans C_t , les deux primitives de la forme Ω que sont \mathbb{F}_t (primitive dans \mathbb{U}_t) et $\mathbb{F}_{\Gamma(t_0)}$ (primitive dans $B(\Gamma(t_0), \epsilon)$) diffèrent d'une constante $k_{t_0,t}$, soit $\mathbb{F}_{\Gamma(t_0)} = \mathbb{F}_t + k_{t_0,t}$. Quitte à restreindre \mathbb{U}_t , on peut supposer que

$$\Gamma([t, t_0]) \cap \overline{\mathbb{U}_t \setminus C_t} = \emptyset$$

35. On peut penser le chemin paramétré continu matérialisé par un bout de ficelle noué éventuellement sur lui-même que précisément l'on dénoue en « relevant » l'extrémité $f(b)$ suivant une direction verticale, d'où le qualificatif de « chemin dénoué ». On utilise en effet plus classiquement le terme de « relèvement » pour désigner, s'agissant d'un chemin γ de \mathbb{C}^* , une primitive le long de γ de la forme dz/z .

(en effet Γ ne présente aucun point double). Sur l'ouvert

$$\mathbb{U}_{t_0} := \mathbb{U}_t \cup (B(\Gamma(t_0), \epsilon) \setminus \overline{\mathbb{U}_t} \setminus C_t)$$

(qui est un voisinage de $\Gamma([a, t_0])$), on considère la primitive \mathbb{F}_{t_0} de Ω définie comme $\mathbb{F}_t + k_{t_0, t}$ dans \mathbb{U}_t et $\mathbb{F}_{\Gamma(t_0)}$ dans $B(\Gamma(t_0), \epsilon)$. Ces deux primitives de Ω se recollent bien en une seule dans l'ouvert \mathbb{U}_{t_0} , qui est un voisinage ouvert de $\Gamma([a, t_0])$. On a donc bien $t_0 \in \mathbb{E}$. L'ensemble \mathbb{E} est un ouvert-fermé non vide de $[a, b]$ (car \mathbb{E} contient a) ; puisque $[a, b]$ est connexe, on a $\mathbb{E} = [a, b]$, ce qui prouve l'existence du voisinage \mathbb{U} et de la primitive \mathbb{F} de Ω dans \mathbb{U} . La proposition est ainsi démontrée. \square

La Proposition 1.7 incite à poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.10 (intégrale d'une 1-forme continue localement exacte sur un chemin continu). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin continu du plan et ω une 1-forme différentielle continue et localement exacte au voisinage du support de γ . On définit l'intégrale de la 1-forme continue localement exacte ω sur le chemin continu γ par

$$(1.64) \quad \int_{\gamma} \omega := \Phi(b) - \Phi(a),$$

où Φ désigne n'importe quelle primitive de ω le long du chemin γ (au sens de la Définition 1.9).

REMARQUE 1.11. Du fait de la clause d'unicité dans la Proposition 1.7, la définition 1.64 est bien indépendante du choix de la primitive Φ de ω le long de γ (il en existe au moins une d'après la même Proposition 1.7). Comme l'homéomorphisme strictement croissant $\varphi : [a, b] \rightarrow [a', b']$, choisi dans la construction (à la Proposition 1.7, volet « existence de Φ ») d'une primitive Φ de ω le long de γ , est arbitraire, on déduit du fait que la définition (1.64) ne dépend pas de Φ que, si $\tilde{\gamma} : [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (avec $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$) est un autre paramétrage admissible de γ , alors

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

autrement dit, la définition (1.64) ne dépend pas, ce qui est important, du choix du paramétrage admissible du chemin γ .

REMARQUE 1.12. Si γ est de classe C^1 par morceaux et que ω est une 1-forme différentielle continue et localement exacte au voisinage du support de γ , l'intégrale

$$\int_{\gamma} \omega$$

définie en (1.64) coïncide avec l'intégrale curviligne (1.42) définie dans la sous-section 1.3.2. Il suffit pour s'en convaincre d'introduire une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b$$

de pas assez petit pour que ω admette une primitive au voisinage de tout compact $\gamma([t_j, t_{j+1}])$, $j = 0, \dots, N-1$. Il y a donc bien dans ce cas cohérence entre les deux notions d'intégrale d'une 1-forme continue localement exacte³⁶.

³⁶. N'oublions pas toutefois que, si γ est un chemin C^1 par morceaux, l'intégrale curviligne (1.42) d'une 1-forme différentielle continue au voisinage du support de γ , qu'elle soit localement exacte ou non, est parfaitement définie.

La proposition suivante permet de ramener le cas du calcul de l'intégrale (1.64) à celui de l'intégrale d'une 1-forme continue sur un chemin par morceaux (et par conséquent permet de se retrouver en position d'effectuer, si besoin est, des calculs cette fois explicites).

PROPOSITION 1.8. *Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin continu et ω une 1-forme continue localement exacte dans un voisinage U du support de γ . Il existe $\eta > 0$ (ne dépendant que de γ et de U , mais non de ω), tel que, pour toute subdivision σ de $[a, b]$,*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b,$$

de pas strictement inférieur à η , on ait

$$(1.65) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_{\sigma}} \omega,$$

où le membre de gauche est défini comme en (1.64), et le membre de droite représente l'intégrale curviligne (1.42) de la 1-forme continue ω sur le chemin C^1 par morceaux (en fait polygonal) $\gamma_{\sigma} : [a, b] \rightarrow U$ défini par

$$(\gamma_{\sigma})_{|[t_j, t_{j+1}]}(t) := \gamma(t_j) + t(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

(ce chemin est bien de support inclus dans U si η est assez petit).

DÉMONSTRATION. Le fait que le support de γ_{σ} soit inclus dans U résulte de l'uniforme continuité de γ sur $[0, 1]$ et du lemme de recouvrement de Lebesgue³⁷

. Soit $t \in [a, b] \mapsto \Gamma(t) = (\gamma(t), t)$ une version dénouée de γ dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$, U un voisinage de $\Gamma([a, b])$ dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$, dans lequel existe une primitive \mathbb{F} de la 1-forme $\Omega_{x,y,w} = \omega_{x,y} + 0 dw$ (voir le volet « existence » de la preuve de la Proposition 1.7). Si le pas de la subdivision σ est assez petit, le support du chemin continu dénoué

$$\Gamma_{\sigma} : t \in [a, b] \mapsto (\gamma_{\sigma}(t), t)$$

reste inclus dans U . On constate alors que, compte-tenu de la formule (1.42) et de la définition (1.64),

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\sigma}} \omega &= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{[t_j, t_{j+1}]} (\gamma_{\sigma})_{|[t_j, t_{j+1}]}^* [\omega] = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{(\Gamma_{\sigma})_{|[t_j, t_{j+1}]} \Omega \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (\mathbb{F}(\gamma(t_{j+1}), t_{j+1}) - \mathbb{F}(\gamma(t_j), t_j)) = \mathbb{F}(\Gamma(b)) - \mathbb{F}(\Gamma(a)) = \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 1.6 (intégration de la forme $dz/(z - z_0)$ sur un lacet continu de support dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un lacet continu dont le support évite le point z_0 . La 1-forme différentielle $dz/(z - z_0)$ est fermée, donc localement exacte (Proposition 1.1), dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$: ceci résulte de la remarque faite à l'exemple 1.2 et du fait que $(\partial/\partial\bar{z})(1/z) = 0$ dans \mathbb{C}^* . Cette forme $dz/(z - z_0)$ est donc localement exacte au voisinage du support de γ . La forme $dz/(z - z_0) + 0 dw$

37. Le lemme du recouvrement de Lebesgue joue, couplé en général avec le théorème de Heine, un rôle majeur dans ces raisonnements ; il s'énonce ainsi : si K est un compact d'un espace métrique et \mathcal{R} un recouvrement de ce compact par une collection d'ouverts, il existe $\eta > 0$ tel que tout sous-ensemble de K de diamètre inférieur ou égal à η soit inclus dans au moins l'un des ouverts du recouvrement \mathcal{R} .

(considérée comme une 1-forme différentielle au voisinage du support, dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$, du chemin $t \in [a, b] \mapsto \Gamma(t) := (\gamma(t), t)$) admet une primitive \mathbb{F} dans un voisinage \mathbb{U} de $\Gamma([a, b])$ (voir la preuve de la Proposition 1.7). Dans \mathbb{U} , on a donc

$$\begin{aligned} d(z - z_0)e^{-\mathbb{F}(x,y,w)} &= e^{-\mathbb{F}(x,y,w)} dz - (z - z_0) e^{-\mathbb{F}(x,y,w)} d_{x,y,w}\mathbb{F} \\ &= (z - z_0)e^{-\mathbb{F}(x,y,w)} \left(\frac{dz}{z - z_0} - d_{x,y,w}\mathbb{F} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que la fonction continue $(x, y, w) \mapsto (z - z_0)e^{-\mathbb{F}(x,y,w)}$ est constante sur le connexe $\Gamma([a, b])$. Il existe donc une constante k telle que

$$(1.66) \quad \forall t \in [a, b], \quad \gamma(t) - z_0 = k \exp(\mathbb{F}(\gamma(t), t)) = k \exp(\mathbb{F}(\Gamma(t))).$$

Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$ car γ est un lacet, on a

$$(1.67) \quad \exp(\mathbb{F}(\Gamma(b)) - \mathbb{F}(\Gamma(a))) = 1,$$

soit, puisque $t \mapsto \Phi(t) = \mathbb{F}(\Gamma(t))$ est une primitive de la 1-forme $dz/(z - z_0)$ le long du lacet γ (voir la preuve de la Proposition 1.7), compte-tenu de la Définition 1.10,

$$(1.68) \quad \mathbb{F}(\Gamma(b)) - \mathbb{F}(\Gamma(a)) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

L'exemple 1.6 motive l'introduction de la notion suivante :

DÉFINITION 1.11 (indice d'un lacet continu par rapport à un point). Soit γ un lacet continu du plan et z_0 un point n'appartenant pas au support de γ . L'*indice de γ par rapport à z_0* est le nombre entier :

$$(1.69) \quad \text{Ind}(\gamma, z_0) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

REMARQUE 1.13 (variation de l'argument). Compte tenu de son expression à partir de la primitive \mathbb{F} obtenue dans l'exemple 1.6 (voir les relations (1.66), (1.67), (1.68)), on voit que l'indice d'un lacet continu par rapport à un point z_0 n'appartenant pas à son support s'interprète comme le *nombre de tours* (compté algébriquement, le sens positif étant le sens trigonométrique) que le lacet γ , parcouru dans le sens imposé $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ depuis son origine $\gamma(a)$ jusqu'à son extrémité $\gamma(b)$, effectue autour du point z_0 . Plus généralement, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin continu dont le support évite le point z_0 , sans être nécessairement un lacet, on a

$$(1.70) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \log \left| \frac{\gamma(b) - z_0}{\gamma(a) - z_0} \right| + i\Delta_{\text{arg}}[t \mapsto \gamma(t) - z_0],$$

où $\Delta_{\text{arg}}[t \mapsto \gamma(t) - z_0] \in \mathbb{R}$ représente le bilan algébrique de la *variation de l'argument* (exprimée en radians) de $t \mapsto \gamma(t) - z_0$ lorsque t varie de a à b .

Il est évident que le symbole intégral dans une expression telle que (1.69) ou (1.70) ne saurait avoir qu'une signification formelle; il n'est pas question ici de calculer la moindre intégrale (au sens classique du terme, par exemple une intégrale curviligne), à moins que γ ne soit C^1 par morceaux, ce qui en général n'est pas le cas. Avec l'invariance de l'intégrale sous une « déformation » continue des chemins γ , nous conforterons dans la sous-section suivante cet état de fait (cf. la Proposition 1.12).

Une première propriété de la fonction indice est la suivante :

PROPOSITION 1.9 (l'indice est localement constant). *Soit γ un lacet continu de \mathbb{C} et U l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$. La fonction*

$$z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp} \gamma \longmapsto \text{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$$

est constante dans chaque composante connexe de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$.

DÉMONSTRATION. Comme cette fonction est à valeurs dans \mathbb{Z} , il suffit de montrer que cette fonction est continue en un point z_0 du complémentaire du support de γ . Grâce à la proposition 1.8, on peut représenter $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ sous la forme

$$\text{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\sigma} \frac{dz}{z - z_0},$$

où γ_σ est un chemin C^1 par morceaux correspondant à une ligne polygonale à sommets sur le support de γ . Cette représentation demeure valable lorsque z_0 est perturbé en $z_0 + h$, avec h assez proche de 0. On a alors, au voisinage de $h = 0$,

$$\text{Ind}(\gamma, z_0 + h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\sigma} \frac{dz}{z - z_0 - h},$$

Cette fonction de h se traite (du fait de la formule (1.42)) comme une intégrale dépendant d'un paramètre. On applique les résultats usuels de L2, dans le cadre de l'intégration Riemann, pour voir que cette dépendance en le paramètre est, comme celle de $h \mapsto 1/(z - z_0 - h)$ dans l'intégrant, une dépendance continue. \square

1.4.2. Homotopie entre chemins continus et groupes d'homotopie.

Tout chemin continu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ admet un paramétrage admissible $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, soit

$$\tilde{\gamma} : t \in [0, 1] \rightarrow \gamma(a + t(b - a)).$$

Dans la suite, notre objectif étant à terme d'étudier le comportement de l'intégrale (1.64) des 1-formes continues localement exactes sur les chemins continus, nous supposons, puisque cette intégrale est indépendante du paramétrage admissible du chemin, que tous les chemins continus paramétrés en jeu sont des chemins continus de la forme $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.

Une opération importante entre chemins continus est, lorsqu'elle est possible, la *concaténation* (ou mise bout-à-bout). Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux chemins continus du plan tels que l'extrémité de γ soit l'origine de δ , on définit le chemin concaténé continu $\gamma \vee \delta$ comme le chemin continu :

$$(1.71) \quad \gamma \vee \delta : t \in [0, 1] \longmapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \forall t \in [0, 1/2] \\ \delta(2t - 1) & \forall t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Il faut prendre garde au fait qu'une telle opération, quand bien même existe la possibilité de concaténer trois chemins, n'est pas associative! La concaténation des lacets continus d'origine-extrémité un point $\alpha \in \mathbb{C}$ est certes toujours possible; ce n'est cependant ni une opération associative, ni une opération commutative. Étant donné un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, on définit son *inverse* (au sens ici de l'opération de concaténation) comme le chemin $\gamma^{\vee^{-1}} : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(1 - t)$.

L'intégration des 1-formes localement exactes respecte additivement l'opération de concaténation. C'est la *relation de Chasles* :

PROPOSITION 1.10 (relation de Chasles). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , ω une 1-forme continue et localement exacte dans U , $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ et $\delta : [0, 1] \rightarrow U$ deux chemins continus de support dans U tels que l'extrémité de γ soit aussi l'origine de δ . Alors*

$$\int_{\gamma \vee \delta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\delta} \omega.$$

DÉMONSTRATION. On peut (par exemple) utiliser la Proposition 1.8, qui nous ramène à la relation de Chasles pour deux chemins C^1 par morceaux concaténés et, par conséquent, à la relation de Chasles satisfaite dans l'opération de prise d'intégrale curviligne (1.42). \square

Nous introduisons dans les deux définitions suivantes (dans deux cadres différents, celui des chemins continus « à extrémités marquées » et celui des lacets continus « libres »), la relation d'équivalence d'*homotopie* (assujettie à un ouvert U du plan).

DÉFINITION 1.12 (homotopie entre chemins continus à extrémités marquées). Soit U un ouvert du plan complexe, α et β deux points de U . Deux chemins continus $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$, tous deux d'origine α et d'extrémité β , sont *homotopes dans U comme chemins continus d'extrémités marquées α et β* s'il existe une fonction continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que

$$(1.72) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, 1], F(t, 0) = \gamma_0(t), F(t, 1) = \gamma_1(t) \\ \forall s \in [0, 1], F(0, s) = \alpha, F(1, s) = \beta. \end{aligned}$$

Autrement dit, le chemin continu γ_0 peut se déformer continuellement dans U en le chemin continu γ_1 , ce suivant une famille de chemins continus intermédiaires $\gamma_s : t \in [0, 1] \rightarrow F(t, s) \in U, s \in [0, 1]$, tous d'origine α et d'extrémité β , et de support inclus dans U . Le paramètre $s \in [0, 1]$ joue ainsi le rôle de paramètre de déformation³⁸. La relation $\mathcal{H}_{U;\alpha,\beta}$:

$$\gamma_0 \mathcal{H}_{U;\alpha,\beta} \gamma_1 \iff \gamma_0 \text{ et } \gamma_1 \text{ homotopes dans } U \text{ comme chemins continus de } \alpha \text{ à } \beta$$

est une relation d'équivalence entre chemins continus à extrémités marquées les points α et β . Lorsque $\alpha = \beta$, cette relation d'homotopie est dit relation d'*homotopie dans U entre lacets continus de point de base α* .

Si $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\delta_0 : [0, 1] \rightarrow U$ sont des lacets continus de point de base α respectivement homotopes (dans U , comme lacets continus de point de base α) aux lacets $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\delta_1 : [0, 1] \rightarrow U$, on voit facilement que le lacet $\gamma_0 \vee \delta_0$ est homotope au lacet $\gamma_1 \vee \delta_1$ au sens de l'homotopie dans U entre lacets continus de point de base α . L'opération de concaténation entre lacets continus de U de point de base α induit donc une opération au niveau des classes d'équivalence $\dot{\gamma}$ des lacets continus de point de base α modulo la relation d'équivalence $\mathcal{H}_{U;\alpha,\alpha}$:

$$(1.73) \quad \dot{\gamma} \dot{\vee} \dot{\delta} := \text{classe de } (\gamma \vee \delta).$$

Cette opération (entre classes d'équivalence) est cette fois associative (c'est facile à vérifier). Elle admet un élément neutre, à savoir la classe \dot{e} du lacet constant : $t \in [0, 1] \rightarrow \alpha$, et tout élément $\dot{\gamma}$ admet un opposé, à savoir la classe de $\gamma^{\vee^{-1}}$ (ce que l'on pourra vérifier aussi en exercice).

³⁸. Une manière parlante de visualiser l'homotopie est de se figurer les chemins continus incarnés par des brins de ficelle (arbitrairement extensibles) tendus entre les deux extrémités α et β matérialisées, elles, par deux clous. Dire que γ_0 est homotope à γ_1 dans U signifie que le brin γ_0 peut être amené de manière continue (en restant dans U) sur le brin γ_1 .

REMARQUE 1.14 (non commutativité de la concaténation des classes d'homotopie). L'opération (1.73) entre classes d'homotopie $\mathcal{H}_{U;\alpha,\alpha}$ de lacets continus de point de base α n'est pas commutative : on prend comme exemple $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\alpha = 1/2$, et pour $\dot{\gamma}$ et $\dot{\delta}$ les classes des lacets continus $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}/2$ et $\delta : t \in [0, 1] \mapsto 1 - e^{2i\pi t}/2$ (les supports sont deux cercles de centres respectifs 0 et 1 tangents au point 1/2).

Ce qui précède montre que l'on dispose, avec l'opération de concaténation \vee passée au quotient, d'une structure de groupe (en général non commutatif, voir la Remarque 1.14) sur le quotient de l'ensemble des lacets continus de U de point de base α par la relation d'équivalence $\mathcal{H}_{U;\alpha,\alpha}$.

DÉFINITION 1.13 (premier groupe d'homotopie $\pi_1(U, \alpha)$, ouverts simplement connexes). Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Le groupe des classes d'équivalence des lacets continus de point de base $\alpha \in U$, avec la structure de groupe induite par passage au quotient $\dot{\vee}$ de l'opération de concaténation \vee , est appelé *premier groupe d'homotopie de U relativement au point α* , et noté $\pi_1(U, \alpha)$. Si U est connexe, ce groupe ne dépend pas (à isomorphisme près) du point de base choisi, et est appelé *premier groupe d'homotopie $\pi_1(U)$* . Un ouvert connexe de \mathbb{C} est dit *simplement connexe* si $\pi_1(U) = \{\dot{\epsilon}\}$.

EXEMPLE 1.7 (étoilé \implies simplement connexe). Si U est un ouvert de \mathbb{C} étoilé par rapport à un point z_0 , U est simplement connexe car tout lacet $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de point de base z_0 est homotope au lacet constant $t \in [0, 1] \rightarrow z_0$ via l'application $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto F(t, s) = \gamma(t) + t(z_0 - \gamma(t)) \in U$. On a donc $\pi_1(U, z_0) = \pi_1(U) = \{\dot{\epsilon}\}$. En particulier \mathbb{C} , le plan « fendu » $\mathbb{C} \setminus [0, \infty[e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in [0, 2\pi[$, le disque unité, ou plus généralement tout ouvert convexe de \mathbb{C} , sont simplement connexes.

Dans un ouvert simplement connexe, une fonction continue f ne s'annulant pas admet un « logarithme ».

PROPOSITION 1.11 (logarithme complexe). Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , f une application continue de U dans \mathbb{C}^* . Il existe une application continue $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f = \exp(g)$ dans U . On dit que g est une *détermination continue du logarithme de f dans l'ouvert U* . Dans le cas particulier où $U \subset \mathbb{C}^*$ et $f(z) = z$, on parle de *détermination continue du logarithme complexe*.

DÉMONSTRATION. Il s'agit ici de l'exercice 1.32 proposé en fin de section. On en esquisse une brève solution. On fixe un point de base α (tel que $f(\alpha) = \exp(c_0)$) dans U . On définit une fonction continue $g_\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}$ en posant

$$g_\alpha(z) := c_0 + \int_{f \circ \gamma_{\alpha,z}} \frac{dw}{w},$$

$\gamma_{\alpha,z}$ désignant n'importe quel chemin continu (il en existe car U est connexe) de support dans U , joignant α à z ; le chemin $f \circ \gamma_{\alpha,z}$ est donc bien un chemin de \mathbb{C}^* car f ne s'annule pas dans U . Le fait que U soit simplement connexe implique (on peut par exemple utiliser ici la formule (1.70) et remarquer que la variation de l'argument le long du chemin $f \circ \gamma_{\alpha,z}$ ne dépend que de la classe d'homotopie du lacet $\gamma_{\alpha,z}$ dans l'homotopie $\mathcal{H}_{U;\alpha,\alpha}$, on verra d'ailleurs plus loin que cette observation s'interprète comme un cas particulier du premier volet de la Proposition 1.12 à venir) que la définition de $g_\alpha(z)$ ne dépende que du choix de α et non de celui du chemin $\gamma_{\alpha,z}$.

Elle est donc licite. On vérifie aussi, pour z fixé dans U , que, si h est assez voisin de 0,

$$g_\alpha(z+h) - g_\alpha(z) = \int_{[f(z), f(z+h)]} \frac{dw}{w}.$$

Il résulte alors de la formule (1.70) (Remarque 1.13) que la fonction

$$h \mapsto f(z+h) \exp(-g_\alpha(z+h))$$

est en fait constante au voisinage de $h = 0$ (car $h \mapsto g_\alpha(z+h)$ réalise, à une constante additive près, une détermination du logarithme de $h \mapsto f(z+h)$). La fonction

$$z \in U \mapsto f(z) \exp(-g_\alpha(z))$$

est donc constante, car localement constante, dans U . On a donc bien, puisque $f(\alpha) \exp(-g_\alpha(\alpha)) = 1$, $f(z) = \exp(g_\alpha(z))$ dans U . \square

Une autre relation d'équivalence homotopique joue souvent un rôle.

DÉFINITION 1.14 (homotopie entre lacets continus libres). Soit U un ouvert du plan complexe. Deux lacets continus $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$, sont *homotopes dans U en tant que lacets continus libres* s'il existe une fonction continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ telle que

$$(1.74) \quad \begin{aligned} \forall t \in [0, 1], F(t, 0) &= \gamma_0(t), F(t, 1) = \gamma_1(t) \\ \forall s \in [0, 1], F(0, s) &= F(1, s). \end{aligned}$$

Autrement dit, le lacet continu γ_0 peut se déformer continuellement dans U en le lacet continu γ_1 , ce suivant une famille de lacets continus intermédiaires $\gamma_s : t \in [0, 1] \rightarrow F(t, s) \in U$, $s \in [0, 1]$, tous de support inclus dans U . Le paramètre $s \in [0, 1]$ joue ainsi le rôle de paramètre de déformation³⁹. La relation \mathcal{H}_U :

$$\gamma_0 \mathcal{H}_U \gamma_1 \iff \gamma_0 \text{ et } \gamma_1 \text{ homotopes dans } U \text{ comme lacets libres}$$

est une relation d'équivalence entre lacets continus de support dans l'ouvert U .

PROPOSITION 1.12 (invariance de l'intégrale par homotopie). Soit U un ouvert du plan, α et β deux points de U , $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ deux chemins continus tels que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \alpha$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \beta$, homotopes dans l'homotopie $\mathcal{H}_{U; \alpha, \beta}$ entre chemins continus d'origine α et d'extrémité β et de support dans U . Soit ω une 1-forme continue localement exacte dans U . On a

$$(1.75) \quad \int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets continus de support inclus dans U , homotopes dans l'homotopie \mathcal{H}_U entre lacets libres de support dans U , l'égalité (1.75) est également valide.

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin continu de support inclus dans U , que l'on dénoue en le chemin continu $t \in [0, 1] \mapsto (\gamma(t), t) \in U \times \mathbb{R}$. Soit, comme dans la preuve de la Proposition 1.7 (volet « existence ») un voisinage \mathbb{U} de $\Gamma([0, 1])$ dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$ dans lequel on puisse définir une primitive \mathbb{F} de la 1-forme

³⁹. Une manière parlante de visualiser l'homotopie est de se figurer les lacets continus incarnés par des élastiques (arbitrairement extensibles) placés dans U . Dire que γ_0 est homotope à γ_1 dans U signifie que l'élastique γ_0 peut être amené de manière continue (en restant dans l'ouvert U) sur l'élastique γ_1 .

continue $\Omega = \omega_{x,y} + 0 dw$. Si $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ est un autre chemin continu tel que le support du chemin

$$t \in [0, 1] \mapsto \tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}(t), t)$$

soit inclus dans \mathbb{U} , on peut utiliser la même primitive \mathbb{F} pour construire, comme dans le volet « existence » de la Proposition 1.7, une primitive de ω le long de γ ou une primitive de ω le long de $\tilde{\gamma}$. Si de plus $\tilde{\gamma}$ a même origine et même extrémité que γ , la définition (1.64) montre que nécessairement, on a alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Si $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow U$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ sont deux chemins continus d'origine α et d'extrémité β , de support inclus dans U , homotopes dans U au sens de l'homotopie à extrémités marquées α et β (l'homotopie étant réalisée par la fonction continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$), il résulte de ce qui précède que la fonction

$$(1.76) \quad s \in [0, 1] \mapsto \int_{t \mapsto F(t,s)} \omega$$

est localement constante comme fonction de s . Comme $[0, 1]$ est connexe, cette fonction est constante sur $[0, 1]$ et l'on a bien l'égalité (1.75). La première affirmation de la Proposition 1.12 est prouvée.

Pour la seconde affirmation (le cas de l'homotopie entre lacets libres), on utilise une idée similaire. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet continu, $\Gamma : t \in [0, 1] \rightarrow (\gamma(t), t)$ une version dénouée dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$, et \mathbb{U} un voisinage ouvert de $\Gamma([0, 1])$ dans $\mathbb{R}_{x,y,w}^3$ dans lequel on dispose d'une primitive Ω pour la forme $\Omega_{x,y,w} = \omega_{x,y} + 0 dw$. Si $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow U$ est un lacet continu tel que le support de $\tilde{\Gamma} : t \mapsto (\tilde{\gamma}(t), t)$ soit inclus dans \mathbb{U} , ainsi que les segments $[\Gamma(0), \tilde{\Gamma}(0)]$ et $[\Gamma(1), \tilde{\Gamma}(1)]$, on observe (en suivant la preuve de la Proposition 1.7) que

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{[\gamma(0), \tilde{\gamma}(0)]} \omega + \int_{\tilde{\gamma}} \omega + \int_{[\tilde{\gamma}(0), \gamma(0)]} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

Si $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ réalise dans U l'homotopie (entre lacets libres) entre γ_0 et γ_1 (selon (1.74)), on déduit de ce qui précède que la fonction (1.76) est encore localement constante sur $[0, 1]$, donc constante puisque $[0, 1]$ est connexe. On a donc encore l'égalité entre ses valeurs en $s = 0$ et $s = 1$, soit la formule (1.75). \square

La Proposition 1.12 et la Proposition 1.8 nous permettent, si U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , α un point de U , et ω une 1-forme continue localement exacte dans U , de définir un homomorphisme du groupe $\pi_1(U, \alpha)$ (muni de l'opération interne $\dot{\vee}$) dans le groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ par

$$\dot{\gamma} \in \pi_1(U, \alpha) \mapsto \int_{\gamma} \omega,$$

où γ désigne un représentant arbitraire de la classe d'homotopie $\dot{\gamma}$. Un exemple particulièrement important est celui de $U = \mathbb{C}^*$, avec $\omega = dz/z$.

PROPOSITION 1.13 ($\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$). *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $(\pi_1(\mathbb{C}^*, \alpha), \dot{\vee})$ le groupe des classes d'équivalence des lacets continus de \mathbb{C}^* de point de base α (l'opération*

$\dot{\vee}$ étant l'opération de concaténation des lacets passée au quotient, voir (1.73).
L'application

$$(1.77) \quad \dot{\gamma} \in \pi_1(\mathbb{C}^*, \alpha) \longmapsto \text{Ind}(\dot{\gamma}, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\dot{\gamma}} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}$$

(où γ désigne un représentant arbitraire de la classe $\dot{\gamma}$ modulo la relation d'équivalence $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^*; \alpha, \alpha}$), réalise un isomorphisme de groupes entre les groupes $(\pi_1(\mathbb{C}^*, \alpha), \dot{\vee})$ et $(\mathbb{Z}, +)$. Autrement dit, on peut affirmer que le premier groupe d'homotopie $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ introduit à la définition 1.13 est égal au groupe additif \mathbb{Z} .

DÉMONSTRATION. Comme nous l'avons déjà mentionné, si ω est une 1-forme continue localement exacte dans \mathbb{C}^* (par exemple dz/z) et si $\dot{\gamma}$ et $\dot{\delta}$ sont deux éléments de $\pi_1(\mathbb{C}^*, \alpha)$, on a

$$\int_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \omega = \int_{\dot{\gamma}} \omega + \int_{\dot{\delta}} \omega$$

(Propositions 1.8 et 1.12). L'application (1.77) réalise donc bien un homomorphisme de groupes entre $(\pi_1(\mathbb{C}^*, \alpha), \dot{\vee})$ et $(\mathbb{Z}, +)$.

Cet homomorphisme est surjectif : on vérifie en effet que pour le chemin

$$\gamma_{\alpha, n} : t \in [0, 1] \longmapsto \alpha e^{2i\pi n t}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

on a $\text{Ind}(\gamma_{\alpha, n}, 0) = n$.

Reste à voir que l'homomorphisme (1.77) est aussi injectif. Soit γ un lacet continu de \mathbb{C}^* de point de base α , tel que $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$. Il s'agit de montrer que $\dot{\gamma} = 0$, c'est-à-dire que γ est équivalent (modulo l'homotopie $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^*; \alpha, \alpha}$) à un lacet constant. Supposons $\alpha = \exp c_0$, $c_0 \in \mathbb{C}$. Soit $t \in [0, 1] \mapsto c(t)$ une primitive de la forme dz/z le long du lacet γ , telle que $c(0) = c_0$ (il existe une telle primitive d'après la Proposition 1.7). Comme $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$, on a $\int_{\gamma} dz/z = 0$ et, par conséquent, compte-tenu de la définition (1.64) de cette intégrale, $t \in [0, 1] \mapsto c(t)$ est un lacet continu de \mathbb{C} de point de base c_0 . Au voisinage d'un point $\gamma(t_0)$ ($t_0 \in [0, 1]$), toute primitive $F_{\gamma(t_0)}$ de la 1-forme dz/z vérifie $d[z \exp(-F_{\gamma(t_0)})] = 0$, soit $z \exp(-F_{\gamma(t_0)}) = \text{constante}$. Par conséquent, compte-tenu du fait que $c(t) = F_{\gamma(t_0)}(\gamma(t))$ au voisinage de t_0 , où $F_{\gamma(t_0)}$ est une telle primitive (d'après (1.62), puisque c est primitive de dz/z le long de γ), la fonction continue $t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) \exp(-c(t))$ est localement constante au voisinage de tout $t_0 \in [0, 1]$, donc constante sur $[0, 1]$ puisque continue. On a donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) \exp(-c(t)) = \gamma(0) \exp(-c(0)) = \alpha \exp(-c_0) = 1,$$

soit

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = \exp(c(t)).$$

En posant

$$F(t, s) := \exp(c_0 + s(c(t) - c_0)) \quad \forall (t, s) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

on réalise une homotopie (entre lacets continus de point de base α dans \mathbb{C}^*) entre le lacet $\gamma = F(\cdot, 0)$ et le lacet constant $F(\cdot, 1) : t \in [0, 1] \rightarrow \alpha$. On a donc bien $\dot{\gamma} = \dot{\epsilon}$ et l'homomorphisme (1.77) est injectif. \square

1.4.3. Le théorème de Rouché, version topologique. Une conséquence majeure de l'invariance de l'intégrale des 1-formes localement exactes par déformation des chemins sous homotopie (Proposition 1.12) concerne la fonction indice. On a le résultat suivant ⁴⁰ :

THEOREME 1.6 (théorème de Rouché⁴¹, version topologique). *Soient $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ deux lacets continus du plan tels que*

$$(1.78) \quad \forall t \in [0, 1], |\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| < |\gamma_0(t)| + |\gamma_1(t)|.$$

Les deux lacets γ_0 et γ_1 ont alors tous deux leur support inclus dans \mathbb{C}^ et on a*

$$\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0).$$

DÉMONSTRATION. Si (par exemple) $\gamma_0(t_0) = 0$, la condition (1.6) impliquerait $|\gamma_1(t)| < |\gamma_1(t)|$, ce qui est impossible. Ni γ_0 , ni (par symétrie) γ_1 , ne sauraient s'annuler sur $[0, 1]$. Le support de ces deux lacets est donc bien inclus dans \mathbb{C}^* . On introduit le lacet continu

$$t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) := \frac{\gamma_0(t)}{\gamma_1(t)}.$$

De (1.78), on déduit

$$\forall t \in [0, 1], |1 - \gamma(t)| < 1 + |\gamma(t)|.$$

Ceci implique que le support de γ est inclus dans $U = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, qui est un ouvert étoilé, donc simplement connexe (Exemple 1.7). On a donc $\text{Ind}(\gamma, 0) = 0$ (du fait de la Proposition 1.12, appliquée avec l'homotopie $\mathcal{H}_{U; \gamma(0), \gamma(0)}$). Comme $\gamma = \gamma_0/\gamma_1$ et que l'indice figure (une fois multiplié par 2π) la variation de l'argument le long du lacet, on a bien

$$\Delta_{\arg}[t \mapsto \gamma(t)] = \Delta_{\arg}[t \mapsto \gamma_0(t)] - \Delta_{\arg}[t \mapsto \gamma_1(t)] = 0.$$

On a donc bien $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)$. □

EXEMPLE 1.8 (une illustration didactique du théorème de Rouché). Voici l'illustration didactique proposée par le mathématicien (et aussi didacticien) hongrois George Pólya (1887-1985) pour la version topologique du théorème de Rouché : supposons qu'un promeneur (le « maître ») déambule avec son chien autour d'un rond-point gazonné de rayon R . La laisse du chien est de longueur $l < R$, et le maître n'est pas autorisé à piétiner le rond-point. Le chien, par contre, y est autorisé. Si la trajectoire du maître pendant un certain laps de temps (à partir de l'instant $t = 0$) est un lacet γ_0 (il revient exactement à son point de départ à l'instant $t = 1$), et si celle du chien pendant le même laps de temps est aussi un lacet γ_1 (il revient aussi à son point de départ à l'instant $t = 1$), on a

$$|\gamma_0(t) - \gamma_1(t)| \leq l < R \leq |\gamma_0(t)|,$$

et maître et chien ont donc accompli au final le même nombre (algébrique) de tours autour du centre du rond-point (car $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)$ en vertu du Théorème 1.6).

⁴⁰. Nous en donnerons plus tard une incarnation « analytique », en voici ici une incarnation « topologique ».

⁴¹. Mathématicien et enseignant français, Eugène Rouché (1832-1910) publia ce célèbre résultat (dans sa version analytique) en 1862 au Journal de l'École Polytechnique.

EXEMPLE 1.9 (une preuve « topologique » du théorème fondamental de l'algèbre). Pour illustrer la profondeur du Théorème 1.6 de Rouché, il est intéressant de constater qu'il fournit une démonstration du théorème de d'Alembert, selon lequel tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins un a au moins une racine complexe⁴². Soit P un tel polynôme, de degré $d > 0$,

$$P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d, \quad a_0 \neq 0.$$

Soit, pour $R > 0$, γ_R le lacet continu $t \in [0, 1] \mapsto P(Re^{2i\pi t})$. Si $z \mapsto P(z)$ ne s'annule pas dans le plan complexe, ce lacet est homotope (dans l'homotopie entre lacets continus libres de l'ouvert \mathbb{C}^* , voir la Définition 1.14) au lacet constant $\gamma_0 : t \in [0, 1] \mapsto P(0)$ via l'application de déformation

$$(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto P(se^{2i\pi t}).$$

En vertu de la Proposition 1.12 (second volet, cas de l'homotopie entre lacets continus libres), on a donc $\text{Ind}(\gamma_R, 0) = \text{Ind}(\gamma_0, 0) = 0$. Mais, pour R assez grand, on a

$$|a_0R^d| > \max_{t \in [0, 1]} |\gamma_R(t) - a_0(Re^{2i\pi t})^d|$$

puisque

$$\max_{t \in [0, 1]} |\gamma_R(t) - a_0(Re^{2i\pi t})^d| \leq \sum_{j=1}^d |a_j|R^{d-j}.$$

D'après le Théorème 1.6 de Rouché, on a donc

$$\text{Ind}(\gamma_R, 0) = \text{Ind}(\tilde{\gamma}_R, 0),$$

où $\tilde{\gamma}_R : t \in [0, 1] \mapsto a_0(Re^{2i\pi t})^d = a_0R^d \exp(2i\pi dt)$. Or on a

$$\text{Ind}(\tilde{\gamma}_R, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \tilde{\gamma}_R^*[dz/z] = d > 0.$$

Il y a donc contradiction entre $\text{Ind}(\gamma_R, 0) = 0$ et $\text{Ind}(\gamma_R, 0) = \text{Ind}(\tilde{\gamma}_R, 0) = d > 0$. L'hypothèse conduisant à pareille contradiction ($\{z \in \mathbb{C}; P(z) = 0\} = \emptyset$) est donc absurde et le théorème de d'Alembert est ainsi prouvé par l'absurde.

1.4.4. Exercices.

EXERCICE 1.31 (1-formes localement exactes, exactes). Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un chemin continu de U et ω une 1-forme continue localement exacte au voisinage de U . Existe-t-il toujours un voisinage V du support de γ dans lequel ω soit exacte? Donner sinon un contre-exemple.

EXERCICE 1.32 (le logarithme d'une fonction continue ne s'annulant pas dans un ouvert simplement connexe). Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et f une fonction continue de U dans \mathbb{C}^* . Soit $\alpha \in U$. Montrer que, pour tout point z de U , il existe un chemin continu $\gamma_{\alpha, z}$ de U d'origine α et l'extrémité z , puis que l'intégrale

$$\int_{f \circ \gamma_{\alpha, z}} dw/w$$

42. Il s'agit ici du « théorème fondamental de l'algèbre » et le rôle du théorème de Rouché dans sa preuve met en lumière le fait que l'analyse complexe se situe à un point charnière de l'édifice mathématique tout entier.

est indépendante du choix du chemin $\gamma_{\alpha,z}$. En déduire qu'il existe une fonction continue $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \exp(g(z))$ pour tout $z \in U$. Montrer que g peut être choisie C^∞ si f est supposée C^∞ . Montrer qu'une fonction continue de \overline{U} dans \mathbb{C} ne s'annulant pas dans \overline{U} s'écrit dans \overline{U} comme l'exponentielle d'une autre fonction continue.

EXERCICE 1.33. Soit U un ouvert de \mathbb{C} , f une application continue de U dans \mathbb{C}^* . On suppose que pour tout lacet continu γ de U , l'indice $\text{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ est nul. Montrer qu'il existe une fonction g continue de U dans \mathbb{C} telle que $f = \exp g$.

EXERCICE 1.34. Montrer que \mathbb{C} et \mathbb{C}^* ne peuvent pas être homéomorphes (on pensera à utiliser l'homotopie, en confrontant par exemple la situation décrite dans l'exemple 1.7 et celle décrite à la Proposition 1.13).

EXERCICE 1.35. Soit f une fonction continue de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* . Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ et une fonction g continue dans \mathbb{C}^* telles que $f(z) = z^{k(f)} \exp(g(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, où

$$k(f) = \text{Ind}(t \in [0, 1] \mapsto f(e^{2i\pi t}), 0)$$

(utiliser le résultat établi à l'exercice 1.33 et le résultat de la Proposition 1.13). En déduire (on pourra raisonner par récurrence sur N) que si z_1, \dots, z_N sont N points distincts de \mathbb{C} , et f une fonction continue de $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ dans \mathbb{C}^* , il existe des entiers $k_1(f), \dots, k_N(f)$ dans \mathbb{Z} , une fonction continue $g : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_N\}, f(z) = (z - z_1)^{k_1(f)} \times \dots \times (z - z_N)^{k_N(f)} \times \exp(g(z)).$$

EXERCICE 1.36 (indice, logarithme, racines n -ièmes). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction continue de U dans \mathbb{C}^* .

a) Montrer que si f admet un logarithme continu dans U , elle admet aussi, pour tout entier strictement positif n , une racine n -ième continue dans U .

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et γ un lacet continu de U . Montrer que si f admet une racine n -ième continue dans U , l'indice $\text{Ind}(f \circ \gamma, 0)$ de $f \circ \gamma$ par rapport à l'origine est un multiple de n .

c) Montrer que si f est une fonction continue de U dans \mathbb{C}^* admettant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une racine n -ième continue, alors f admet aussi un logarithme continu dans l'ouvert U .

EXERCICE 1.37 (concaténation des lacets). Montrer que si γ et δ sont deux lacets continus du plan de point de base α , on a

$$(\gamma \vee \delta)^{\vee^{-1}} = \delta^{\vee^{-1}} \vee \gamma^{\vee^{-1}}.$$

EXERCICE 1.38 (concaténation des classes de lacets). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $\alpha \in U$. Montrer que l'opération $\dot{\vee}$ obtenue par passage au quotient modulo $\mathcal{H}_{U;\alpha,\alpha}$ de l'opération de concaténation \vee entre lacets de point de base α , est une opération associative. Vérifier que la classe du lacet constant $t \in [0, 1] \mapsto \alpha$ est bien élément neutre pour cette opération $\dot{\vee}$, et que l'inverse de $\dot{\gamma}$ pour cet opération est la classe de $\gamma^{\vee^{-1}}$.

EXERCICE 1.39. Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} . Exhiber un isomorphisme entre les groupes d'homotopie $(\pi_1(U, \alpha), \dot{\vee})$ et $(\pi_1(U, \beta), \dot{\vee})$ lorsque α et β sont deux points distincts de U .

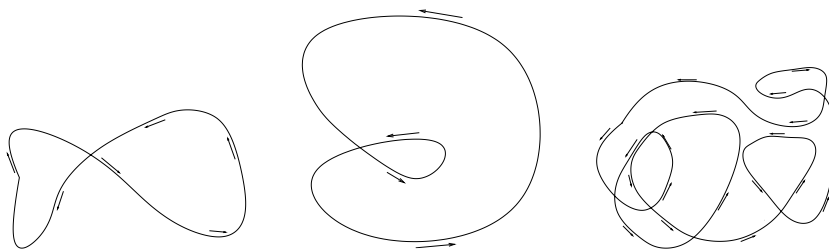


FIGURE 1.7. Calculs d'indice (exercice 1.43)

EXERCICE 1.40 (union de deux ouverts simplement connexes d'intersection connexe). Montrer que l'union de deux ouverts simplement connexes de plan dont l'intersection est connexe est encore un ouvert simplement connexe. Montrer, en exhibant un exemple, que ceci est faux dès que l'intersection n'est pas connexe (penser à une couronne ouverte, décrite comme l'union de deux ouverts simplement connexes).

EXERCICE 1.41 (simple connexité de la sphère de Riemann). En utilisant le résultat établi dans l'exercice 1.40 et deux projections stéréographiques convenables, montrer que si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ est un lacet continu tracé sur la sphère de Riemann ($\gamma(0) = \gamma(1) = \alpha$), il existe une application continue $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ telle que

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], F(t, 0) &= \gamma_0(t), F(t, 1) = \alpha \\ \forall s \in [0, 1], F(0, s) &= F(1, s) = \alpha. \end{aligned}$$

Autrement dit la sphère de Riemann est simplement connexe (tout lacet continu de point de base α tracé sur \mathbb{S}^2 se rétracte continuellement, sur la sphère, en le lacet constant de support $\{\alpha\}$).

EXERCICE 1.42 (lacs de \mathbb{C}^* et lacs tracés sur le cercle unité).

- a) Montrer que tout lacet continu de \mathbb{C}^* est homotope dans l'homotopie $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^*}$ entre lacs libres (dans \mathbb{C}^*) à un lacet continu de support inclus dans le cercle unité.
 b) Montrer que tout lacet continu γ de \mathbb{C}^* est homotope (dans l'homotopie $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^*}$) au lacet

$$t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi \text{Ind}(\gamma, 0)t}.$$

EXERCICE 1.43 (une règle visuelle pour calculer l'indice).

On considère les lacs γ représentés sur la figure 1.7; calculer, dans chaque composante connexe du complémentaire du support de chacun de ces lacs, la valeur de la fonction

$$z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z).$$

Tenter d'énoncer à partir de ces trois exemples une règle générale pour calculer $\text{Ind}(\gamma, z)$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\gamma)$) en examinant comment une demi-droite arbitraire issue de z (demi-droite qu'il est judicieux de choisir intelligemment de manière à ce qu'elle ne rencontre le support de γ qu'en des points non multiples, de manière transverse, et que ce nombre de points d'intersection soit le plus petit possible) intersecte le support du lacet orienté γ . Compter 1 si le lacet coupe dans le sens trigonométrique, -1 sinon, et ajouter les ± 1 correspondant à tous les points d'intersection avec la demi-droite. Justifier ce calcul.

EXERCICE 1.44 (des calculs d'indice pas si surprenants que cela). On rappelle qu'il existe une application continue surjective de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]^2$ telle que $\gamma(0) = (-1, -1)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$; c'est la courbe introduite par G. Peano. Soit C la couronne fermée du plan complexe $C := \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq |z| \leq 2\}$ et C^- et C^+ les deux demi-couronnes fermées définies par $C^- := C \cap \{z; \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ et $C^+ := C \cap \{z; \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. En utilisant la courbe de Peano, construire un chemin continu $\gamma^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^+ , tel que $\gamma^+(0) = 2$, $\gamma^+(1) = -1$, puis un chemin continu $\gamma^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ dont le support est exactement C^- tel que $\gamma^-(0) = -1$, $\gamma^-(1) = 2$. On note γ le lacet de \mathbb{C}^* obtenu en concaténant (dans cet ordre) γ^+ , puis γ^- . Que vaut l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma, 0)$? Même question en demandant à 1 (et non plus -1) d'être l'extrémité du lacet γ^+ et en même temps l'origine de γ^- .

EXERCICE 1.45 (variation de l'argument). Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, N points du disque unité ouvert. Quel est le bilan global de la variation de l'argument le long du lacet

$$t \in [0, 1] \mapsto \prod_{j=1}^N \frac{e^{2i\pi t} - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} e^{2i\pi t}} ?$$

Même question si les α_j sont tous de module strictement supérieur à 1. Idem si les α_j sont simplement supposés de module différent de 1.

EXERCICE 1.46 (déterminations continues de l'argument).

a) Construire une détermination continue de l'argument dans \mathbb{C} privé de l'union de $[0, 1]$ et du support du chemin paramétré $\Gamma : t \in [0, \infty[\mapsto f(t)e^{it}$, où f est un homéomorphisme croissant entre $[0, +\infty[$ et $[1, +\infty[$.

b) Même question, mais cette fois dans \mathbb{C} privé de l'adhérence de l'ensemble $\{f(t)e^{it}; t \in \mathbb{R}\}$, où f est un homéomorphisme entre \mathbb{R} dans $]0, \infty[$ (par exemple $f(t) = \exp t$).

EXERCICE 1.47 (calcul d'indice : algébriquement, puis visuellement). Soit l'arc paramétré

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1 + t(1 - t))e^{4i\pi t}.$$

Vérifier qu'il s'agit d'un lacet de \mathbb{C}^* . Calculer $\operatorname{Ind}(\gamma, 0)$, dans un premier temps par le calcul algébrique explicite d'une certaine intégrale curviligne. Représenter ensuite géométriquement γ et retrouver ce résultat.

EXERCICE 1.48 (variation de l'argument et comptage de zéros).

Soit $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs et $P(X) := a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. En considérant, si $P(z) = 0$, la ligne polygonale fermée de sommets $0, a_0, a_0 + a_1 z, \dots, a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}, 0$, montrer que les zéros de P sont tous dans le disque unité ouvert $D(0, 1)$. Calculer la variation totale de l'argument le long du lacet $\Gamma : t \in [0, 1] \mapsto P(e^{2i\pi t})$. En déduire que l'équation

$$a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = 0$$

a exactement $2n$ solutions distinctes θ dans $]0, 2\pi[$ (utiliser un dessin et compter le nombre de fois au moins où le support de Γ doit couper l'axe des ordonnées).

EXERCICE 1.49 (toute application continue injective est ouverte).

a) Soit f une application continue injective de $\overline{D(0, 1)}$ dans \mathbb{C} . Pour tout $s \in [0, 1]$, on considère le lacet

$$t \in [0, 1] \mapsto f\left(\frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\right) - f\left(-s \frac{e^{2i\pi t}}{1+s}\right).$$

Montrer que tous les γ_s , $s \in [0, 1]$, sont des lacets continus de support dans \mathbb{C}^* et que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans l'homotopie entre lacets libres dans \mathbb{C}^* . En déduire, en utilisant la Proposition 1.12, que $\text{Ind}(\gamma_0, 0) = \text{Ind}(\gamma_1, 0)$.

b) Pourquoi existe-t-il une fonction continue $c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que l'on ait $\gamma_1(t) = \exp(c_1(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$? Vérifier qu'il existe deux entiers k_1 et l_1 tels que

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1/2], \quad c_1(t + 1/2) - c_1(t) &= (2k_1 + 1)i\pi \\ \forall t \in [1/2, 1], \quad c_1(t - 1/2) - c_1(t) &= (2l_1 + 1)i\pi. \end{aligned}$$

(utiliser le fait que l'on a à la fois $\gamma_1(t + 1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0, 1/2]$ et $\gamma_1(t - 1/2) = -\gamma_1(t)$ pour tout $t \in [1/2, 1]$).

c) En vérifiant, pour tout $t \in [0, 1/2]$, que

$$c_1(t + 1/2) = c_1(t + 1/2) + 2(k_1 + l_1 + 1)i\pi,$$

montrer que $k_1 \neq l_1$, puis que $\text{Ind}(\gamma_1, 0) = k_1 - l_1 \neq 0$. Déduire du **a)** que l'on a nécessairement $\text{Ind}(\gamma_0, 0) \neq 0$.

d) On suppose que $f(0)$ est un point frontière de $f(\overline{D(0, 1)})$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_n$ de nombres complexes tendant vers $f(0)$ et tels que le lacet $\Gamma_n : t \in [0, 1] \mapsto f(e^{it}) - w_n$ ait son support dans \mathbb{C}^* et soit d'indice nul par rapport à l'origine (utiliser, après l'avoir justifié, le fait qu'une fonction continue ne s'annulant pas dans $\overline{D(0, 1)}$ s'écrit comme l'exponentielle d'une fonction continue dans $\overline{D(0, 1)}$, voir l'exercice 1.32).

e) Montrer (en utilisant le théorème de Rouché 1.6) que $\text{Ind}(\Gamma_n, 0) = \deg \gamma_0$ pour n assez grand et conclure à une contradiction.

f) Montrer que si U est un ouvert de \mathbb{C} et si f est une application injective continue de U dans \mathbb{C} , $f(U)$ est un ouvert.

EXERCICE 1.50. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{Q}(X)$ et γ un lacet continu de \mathbb{C} dont le support évite tous les pôles de R dans \mathbb{C} . Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R(z) dz$$

est un nombre complexe algébrique (on pensera à utiliser la décomposition en éléments simples de R dans $\mathbb{C}(X)$).

Holomorphie et analyticité

2.1. Fonctions holomorphes : plusieurs points de vue

2.1.1. Différentiabilité au sens complexe. Le mot « *holomorphe* » a été inventé (dans un de leurs travaux consacrés à l'étude des équations différentielles et des feuilletages, précisément « holomorphes ») par les mathématiciens français Jean-Claude Briot (1819-1885) et Charles Bouquet (1817-1882). Le qualificatif remplace celui de « *fonction synectique* » (qui « comprend en soi ») que proposait auparavant Cauchy. La juxtaposition des préfixes grecs *holo* (« entier ») et *morphos* (« forme ») traduit (sous diverses formes : algébrique avec la notion de « série entière », géométrique avec la notion de « conformité », etc.) une notion de *rigidité* : « la forme reste entière ».

C'est sous l'angle géométrique que l'on va voir surgir dans un premier temps la rigidité qui accompagne la notion de *fonction holomorphe*.

DÉFINITION 2.1 (fonction holomorphe). Une *fonction holomorphe* dans un ouvert U du plan complexe est une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, différentiable (au sens réel) comme application définie dans l'ouvert U (vu cette fois comme un ouvert de \mathbb{R}^2) et à valeurs dans \mathbb{R}^2 ($f = P + iQ$, où $P := \operatorname{Re} f$ et $Q := \operatorname{Im} f$, étant assimilée à $f = (P, Q)$), et dont la différentielle df en tout point est une *similitude directe*, c'est-à-dire, en utilisant la notation complexe :

$$(2.1) \quad \forall z \in U, \quad \exists a(z) \in \mathbb{C} \text{ tel que } \forall h \text{ voisin de } 0 \text{ dans } \mathbb{C}, \\ df(z)(h_1 + ih_2) = a(z) \times (h_1 + ih_2).$$

Ou encore, avec les notations de Landau :

$$(2.2) \quad \forall z \in U, \exists a(z) \in \mathbb{C}, \quad f(z+h) = f(z) + a(z)h + o(|h|) \text{ au voisinage de } z.$$

Ou enfin, si on ne souhaite pas expliciter la valeur de $a(z)$,

$$(2.3) \quad \forall z \in U, \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}^*}} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) \text{ existe.}$$

Le nombre $a(z)$ dans (2.1) ou (2.2) (c'est-à-dire la valeur de la limite dans (2.3)) est appelé alors *nombre dérivé au sens complexe* au point z et noté $f'(z)$. La fonction $z \in U \mapsto f'(z)$ est appelée *fonction dérivée au sens complexe* de la fonction holomorphe f dans l'ouvert U .

REMARQUE 2.1 (rigidité géométrique). On rappelle que les similitudes directes $h \mapsto a(z)h$ (pensées comme applications \mathbb{R} -linéaires du plan dans lui-même) sont les seules applications \mathbb{R} -linéaires du plan dans lui-même qui préservent les angles orientés, donc essentiellement la forme des figures (évidemment seulement si $a(z) \neq 0$). On trouve là matière à une première justification au qualificatif « holomorphe » :

au niveau infinitésimal, au voisinage d'un point où le nombre dérivé $f'(z)$ n'est pas nul, une application holomorphe U préserve la *forme* des figures (car préserve les angles orientés de ces figures). Ce n'est pas un hasard si le *principe de moindre action*¹, au siècle des Lumières, présida à la genèse de ce concept d'holomorphie.

REMARQUE 2.2. La somme, le produit, l'inverse d'une fonction ne s'annulant pas, sont holomorphes si les fonctions impliquées le sont. Il en est de même de la composée de fonctions holomorphes (car la composée de deux similitudes directes est une similitude directe).

2.1.2. Le théorème de Cauchy-Goursat. Une fonction f holomorphe dans un ouvert U est continue (en vertu de (2.2)) ; elle est en effet différentiable, considérée comme application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On constate d'ailleurs que ses dérivées partielles au point courant z satisfont l'équation de Cauchy-Riemann :

$$(2.4) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x+iy) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Si $f = P+iQ$, où P et Q désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f , on observe que l'équation de Cauchy-Riemann (2.4) se « dédouble » en le système de Cauchy-Riemann :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{aligned} \quad \forall (x, y) \in U.$$

La forme générale d'une matrice de similitude directe de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 (composée d'une rotation et d'une homothétie) est en effet

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad (u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2.$$

C'est grâce au joli *théorème de Cauchy-Goursat*² ci-dessous, couplé avec la Proposition 1.4 (les preuves de ces deux résultats sont, on le verra, très voisines), que nous serons en mesure de prouver (dans la sous-section 2.1.3 à venir) qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe dans un ouvert U est automatiquement de classe C^1 (considérée comme une application définie sur un ouvert U du plan, à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$).

THEORÈME 2.1 (théorème de Cauchy-Goursat). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} . On a*

$$(2.6) \quad \int_{\partial T_+} f(z) dz = 0 \quad \forall T \subset U,$$

1. Ainsi le formula en 1744 le mathématicien, philosophe et astronome malouin Pierre-Louis de Maupertuis, 1698-1759 : « *l'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible* ».

2. Analyste français, Édouard Goursat (1858-1936) fut celui qui remarqua que la régularité C^1 de f n'était pas indispensable (alors que Cauchy l'utilisait) pour prouver le Théorème 2.1 ci-dessous. C'est lui aussi qui baptisa (dans ses cours à la fin du XIX-ième siècle) la « règle de l'Hôpital » en mémoire du marquis de l'Hôpital (1661-1704).

T désignant ici un triangle fermé plein. L'assertion (2.6) équivaut à dire (d'après la Proposition 1.4) que la 1-forme continue $f(z) dz$ (qui est appelée alors, en l'honneur d'Abel, forme abélienne) est localement exacte dans U .

DÉMONSTRATION. La preuve du théorème est calquée sur celle (par l'absurde) de l'assertion réciproque dans la Proposition 1.4. Prenons donc un triangle plein $T = T_0$ inclus dans U et supposons

$$(2.7) \quad \left| \int_{\partial T_+} f(z) dz \right| = \eta > 0.$$

On construit la suite de triangles emboîtés $(T_k)_{k \geq 0}$ comme dans la preuve de la Proposition 1.4. On observe que le périmètre et le diamètre de T_k tendent vers 0 en $O(2^{-k})$ (car on introduit à l'étape k un découpage utilisant les milieux des côtés du triangle T_{k-1}). D'autre part, on sait que

$$\left| \int_{(\partial T_k)_+} f(z) dz \right| \geq \frac{\eta}{4^k} \quad \forall k \geq 0.$$

L'intersection des triangles pleins emboîtés T_k , $k \geq 0$, est non vide et se réduit à un singleton $\{z_0\}$, comme on l'a vu dans la preuve de l'assertion réciproque de la Proposition 1.4. Dans un voisinage V de z_0 , la fonction holomorphe f vérifie dans V , d'après (2.2),

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| = o(|z - z_0|).$$

Pour k assez grand (tel que $T_k \subset V$), on constate que

$$\int_{(\partial T_k)_+} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)) dz = 0$$

en appliquant la formule de Stokes (Proposition 1.5). On constate donc que

$$(2.8) \quad \left| \int_{(\partial T_k)_+} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| = \left| \int_{(\partial T_k)_+} f(z) dz \right| \geq \frac{\eta}{4^k}.$$

Or on a également

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{(\partial T_k)_+} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \\ & \leq \text{périmètre}(T_k) \times \sup_{z \in T_k} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \\ & \leq O(2^{-k}) \times o(2^{-k}) = o(4^{-k}). \end{aligned}$$

L'hypothèse (2.7) conduit ainsi à une contradiction entre la minoration (2.8) d'un côté et la majoration (2.9) de l'autre. Le Théorème 2.1 est bien prouvé par l'absurde. \square

2.1.3. L'opérateur de Cauchy-Riemann. L'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\bar{z}$ possède une très importante propriété, dite d'*hypoellipticité*, dont la première assertion dans la Proposition 2.1 ci-dessous n'est (dans notre contexte) qu'un avatar³ :

3. Ce n'est que dans le cadre de la théorie des distributions, qui interviendra en aval dans le cursus de Master, que cette propriété prend tout son sens.

PROPOSITION 2.1 (régularité des solutions de l'équation de Cauchy-Riemann et formules de Cauchy pour un disque). *Si $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1 dans un ouvert U du plan, telle que $(\partial/\partial\bar{z})(F) \equiv 0$ dans U , la fonction F est une fonction C^∞ dans U . De plus, pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, on a la formule de Cauchy*

$$(2.10) \quad |z - z_0| < r \implies F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

où $\gamma_{z_0, r}$ désigne le chemin paramétré C^1 défini par

$$\gamma_{z_0, r}(t) = z_0 + re^{2i\pi t} \quad \forall t \in [0, 1],$$

correspondant au bord du disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$, parcouru une fois dans le sens trigonométrique. On a de plus les formules de Cauchy pour les dérivées complexes :

$$(2.11) \quad |z - z_0| < r \implies \frac{\partial^p F}{\partial z^p}(z) = \frac{p!}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que l'on ait la formule de Cauchy (2.10) résulte de l'application de la formule de Cauchy-Pompeiu (1.59) (Proposition 1.6), appliquée ici avec F en place de f et $K = \overline{D}(z_0, r)$. L'intégrale double disparaît car F vérifie $(\partial/\partial\bar{z})(F) \equiv 0$ au voisinage de K . Le fait que F soit de classe C^∞ dans U , ainsi que le fait que l'on ait les formules de Cauchy pour les dérivées complexes (2.11), résulte de l'application du théorème de différentiation des intégrales fonctions d'un paramètre (Théorème 3.3 dans [Yint] par exemple). On remarque en effet que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 F(z_0 + re^{2i\pi t}) \frac{re^{2i\pi t}}{z_0 + re^{2i\pi t} - x - iy} dt$$

et que, pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $z = x + iy$ tel que $|z - z_0| < r$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p} \left[\frac{1}{z_0 + re^{2i\pi t} - x - iy} \right] (z) = \frac{p!}{(z_0 + re^{2i\pi t} - x - iy)^{p+1}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) &= \frac{\partial^p}{\partial z^p} \left(\int_0^1 F(z_0 + re^{2i\pi t}) \frac{re^{2i\pi t}}{z_0 + re^{2i\pi t} - x - iy} dt \right) \\ &= p! \int_0^1 F(z_0 + re^{2i\pi t}) \frac{re^{2i\pi t}}{(z_0 + re^{2i\pi t} - x - iy)^{p+1}} dt \\ &= \frac{p!}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

□

On déduit de cette proposition le théorème suivant :

THEORÈME 2.2. *Dire que f est une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} équivaut à dire que f est une fonction C^∞ de U dans \mathbb{C} , solution de l'équation de Cauchy-Riemann (2.4) $(\partial/\partial\bar{z})(f) \equiv 0$ dans U , ou bien, si l'on préfère écrire $f = P + iQ$, avec P et Q fonctions de U dans \mathbb{R} , que P et Q sont C^∞ et solutions du système de Cauchy-Riemann (2.5) dans U .*

DÉMONSTRATION. La seule chose à prouver est qu'une fonction f holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} est nécessairement de classe C^∞ dans cet ouvert. La suite résultera de la Proposition 2.1. Si f est holomorphe dans U , il résulte du Théorème de Cauchy-Goursat (Théorème 2.1), combiné avec la Proposition 1.4, que la forme continue $f(z) dz$ est localement exacte dans U . La fonction f s'écrit donc localement, au voisinage de tout point z_0 de U , sous la forme $\partial F_{z_0}/\partial z$, où F_{z_0} est une fonction de classe C^1 au voisinage de z_0 , solution au voisinage de ce point de l'équation de Cauchy-Riemann (puisque $dF_{z_0} = f(z) dz$), donc C^∞ d'après la Proposition 2.1. La fonction $f = \partial F_{z_0}/\partial z$ est donc C^∞ au voisinage de z_0 . \square

COROLLAIRE 2.1 (dérivées d'une fonction holomorphe). *Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} , la fonction $\partial f/\partial z$ (coincidant avec la fonction dérivée au sens complexe f') est aussi holomorphe. C'est le cas de toutes les dérivées au sens complexes successives, que l'on note $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$.*

2.1.4. Le théorème de Morera. Le Théorème de Cauchy-Goursat (Théorème 2.1) suggère que l'on puisse caractériser le fait qu'une fonction continue soit holomorphe sans chercher à tester au delà du cran 0 (continuité) sa régularité. Le résultat le plus utile dans ce sens est une relecture de la Proposition 1.4 à la lumière des résultats établis dans la Proposition 2.1. C'est le théorème de Morera⁴ :

THEORÈME 2.3 (théorème de Morera). *Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue dans un ouvert U de \mathbb{C} est holomorphe dans U si et seulement si*

$$(2.12) \quad \int_{\partial T_+} f(z) dz = 0 \quad \forall T \subset U,$$

T désignant ici un triangle fermé plein.

DÉMONSTRATION. Si f est holomorphe dans l'ouvert U , on sait déjà d'après le théorème de Cauchy-Goursat (Théorème 2.1) que la 1-forme (dite alors *abélienne*) $f(z) dz$ vérifie la condition (2.12).

Il reste donc à prouver la réciproque. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que la condition (2.12) soit remplie. On sait d'après la Proposition 1.4 que la 1-forme différentielle continue $f(z) dz = f(z) dz + 0 d\bar{z}$ est localement exacte. Au voisinage d'un point quelconque $z_0 \in U$, elle admet donc une primitive F_{z_0} . Cette primitive est (par définition) une fonction de classe C^1 dans un voisinage $V(z_0)$, telle que

$$\frac{\partial F_{z_0}}{\partial z}(z) = f(z), \quad \frac{\partial F_{z_0}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \forall z \in V(z_0).$$

D'après la Proposition 2.1, la fonction F_{z_0} est de classe C^∞ dans $V(z_0)$. Il en est de même de $f = \partial F_{z_0}/\partial z$ dans $V(z_0)$. D'autre part, il résulte du lemme de Schwarz sur les dérivées croisées que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\partial F_{z_0}}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F_{z_0}}{\partial \bar{z}} \right] = 0 \quad \forall z \in V(z_0).$$

D'après le Théorème 2.2, la fonction f est holomorphe dans $V(z_0)$. Comme z_0 est arbitraire dans U , f est bien holomorphe dans U . \square

4. Giacinto Morera (1856-1907), mathématicien italien, s'est intéressé à des questions de dynamique et d'analyse complexe (ses motivations étant souvent liées à des questions de mécanique ou d'élasticité). Il établit ce résultat en 1886.

REMARQUE 2.3. On connaît aujourd'hui, grâce à la théorie des distributions⁵, des versions plein plus faibles (et de fait bien plus étonnantes!) du théorème de Morera. Par exemple, un résultat récent de C.A. Berenstein et R. Gay (Journal d'Analyse Mathématique 52, 1989) assure que, si U est une union de disques ouverts de rayon au moins $r > 0$, et si T est un triangle plein du plan dont le cercle circonscrit est de rayon strictement inférieur⁶ à $r/2$, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe est que

$$\int_{(\partial[\rho(T)])_+} f(z) dz = 0$$

pour tout déplacement ρ de \mathbb{R}^2 tel que $\rho(T) \subset U$. Ainsi, un seul triangle plein T , supposé assez « petit », auquel on fait subir tous les déplacements possibles (pourvu qu'il reste assujéti à demeurer inclus dans l'ouvert U), suffit pour que le test de Morera soit concluant. Par curiosité à propos de telles questions (concernant tant les fonctions holomorphes que les fonctions harmoniques), on pourra consulter le joli « survey » de Lawrence Zalcman [Zalc].

Nous allons donner ici deux applications du théorème de Morera.

La première est très importante. Elle concerne l'étude des *intégrales fonctions d'un paramètre complexe*. Il faut noter que nombre de transformées intervenant dans les sciences de l'ingénieur (transformée de Laplace, de Fourier, de Mellin, etc.) ou en probabilités (fonctions génératrices) sont précisément des fonctions de ce type. Dans le sillage du cours d'intégration de Licence 3 (MHT 512 [Yint]), on peut énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2 (holomorphie des intégrales fonctions d'un paramètre complexe). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et U un ouvert de \mathbb{C} . Soit $(f_z)_{z \in U}$ une collection de fonctions de Ω dans \mathbb{C} , toutes $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -mesurables, $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ désignant ici la tribu borélienne sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. On suppose les deux choses suivantes.*

- (1) *Pour tout $\omega \in \Omega$ (hormis éventuellement les points d'un sous-ensemble $E \subset \Omega$ tel que $\mu(E) = 0$), la fonction $z \mapsto f_z(\omega)$ est holomorphe dans U .*
- (2) *Pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage $V(z_0)$ de z_0 dans U et une fonction positive $g_{z_0} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que*

$$(2.13) \quad \forall \omega \in \Omega, \forall z \in V(z_0), \quad |f_z(\omega)| \leq g_{z_0}(\omega).$$

Alors la fonction

$$(2.14) \quad F : z \in U \mapsto \int_{\Omega} f_z(\omega) d\mu(\omega)$$

est holomorphe dans U .

5. Ceci sort ici du cadre de ce cours, parce que la théorie des distributions (en particulier le théorème de Paley-Wiener) est en jeu.

6. On peut supposer que $U = D(0, 1)$ pour voir (avec un dessin) que la condition $r < 1/2$ est alors indispensable pour avoir la propriété souhaitée (sinon, le triangle « rigide » T n'aurait pas assez de champ pour bouger dans $D(0, 1)$ et il serait impossible de tester avec simplement les déplacements de T ce qui se passe au voisinage de l'origine).

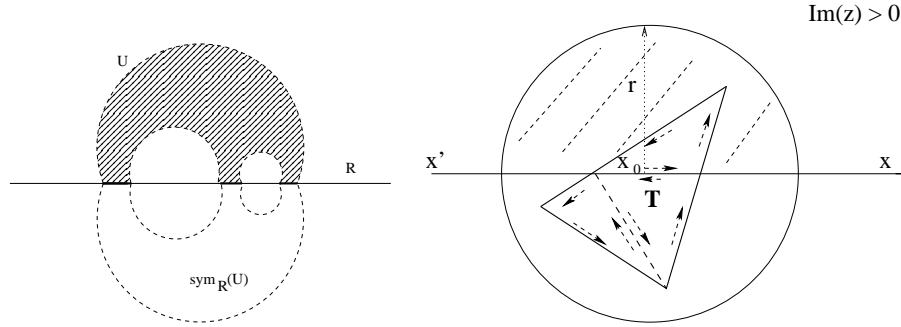


FIGURE 2.1. Principe de réflexion de Schwarz

DÉMONSTRATION. Nous supposons ici la mesure μ σ -finie pour donner une preuve de ce résultat s'articulant sur le théorème de Morera⁷. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre (cf. le Théorème 3.1 dans [Yint]) assure que, sous les hypothèses faites ici, la fonction (2.14) est bien définie et continue dans U . Pour vérifier qu'elle est holomorphe, il suffit (d'après le Théorème de Morera 2.3) de vérifier que, pour tout triangle fermé plein inclus dans U , on a

$$\int_{(\partial T)_+} F(z) dz = \int_{(\partial T)_+} \left(\int_{\Omega} f_z(\omega) d\mu(\omega) \right) dz = 0.$$

Or, par compacité de ∂T (on peut recouvrir ce compact par un nombre fini de $V(z_0)$ impliqués dans une clause de domination du type (2.13)), il existe une fonction mesurable positive $g_{\partial T} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \forall z \in \partial T, |f_z(\omega)| \leq g_{\partial T}(\omega).$$

La clause d'application du théorème de Fubini (cf. le Théorème 3.8 dans [Yint]) est donc remplie et l'on peut affirmer

$$\int_{(\partial T)_+} \left(\int_{\Omega} f_z(\omega) d\mu(\omega) \right) dz = \int_{\Omega} \left(\int_{(\partial T)_+} f_z(\omega) dz \right) d\mu(\omega) = 0$$

d'après le théorème de Morera (puisque chaque fonction $z \mapsto f_z(\omega)$ est supposée holomorphe dans U). La fonction F vient donc de passer avec succès le « test » de Morera et est par conséquent holomorphe dans U . \square

La seconde application est un principe de réflexion, dû à Herman Schwarz, dit *principe de réflexion de Schwarz* (on comprend immédiatement pourquoi en l'énonçant).

PROPOSITION 2.3 (principe de réflexion de Schwarz). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , entièrement situé dans le demi-plan $\{\text{Im } z > 0\}$, et dont la frontière contient un ouvert I de l'axe réel (voir la figure 2.1, figure de gauche). Soit $\text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$ l'ouvert obtenu en prenant le symétrique de U par rapport à l'axe réel (i.e. l'image de U*

7. Une autre preuve, basée sur le théorème de Weierstraß que l'on verra plus loin et le théorème de différentiabilité des intégrales fonctions de deux paramètres réels (cf. le Théorème 3.3 dans [Yint]), n'utiliserait pas la condition de σ -finitude. Voir le Corollaire 2.6 plus loin (sous-section 2.3.2).

par la conjugaison complexe). Soit f une fonction holomorphe dans U et continue sur $U \cup I$, avec $f(I) \subset \mathbb{R}$. La fonction \tilde{f} définie par

$$(2.15) \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U \cup I \\ f(z) = \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \text{sym}_{\mathbb{R}}(U) \end{cases}$$

réalise un prolongement holomorphe de f à $U \cup I \cup \text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$.

REMARQUE 2.4. On peut évidemment transformer le problème par déplacement (rotation plus translation) à la source et au but. Soit U un ouvert de \mathbb{C} entièrement situé dans l'un des deux demi-plans ouverts limités par une droite L du plan, tel que la frontière de U contienne un ouvert I de cette droite L . Soit f une fonction holomorphe dans U , se prolongeant en une fonction continue dans $U \cup I$, avec $f(I) \subset L'$, où L' désigne une autre droite du plan. Alors la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe « au travers de I », plus précisément à l'ouvert $U \cup I \cup \text{sym}_L(U)$. Il suffit pour cela de poser, pour tout $z \in \text{sym}_L(U)$, $\tilde{f}(z) = \text{sym}_{L'}[f(\text{sym}_L(z))]$. Il est également possible de remplacer L ou L' par des cercles (et non plus des droites), la symétrie par rapport à un cercle étant cette fois comprise comme l'*inversion* géométrique⁸ par rapport à ce cercle (voir l'exercice 2.12).

DÉMONSTRATION. La fonction \tilde{f} définie dans $U \cup I \cup \text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$ y est continue puisque f est supposée continue sur $U \cup I$ et que la conjugaison complexe est continue. La fonction f est holomorphe dans U , donc de classe C^1 dans U et solution de l'équation de Cauchy-Riemann. Puisque la conjugaison complexe est un difféomorphisme C^∞ de \mathbb{C} , la fonction \tilde{f} est aussi C^1 dans $\text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$. La fonction $z \in \text{sym}_{\mathbb{R}}(U) \mapsto \tilde{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$ vérifie $\partial \tilde{f} / \partial z \equiv 0$ dans $\text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$ puisque f vérifie l'équation de Cauchy-Riemann $\partial f / \partial \bar{z}$ dans U . La fonction $\tilde{f} = \overline{\tilde{f}}$ vérifie donc (par conjugaison complexe) l'équation de Cauchy-Riemann dans $\text{sym}_{\mathbb{R}}(U)$ et est donc holomorphe dans cet ouvert. Il reste à prouver l'holomorphie de \tilde{f} au voisinage d'un point quelconque x_0 de I , et nous pouvons pour cela nous ramener à supposer que $U = D(x_0, r) \cap \{\text{Im } z > 0\}$ et $I =]x_0 - r, x_0 + r[$ pour un certain $r > 0$ (figure 2.1, figure de droite).

Nous allons, dans cette situation, faire passer, à la 1-forme continue $\tilde{f}(z)dz$ dans le disque $D(x_0, r)$, le test de Morera. Le seul cas éventuellement litigieux est celui d'un triangle plein T inclus dans $D(x_0, r)$ et dont l'intérieur intersecte le segment $]x_0 - r, x_0 + r[$; dans tous les autres cas en effet, on a bien $\int_{(\partial T)_+} \tilde{f}(z) dz = 0$ puisque \tilde{f} est continue dans $D(x_0, r)$ et holomorphe dans $D(x_0, r) \setminus]x_0 - r, x_0 + r[$. On découpe le triangle T en trois triangles pleins, comme sur la figure de droite dans la figure 2.1. Chacun des trois triangles est inclus dans l'un des deux demi-disques fermés ($\text{Im } z \geq 0$ ou $\text{Im } z \leq 0$). L'intégrale curviligne de $\tilde{f}(z)dz$ sur le bord orienté de chacun de ces trois triangles est nulle car f est continue (on perturbe le triangle concerné en l'approchant par des triangles tous dans l'un des deux demi-disques ouverts $D(x_0, r) \cap \{\text{Im } z > 0\}$ ou $D(x_0, r) \cap \{\text{Im } z < 0\}$). Comme $\int_{(\partial T)_+} \tilde{f}(z) dz$ est la somme des trois intégrales curvilignes sur les bords des trois triangles de la subdivision, on a bien $\int_{(\partial T)_+} \tilde{f}(z) dz = 0$ et la forme $\tilde{f}(z) dz$ satisfait positivement au test de Morera. La fonction continue \tilde{f} est donc holomorphe dans $D(x_0, r)$. \square

8. C'est-à-dire $z \mapsto 1/\bar{z}$ lorsque le cercle est le cercle unité de centre 0 et de rayon 1. L'origine est transformée en le point à l'infini, c'est-à-dire le pôle nord sur la sphère de Riemann.

2.1.5. Exercices.

EXERCICE 2.1 (équation de Cauchy-Riemann). Soient f_1, \dots, f_m m fonctions holomorphes dans un ouvert connexe U de \mathbb{C} , telles que $\sum_{j=1}^m |f_j|^2$ soit une fonction constante dans U . Montrer qu'alors toutes les fonctions $f_j, j = 1, \dots, m$, le sont aussi.

EXERCICE 2.2 (formule de Cauchy). Calculer les intégrales curvilignes

$$\int_{|\zeta+i|=3} \sin \zeta \frac{d\zeta}{\zeta+i}, \int_{|\zeta|=4} \frac{\cos \zeta}{\zeta^2 - \pi^2}, \int_{|\zeta|=2} \frac{d\zeta}{(\zeta-1)^n(\zeta-3)},$$

les chemins d'intégration mentionnés étant parcourus une seule fois dans le sens trigonométrique.

EXERCICE 2.3 (formule de Cauchy; une idée de Carleman⁹ : celle de « *quenching function* »). Soit f une fonction à valeurs complexes définie et continue dans la couronne fermée $\overline{C_{r,R}} := \{r \leq |z| \leq R\}$ du plan complexe (où $r < R$ sont deux nombres strictement positifs), holomorphe dans la couronne ouverte correspondante $C_{r,R} := \{r < |z| < R\}$. On note respectivement γ_r et γ_R les lacets $t \in [0, 1] \mapsto re^{2i\pi t}$ et $t \in [0, 1] \mapsto Re^{2i\pi t}$. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)} d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)} d\zeta \right) \quad \forall z \in C_{r,R}.$$

En déduire, pour tout $z \in C_{r,R}$, les « formules de représentation approchées » :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_R} \frac{\zeta^n f(\zeta)}{z^n(\zeta-z)} d\zeta \right) = -\frac{1}{2i\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_r} \frac{z^n f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)} d\zeta \right).$$

EXERCICE 2.4 (formule de Cauchy). Soit $I = [ia, ib]$ un intervalle fermé de l'axe imaginaire du plan complexe (avec $a < b$) et f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de I . Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus I$, on pose

$$\Phi(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

- a) Montrer que la fonction Φ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus I$.
 b) Montrer que, pour tout $z_0 = iy_0$ dans $]ia, ib[$, les deux limites

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Re} z < 0}} \Phi(z) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \operatorname{Re} z > 0}} \Phi(z).$$

existent et que leur différence est égale à $f(z_0)$.

EXERCICE 2.5 (formule de Cauchy). Soit g une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$, avec $g = P + iQ$ (P et Q à valeurs réelles) dans ce disque; montrer que, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(Re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iQ(0) \\ &= g(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta}) \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta. \end{aligned}$$

9. On doit l'idée sous-jacente à cet exercice au mathématicien suédois Torsten Carleman (1892-1949); les fonctions puissances jouent ici le rôle de « *quenching functions* » au sens de sa définition. L'idée de Carleman est exploitée en mathématiques appliquées dans les questions d'interpolation.

EXERCICE 2.6 (fonction Gamma). Montrer que la fonction

$$z \mapsto \Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est une fonction définie et holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$ et qu'elle y vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Montrer que cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout entier positif n .

EXERCICE 2.7 (fonction zéta de Riemann).

a) Vérifier que l'on définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 1$ en posant

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}.$$

b) Vérifier, si $(p_n)_{n \geq 1}$ désigne la suite des nombres premiers $(2, 3, 5, 7, \dots)$, que l'on a la *formule d'Euler*

$$\zeta(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-z}}, \quad \forall z \in \operatorname{Re} z > 1.$$

EXERCICE 2.8 (une relation entre Γ et ζ).

a) En utilisant le théorème de convergence dominée et le développement

$$\frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \quad \forall t \in]0, \infty[,$$

démontrer, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > 1$, l'identité

$$\Gamma(z) \times \zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \in [1, \infty[\mapsto t^{z-1}/(e^t - 1)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[1, \infty[$, puis que la fonction

$$E : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} .

EXERCICE 2.9 (transformée de Laplace). Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R} , de support limité à gauche, et telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, avec

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{-At} dt < \infty.$$

Montrer que la fonction

$$F : p \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-pt} dt$$

est bien définie et holomorphe dans le demi-plan $\{p \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} p > A\}$.

EXERCICE 2.10 (transformée de Mellin¹⁰). Si f est une fonction localement intégrable sur $]0, \infty[$, telle que, pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$, $|f(t)| = O(t^\gamma)$ au voisinage de $t = 0$ et que $f(t) = o(1/t^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ au voisinage de l'infini, montrer que la fonction

$$\lambda \mapsto \int_0^\infty t^\lambda f(t) dt$$

est bien une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda > -\gamma - 1\}$. Quelle est la transformée de Mellin de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ (on se reportera à l'exercice 2.6) ?

EXERCICE 2.11 (fonction génératrice d'une variable aléatoire). Si P est une mesure de probabilité sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{T}) et X une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{T}) telle qu'il existe $\eta > 0$ avec

$$\int_\Omega e^{\eta|X(\omega)|} dP(\omega) < +\infty,$$

montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_\Omega e^{izX(\omega)} dP(\omega) = \text{Espérance de } e^{izX},$$

est une fonction holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| < \eta\}$.

EXERCICE 2.12 (réflexion par rapport à des arcs de cercle). Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, à valeurs dans le demi-plan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, se prolongeant par continuité à un arc de cercle $]A, B[$ de la frontière de ce disque, avec $f(]A, B[) \subset \mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe à l'union du disque ouvert $D(0, 1)$ et du secteur angulaire ouvert d'ouverture $]A, B[$.

EXERCICE 2.13. Soit f une fonction continue de $[0, 1]^2$ dans le disque fermé $\overline{D(0, 1)}$, holomorphe dans $]0, 1[$. On suppose f bijective entre $[0, 1]^2$ et $\overline{D(0, 1)}$.

- a) Montrer que, si Γ désigne le lacet correspondant au bord de $[0, 1]^2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, un paramétrage de $f \circ \Gamma$ est $t \mapsto e^{2i\pi t}$.
- b) Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier.

2.2. Formules de Cauchy et analyticité

Puisque les fonctions holomorphes f dans un ouvert de \mathbb{C} sont les fonctions de classe C^1 (même en fait C^∞) dans cet ouvert vérifiant l'équation de Cauchy-Riemann (2.4) (ou le système de Cauchy-Riemann (2.5) si l'on pense à l'expression de f sous la forme $P + iQ$, avec P et Q à valeurs réelles), on déduit de la formule de Cauchy-Pompeiu (1.59) (Proposition 1.6) la possibilité de représenter les fonctions holomorphes à l'intérieur des ouverts relativement compacts (*i.e.* bornés) de \mathbb{C} dont l'adhérence est un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3. C'est la *version analytique des formules de représentation de Cauchy* (pour les dérivées).

10. C'est le mathématicien finlandais Robert Hjalmar Mellin (1854-1933) qui introduisit cette transformation et l'étudia, en vue notamment de ses relations étroites avec la fonction ζ de Riemann dont on connaît (au travers de la formule d'Euler) le lien avec le théorème fondamental de l'arithmétique. La transformée de Mellin est devenue aujourd'hui aussi un outil des mathématiques appliquées et des sciences de l'ingénieur (traitement d'image, robotique). Elle est aussi très utilisée en théorie analytique des nombres (plus encore que la transformation de Laplace).

THEORÈME 2.4 (formules de représentation de Cauchy, version analytique¹¹). Soit U un ouvert relativement compact de \mathbb{C} tel que $\bar{U} = K$ soit un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3 de Green-Riemann. Soit f une fonction holomorphe dans U et continue dans \bar{U} . On a

$$(2.16) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in U, \quad f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta,$$

où ∂K_+ désigne le bord orienté de K , comme dans ce même théorème 1.3 (sens trigonométrique pour le bord externe, sens des aiguilles d'une montre pour le bord interne).

2.2.1. La formule de la moyenne. Si $\overline{D(z_0, r)}$ est un disque fermé inclus dans un ouvert où est définie une fonction holomorphe f , la formule (2.16) devient (dans $D(z_0, r)$) la formule (2.10) (avec f en place de F). En particulier, on constate (en prenant $z = z_0$) que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

autrement dit la valeur de f au centre du disque de rayon r est aussi la moyenne des valeurs de f sur la frontière de ce disque. Si l'on note $d\sigma_r$ la mesure de longueur sur le cercle de centre 0 et de rayon r , on peut donc énoncer la *formule de la moyenne*.

PROPOSITION 2.4 (formule de la moyenne). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe de U dans \mathbb{C} . Pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ inclus dans U , on a

$$(2.17) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) d\sigma_r(\zeta) = \int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r}$$

Si f s'écrit $P + iQ$, avec P et Q à valeurs réelles, la formule de la moyenne (2.17) est aussi vérifiée par P et Q séparément puisqu'il s'agit d'une formule réelle (ce qui n'est pas le cas des formules de Cauchy (2.10) ou (2.16)).

La Proposition 2.4 est en fait un cas particulier (en l'occurrence $p = 0$) du résultat suivant (qui nous renvoie un instant à la théorie des séries de Fourier, cf. par exemple l'UE MHT 613, [Yfourier], chapitre 2).

PROPOSITION 2.5 (coefficients de Fourier). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe de U dans \mathbb{C} . Pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, r)}$ inclus dans U , on a

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta &= \frac{r^p f^{(p)}(z_0)}{p!} \quad \forall p \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta &= 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Pour ce qui concerne les formules (2.18) lorsque $p \in \mathbb{N}$, il suffit d'exprimer les formules de Cauchy pour les dérivées (2.11) au centre du disque ($z = z_0$). Pour $p < 0$, on remarque que la fonction $\zeta \mapsto (\zeta - z_0)^{-p-1} f(\zeta)$ est holomorphe au voisinage de $\overline{D(z_0, r)}$, donc que la 1-forme abélienne $(\zeta - z_0)^{-p-1} f(\zeta) d\zeta$

11. On en donnera une version topologique dans la sous-section 2.2.2 (Théorème 2.6).

est localement exacte au voisinage de ce disque fermé. Comme un disque ouvert est simplement connexe (car convexe), on a

$$\int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r e^{2i\pi t}} (\zeta - z_0)^{-p-1} f(\zeta) d\zeta = 0$$

d'après la Proposition 1.12. En paramétrant, on obtient les formules (2.18) pour $p < 0$. \square

REMARQUE 2.5. Voici une remarque subtile, qu'il convient de faire cependant. Il est important d'observer que, dans les formules (2.18) lorsque $p \in \mathbb{N}$, l'introduction de la division par $p!$ au second membre est susceptible d'introduire des difficultés si l'on en tête le souci (ultérieur) de raisonner d'un point de vue qui soit le plus algébrique possible (imaginons que l'on travaille en caractéristique strictement positive ...). De fait, c'est le membre de gauche de ces formules qui, une fois divisé par r^p , est un objet intéressant ; il convient de penser la division par $p!$ à droite comme une « fausse » division (compensée de fait par la multiplication par le numérateur $f^{(p)}(z_0)$).

2.2.2. Développement de Taylor d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point. Nous déduisons de la Proposition 2.5 le théorème suivant :

THEORÈME 2.5 (analyticité des fonctions holomorphes). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} . Pour tout $z_0 \in U$, les nombres $a_p(z_0)$, $p \in \mathbb{N}$, donnés par les relations*

$$(2.19) \quad f^{(p)}(z_0) = p! \times a_p(z_0) \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

sont tels que :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} & \text{Rayon de convergence} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0) X^k \right) \geq \text{distance}(z_0, \partial U) \in]0, \infty[\\ & \forall z \in D(z_0, \text{distance}(z_0, \partial U)), \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

De plus, le développement

$$(2.21) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

(qui est appelé développement en série de Taylor de f au voisinage de z_0) est l'unique développement possible de f en série de puissances de $(z - z_0)$ au voisinage de $z = z_0$. Les coefficients $a_k(z_0)$, $k \in \mathbb{N}$, sont dits coefficients de Taylor de f en z_0 .

DÉMONSTRATION. Si $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ et si $|z - z_0| < r$, on déduit de la formule de Cauchy (2.10) pour un disque que,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

L'interversion de limite de la ligne 2 à la ligne 3 est justifiée par le fait que la convergence de la série sous l'intégrale est uniforme sur le support de $\gamma_{z_0, r}$: en effet, si $|\zeta - z_0| = r$ et $z \in D(z_0, r)$, on a bien $|z - z_0|/|\zeta - z_0| = |z - z_0|/r < 1$ (indépendamment de ζ). Le lemme d'Abel pour les séries entières¹² implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0) X^k$ est au moins égal à la distance de z_0 au bord de U . L'unicité du développement de f en série de puissances de $z - z_0$ au voisinage de z_0 résulte enfin de l'unicité du développement en série de Fourier de la fonction C^∞

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto f(z_0 + \epsilon e^{i\theta}),$$

lorsque $\epsilon > 0$ est choisi assez petit. \square

EXEMPLE 2.1 (série génératrice des nombres de Bernoulli). Le Théorème 2.5 peut permettre de calculer des rayons de convergence dont l'approche serait inaccessible *via* les règles de Cauchy ou de d'Alembert. Par exemple, pour la série $\sum_{k \geq 0} B_k X^k$, où les nombres $(B_k)_{k \geq 0}$ sont obtenus en faisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $\sum_1^\infty X^{k-1}/k!$, le rayon de convergence vaut exactement 2π , puisque 2π est la distance de 0 au bord du domaine U dans lequel la fonction $z \mapsto z/(e^z - 1)$ est holomorphe : il est en effet minoré par 2π du fait du Théorème 2.5 et majoré par 2π car $\lim_{t \rightarrow 2\pi^-} |e^{it}|/|it - 2i\pi| = +\infty$. Les coefficients $(k!B_k)_{k \geq 0}$ constituent la liste des *nombres de Bernoulli*.

DÉFINITION 2.2 (fonctions analytiques). Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se développant en série de puissances de $z - z_0$ au voisinage de tout point $z_0 \in U$ est dite *analytique* dans U .

Le théorème 2.5 admet ainsi comme corollaire le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.2. *Soit U un ouvert du plan complexe. Une fonction f de U dans \mathbb{C} est holomorphe dans U si et seulement si elle est analytique dans cet ouvert.*

DÉMONSTRATION. Le théorème 2.5 montre que toute fonction holomorphe est analytique. Réciproquement, si une fonction f se développe au voisinage de tout point z_0 de U en

$$f(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{z_0, k} h^k,$$

12. Si une série entière $\sum_k a_k X^k$ converge en un point $X = w$, son rayon de convergence est au moins égal à $|w|$, cf. le cours d'Analyse 3, par exemple [Y0].

on voit en particulier que, pour h voisin de 0 dans \mathbb{C} (dépendant de z_0),

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + a_{z_0,1}h + o(|h|).$$

La fonction f satisfait donc (2.2); elle est donc holomorphe dans U . \square

Avec l'équivalence entre les deux notions d'holomorphie et d'analyticité, surgit une autre incarnation de la rigidité que reflétait l'éthymologie du mot « [holo]-[morphe] ». Il s'agit cette fois d'une rigidité algébrique. Localement, c'est le développement qui est un développement en série *entière*; on pense encore à « holo », mais en pensant cette fois à la « forme » des exposants : les puissances sont entières¹³. Pareille rigidité se traduit au niveau algébrique par le fait que la classe des fonctions holomorphes (*i.e.* celle des fonctions analytiques) se rapproche, au niveau des propriétés dont elle hérite, de celle des polynômes.

REMARQUE 2.6. Remarquons qu'il n'est pas évident de prouver que la composée de deux fonctions analytiques est analytiques. Il faut avoir recours à la *méthode des séries majorantes*, dont nous ne parlerons pas ici (voir par exemple [Charp], II.3). En revanche, il est facile de vérifier, on l'a vu, que la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe (voir la remarque 2.2 au début de ce chapitre). S'il est clair que des fonctions holomorphes telles les fonctions polynomiales de la variable z , l'exponentielle complexe, les fonctions trigonométriques complexes, les fonctions du type $z \mapsto \log(1+z)$ ou leurs avatars tels $z \mapsto \operatorname{artan}(z)$, plus généralement les fonctions dites de la *classe de Liouville*, sont naturellement exprimées sous la forme de fonctions analytiques (par un développement de Taylor immédiatement « visible »), il n'en va pas de même pour d'autres classes de fonctions holomorphes, telles par exemple celles qui sont exprimées comme des intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre (transformées de Fourier, Laplace ou Mellin, *cf.* les exercices 2.9, 2.10), ou celles qui se présentent données sous forme de série de Dirichlet (*cf.* l'exercice 2.31).

Voici (pour conclure cette sous-section) une version topologique des formules de représentation de Cauchy pour les dérivées. Ce résultat est le pendant topologique des formules de représentation analytiques (2.16) du Théorème 2.4.

THEORÈME 2.6 (formules de représentation de Cauchy, version topologique). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et γ un lacet continu de U homotope à un point dans l'homotopie \mathcal{H}_U entre lacets continus libres de U . Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U et $z \in U \setminus \operatorname{supp}(\gamma)$. On a, au point z , les formules de représentation :*

$$(2.22) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{p!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta,$$

ou bien encore, ce qui revient au même :

$$(2.23) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_p(z) \operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta.$$

DÉMONSTRATION. Au voisinage de z , on peut développer en série entière $f(\zeta)$ sous la forme

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) (\zeta - z)^k.$$

13. On appelle d'ailleurs « *fonction entière* » une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier.

Fixons $p \in \mathbb{N}$. La fonction

$$(2.24) \quad \zeta \in U \setminus \{z\} \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} - \sum_{k=0}^p a_k(z)(\zeta - z)^{k-p-1}$$

est holomorphe dans $U \setminus \{z\}$ et se prolonge au voisinage de z en la fonction holomorphe

$$\zeta \mapsto \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k(z)(\zeta - z)^{k-p-1}.$$

La fonction $f_{z,p}$, ainsi obtenue par prolongement de (2.24), est donc holomorphe dans U . La forme $f_{z,p}(\zeta) d\zeta$ est localement exacte dans U , et la Proposition 1.12 implique

$$\int_{\gamma} f_{z,p}(\zeta) d\zeta = 0,$$

puisque γ est homotope à un point dans l'homotopie \mathcal{H}_U entre lacets continus libres de U . Ceci se lit, compte-tenu de l'expression (2.24) de $f_{z,p}$,

$$(2.25) \quad \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta - \sum_{k=0}^p a_k(z) \int_{\gamma} (\zeta - z)^{k-p-1} d\zeta = 0.$$

Comme les formes $(\zeta - z)^{k-p-1} d\zeta$, pour $k \neq p$, sont exactes dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ (voir l'exemple 1.1), et que γ est un lacet, on a (Proposition 1.3)

$$\forall k = 0, \dots, p-1, \int_{\gamma} (\zeta - z)^{k-p-1} d\zeta = 0.$$

On déduit donc de (2.25) que

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta = a_p(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2i\pi a_p(z) \text{Ind}(\gamma, z).$$

On a donc bien les formules (2.23). Comme on sait aussi que $f^{(p)}(z) = p! a_p(z)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (formules (2.19)), les formules (2.22) en résultent. \square

2.2.3. Principes des zéros isolés, du prolongement analytique, et de l'application ouverte. La première conséquence importante du fait que la notion d'holomorphie soit équivalente à celle d'analyticité est le *principe des zéros isolés*.

THEOREME 2.7 (principe des zéros isolés). *Soit U un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. L'ensemble*

$$Z(f) := \{\alpha \in U; f(\alpha) = 0\}$$

n'a pas de point d'accumulation dans U , autrement dit les zéros de f dans U sont des points isolés.

DÉMONSTRATION. On raisonne par l'absurde. Soit α un point d'accumulation de $Z(f)$. On a $f(\alpha) = 0$ car f est continue. Au voisinage de $h = 0$, on peut développer $h \mapsto f(\alpha + h)$ en série entière

$$f(\alpha + h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha) h^k.$$

Les $a_k(\alpha)$, $k \in \mathbb{N}$, sont nécessairement tous nuls : si tel n'était pas le cas, on pourrait écrire, si k_{\min} désigne le plus petit entier strictement positif tel que $a_k(\alpha) \neq 0$, dans un disque ouvert $D(0, \epsilon_\alpha)$,

$$f(\alpha + h) = a_{k_{\min}}(\alpha) h^{k_{\min}} u_\alpha(h),$$

où u_α est une fonction holomorphe valant 1 en $h = 0$ et ne s'annulant pas dans $D(0, \epsilon_\alpha)$; le zéro α de f serait donc isolé. Le sous ensemble ouvert de U défini comme

$$E = \{\alpha \in U ; f \equiv 0 \text{ au voisinage de } \alpha\}$$

est donc non vide (car contenant tous les points d'accumulation de l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f dans U). Ce sous-ensemble E est aussi fermé car les formules (2.18) donnant les coefficients $a_k(\zeta)$,

$$a_k(\zeta) = \frac{1}{r^k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + r e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$$

(avec $r > 0$ suffisamment petit, mais ne dépendant que de α), lorsque ζ est assez voisin de α , dépendent continuellement de ζ ; si tous les $(a_k(\zeta_n))_{k \geq 0}$ sont nuls pour une suite de points $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ convergent vers α , il en est donc de même pour tous les $a_k(\alpha)$. Comme E est non vide, ouvert et fermé dans U , et que U est connexe, on a $E = U$, ce qui contredit le fait que f ne soit pas identiquement nulle. \square

REMARQUE 2.7 (multiplicité d'un zéro isolé). Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe U de \mathbb{C} , s'annulant en $z_0 \in U$, mais non identiquement nulle dans U , l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* ; a_k(z_0) \neq 0\}$ est un sous ensemble non vide de \mathbb{N}^* , admettant donc dans \mathbb{N}^* un plus petit élément $\nu(z_0)$, que l'on appelle *multiplicité* de z_0 comme zéro de f .

COROLLAIRE 2.3 (principe du prolongement analytique). Si U est un ouvert connexe de \mathbb{C} , et que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions holomorphes dans U prenant les mêmes valeurs sur un sous-ensemble de U présentant un point d'accumulation dans U , on a $f \equiv g$ dans U . La même conclusion demeure sous l'hypothèse que f et g aient même développement de Taylor en un point donné α de U .

DÉMONSTRATION. On applique le principe des zéros isolés (Théorème 2.7) à la fonction $f - g$, elle aussi holomorphe dans U . \square

REMARQUE 2.8. Le principe du prolongement analytique est un principe extrêmement profond, quand bien même il semble à première vue n'être qu'une simple reformulation du principe des zéros isolés. Voir par exemple l'exercice 2.22 ou la suite d'exercices techniques (exercices 2.7, 2.8, 2.16, 2.32, 3.35, 3.36, 3.43, 3.44) conduisant l'étude du prolongement de la célèbre fonction zéta de Riemann :

$$z \in \{\operatorname{Re} z > 1\} \mapsto \sum_{k \geq 1} k^{-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-(\log k) z),$$

exemple de série de Dirichlet (cf. l'exercice 2.31) « encodant » en des termes analytiques, de par la formule d'Euler

$$\zeta(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - p_j^{-z}}, \quad \forall z \text{ t.q. } \operatorname{Re} z > 1,$$

($p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ désignant la suite des nombres premiers) le Théorème fondamental de l'Arithmétique. Il s'agit, notons le, d'une série de Dirichlet, donc d'une fonction holomorphe ne s'exprimant pas « naturellement » comme la somme d'une série entière convergente. Si l'on sait que cette fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, peu de choses sont en revanche connues relativement à l'explicitation de pareil prolongement (unique d'après le principe du prolongement analytique). On connaît certes des valeurs particulières comme $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-2k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, conduisant à l'écriture d'étranges formules telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \zeta(0) = -1/2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k = \zeta(-1) = -1/12, \dots$$

(on comprend bien sûr comment il faut les entendre, à savoir au sens du prolongement analytique), mais par exemple l'hypothèse formulée par B. Riemann dès 1859, stipulant que les zéros non triviaux (*i.e.* autres que $-2k$, $k \in \mathbb{N}^*$), de cette fonction ζ prolongée sont tous sur la droite « critique » $\{\operatorname{Re} z = 1/2\}$, reste depuis plus d'un siècle un challenge tant pour les mathématiciens que les physiciens théoriciens.

Autre résultat majeur résultant du fait que les concepts d'holomorphie et d'analyticité coïncident, on a le *théorème de l'application ouverte*.

THEORÈME 2.8 (théorème de l'application ouverte, version locale précisée).
Soit f une fonction holomorphe non constante au voisinage de l'origine (dans \mathbb{C}) et

$$(2.26) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

son développement de Taylor en ce point. Soit $\nu := \inf\{k \in \mathbb{N}^* ; a_k \neq 0\}$. Pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que

$$(2.27) \quad 0 < |w - f(0)| < \eta(\epsilon) \implies \operatorname{card}(D(0, \epsilon) \cap f^{-1}(\{w\})) = \nu.$$

DÉMONSTRATION. Dans un disque $D(0, \epsilon_0)$ (avec ϵ_0 suffisamment petit) on peut écrire, compte-tenu de (2.26) :

$$f(z) = f(0) + z^\nu \left(\sum_{k=\nu}^{\infty} a_k z^{k-\nu} \right) = f(0) + z^\nu u(z),$$

où u est une fonction holomorphe dans $D(0, \epsilon_0)$, ne s'annulant pas dans ce disque, et valant a_ν en $z = 0$. En examinant la preuve¹⁴ de la Proposition 1.11, on constate qu'il existe une fonction holomorphe $v : D(0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $u \equiv \exp v$ dans $D(0, \epsilon_0)$. L'application $\xi : z \in D(0, \epsilon_0) \mapsto z \exp(v(z)/\nu)$ est une application holomorphe, dont le nombre dérivé en 0 vaut $\exp(v(0)/\nu) \neq 0$. Considérée comme une application de $D(0, \epsilon_0)$ dans \mathbb{R}^2 , c'est une application dont le jacobien en 0 vaut $|\exp(v(0)/\nu)|^2 > 0$ (d'après le fait qu'une fonction holomorphe obéit au

¹⁴. Il suffit, sans rien changer à cette preuve ($U = D(0, \epsilon_0)$), d'y faire intervenir une hypothèse d'holomorphie sur la fonction f en jeu, au lieu d'une simple hypothèse de continuité.

système de Cauchy-Riemann (2.5)). Le théorème d'inversion locale pour les applications de classe C^1 (voir le cours de Calcul Différentiel, ex. MHT 513, de Licence 3) assure qu'il existe un disque $D(0, \epsilon_1)$ ($\epsilon_1 \leq \epsilon_0$) tel que ξ réalise un C^1 -difféomorphisme entre $D(0, \epsilon_1)$ et son image $\xi(D(0, \epsilon_1))$. Si l'on effectue le changement (holomorphe¹⁵) de coordonnées $z \leftrightarrow \zeta = \xi(z)$, on voit que la fonction $\zeta \mapsto f(\xi^{-1}(\zeta))$ s'exprime dans $\xi(D(0, \epsilon_1))$ comme

$$f(\xi^{-1}(\zeta)) = f(0) + \zeta^\nu.$$

Comme l'équation $w - f(0) = \zeta^\nu$ admet exactement ν racines distinctes lorsque $|w - f(0)| > 0$ et que ces μ racines tendent vers 0 lorsque w tend vers $f(0)$, le fait que ξ soit un difféomorphisme assure que, pour tout $\epsilon < \epsilon_1$, il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que (2.27) soit valide. \square

COROLLAIRE 2.4 (théorème de l'application ouverte). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante dans un ouvert connexe U du plan. L'application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est ouverte, i.e. l'image par f de tout ouvert de U est un ouvert de \mathbb{C} .*

DÉMONSTRATION. Si z_0 est un point de U , la fonction

$$z \mapsto f(z + z_0)$$

est holomorphe non constante au voisinage de 0. On lui applique le Théorème 2.8. L'image du disque $D(z_0, \epsilon)$ (pour tout ϵ assez petit) contient un disque $D(f(z_0), \eta(\epsilon))$ (pour un $\eta(\epsilon) > 0$ convenable). Cela résulte de (2.27) puisque $\nu = \nu(z_0) \geq 1$. Ceci prouve bien que f est ouverte. \square

2.2.4. Exercices.

EXERCICE 2.14. Existe-t-il une fonction f holomorphe au voisinage de l'origine dans \mathbb{C} et telle que

$$f(1/n) = f(-1/n) = 1/(2n + 1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$? Même question avec cette fois les contraintes

$$|f(1/n)| \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

EXERCICE 2.15. Soit f une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$ et telle que $f''(1/n) = f(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier.

EXERCICE 2.16. Montrer qu'il existe des nombres B_k , $k \geq 0$, tels que la série entière $\sum_0^\infty B_k z^k$ soit de rayon de convergence 2π et que, pour tout $z \in \{\operatorname{Re} z > 1\}$, on ait

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{z + k - 1}$$

(cf. aussi l'exemple 2.1). Dans quel ouvert du plan complexe la fonction

$$z \mapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{z + k - 1}$$

est-elle définie et holomorphe ?

¹⁵. On peut montrer que l'inverse de ξ est aussi une application holomorphe, car de classe C^1 et vérifiant le système (2.5) de Cauchy-Riemann.

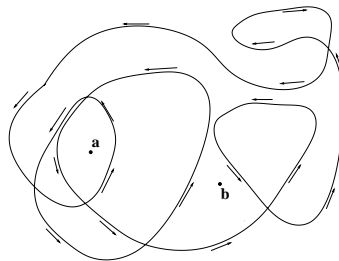


FIGURE 2.2. La lacet de l'exercice 2.19

EXERCICE 2.17 (série de Fourier d'une fonction holomorphe périodique). Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} telle que $f(z+1) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans \mathbb{C}^* telle que $f(z) = g(e^{2i\pi z})$. Montrer que l'on a, pour tout w dans \mathbb{C}^* ,

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k w^k,$$

avec

$$a_k = \int_0^1 f(t+ib) e^{-2i\pi k(t+ib)} dt \quad \forall b \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 2.18 (procédé sommatoire de Borel (1)). Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans $D(0, R)$ ($R > 0$). Montrer que l'on définit une fonction entière F en posant

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

et que, l'on a, pour tout $r \in]0, R[$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} f(\zeta) e^{z/\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Vérifier aussi que pour tout $\rho \in]0, R[$, $|F(z)| = O(\exp(|z|/\rho))$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. Une suite à cette exercice sera proposée dans l'exercice 2.27.

EXERCICE 2.19 (formules de représentation de Cauchy, version topologique). Soit a et b deux nombres complexes distincts et γ le lacet continu de $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ représenté sur la figure 2.2 (et parcouru une seule fois dans le sens indiqué sur la figure). Calculer en fonction de a et b l'intégrale le long de γ de la forme différentielle $dz/((z-a)^2(z-b))$ après avoir justifié que cette 1-forme était localement exacte au voisinage du support de γ . Cette forme est-elle exacte dans $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$?

EXERCICE 2.20 (principe des zéros isolés). Soit f une fonction holomorphe dans le demi-disque ouvert $D^+ := D(0, 1) \cap \{\text{Im } z > 0\}$, continue sur $D^+ \cup]-1, 1[$, nulle sur $]-1, 1[$. Montrer que f est identiquement nulle.

EXERCICE 2.21 (principe des zéros isolés). Montrer qu'il n'existe pas de fonction localement intégrable et à support compact f sur \mathbb{R} telle que sa transformée de Fourier

$$\hat{f} : \omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

soit encore à support compact.

EXERCICE 2.22 (principe des zéros isolés). Soit f une fonction continue, intégrable sur \mathbb{R} , et telle que son spectre

$$\hat{f} : \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

soit nul hors de $[-\Omega, \Omega]$, $\Omega > 0$ (on dit que f est « à spectre borné »). Montrer, en utilisant la formule d'inversion de Fourier¹⁶ selon laquelle

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

que f est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière. Appliquer ensuite le principe des zéros isolés pour montrer, qu'en théorie du moins, la connaissance de f sur un segment temporel, aussi petit soit-il, implique la connaissance de f partout (pourvu que l'on sache *a priori* que f est une fonction continue de spectre borné). Surprenant, non ?

EXERCICE 2.23 (principe des zéros isolés : points *réguliers* ou *singuliers* au bord d'un disque de convergence de série entière). Soit $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On dit qu'un point z_0 du cercle de centre 0 et de rayon R est un point *régulier* pour la somme de cette série entière si et seulement s'il existe un disque ouvert $D(z_0, \rho)$ de centre z_0 et de rayon ρ , et une fonction f_D holomorphe dans $D(0, R) \cup D(z_0, \rho)$, telle que f_D coïncide avec f dans le disque ouvert $D(0, R)$. Un point non régulier du cercle de centre 0 et de rayon R est dit *singulier*. Montrer que l'ensemble des points singuliers de la somme de la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$ est une partie non vide et fermée du cercle de centre 0 et de rayon R . Que se passe-t'il, pour la série géométrique $\sum_{k \geq 0} z^k$, en ce qui concerne les points du bord du cercle de rayon 1 ? Sont-ils réguliers ? singuliers ?

EXERCICE 2.24 (application ouverte). Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , φ une fonction de classe C^1 dans Ω , à valeurs réelles, telle que la courbe $S = \{\varphi = 0\}$ soit régulière (le gradient de φ ne s'annule pas sur cette courbe). Montrer que si f est une fonction holomorphe dans U telle que $f(\Omega) \subset S$, alors nécessairement f est constante dans Ω .

EXERCICE 2.25 (application ouverte). Soit f une application holomorphe d'un ouvert connexe U dans lui-même, telle que $f \circ f = f$. Montrer que soit f est constante, soit f est l'identité.

EXERCICE 2.26 (théorème « un-quart » de Kœbe¹⁷).

a) Soit f une fonction holomorphe injective dans $D(0, 1)$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Montrer qu'il existe une série entière $\sum_n b_n X^n$ de rayon de convergence au moins égal à 1, telle que

$$\forall z \in D(0, 1) \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

16. Voir le cours de MHT 613 (cf. [Yfourier], Théorème 2.4).

17. On doit la conjecture de ce résultat (en 1907) au mathématicien allemand Paul Kœbe (1882-1945), qui travailla sur l'uniformisation des surfaces de Riemann. C'est son compatriote et collègue Ludwig Bierberbach (1886-1982) qui le prouva en 1914. Cette constante 1/4 est intimement liée au fait que la courbure de la métrique hyperbolique dans le disque unité (disque de Poincaré) vaille la fonction constante égale à -4 .

b) Si le développement de f en série entière dans $D(0, 1)$ est $f(z) = z + \sum_{k \geq 2} a_k z^k$, montrer que

$$\forall z, |z| > 1, a_2 + \frac{1}{f(1/z)} = z + \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{z^k}.$$

c) Dédurre du fait que $z \mapsto 1/f(1/z)$ est injective dans $\{|z| > 1\}$ que

$$\sum_{k \geq 1} k|b_k|^2 \leq 1$$

et en déduire $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ (on s'inspirera de la méthode utilisée dans l'exercice 1.23).

d) Montrer qu'il existe une fonction g holomorphe dans $D(0, 1)$, injective, telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, et $(g(z))^2 = f(z^2)$ pour tout $z \in D(0, 1)$. En appliquant à g le résultat établi aux trois questions précédentes, montrer¹⁸ que $|f''(0)| \leq 4$.

e) En appliquant le résultat établi au d) à la fonction

$$\zeta \in D(0, 1) \mapsto \frac{zf(\zeta)}{z - f(\zeta)}$$

lorsque $z \notin f(D(0, 1))$, montrer que nécessairement $|z| \geq 1/4$. En déduire que l'image par f du disque $D(0, 1)$ contient nécessairement le disque ouvert $D(0, 1/4)$.

2.3. Les inégalités de Cauchy et leurs conséquences

2.3.1. Inégalités de Cauchy et théorème de Liouville.

PROPOSITION 2.6 (inégalités de Cauchy). *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} , $z_0 \in U$, et*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k$$

le développement (de Taylor) de f au voisinage de z_0 (valable en fait dans le disque $D(z_0, \text{dist}(z_0, \partial U))$, cf. le Théorème 2.5). On a la formule de Plancherel suivante :

$$(2.28) \quad \forall r < \text{dist}(z_0, \partial U), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z_0)|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

donc aussi le jeu d'inégalités

$$(2.29) \quad \forall r \in]0, \text{dist}(z_0, \partial U)[, \quad \forall p \in \mathbb{N}, |a_p(z_0)| \leq \frac{\sup_{|z-z_0|=r} |f|}{r^p}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le jeu de formules (2.18) de la Proposition 2.5, les nombres $a_p(z_0) r^p$ ($p \in \mathbb{N}$) représentent les coefficients de Fourier (pour $p \in \mathbb{N}$, les autres étant nuls) de la fonction 2π -périodique

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto f(z_0 + re^{i\theta}).$$

La formule (2.28) est donc juste la formule de Plancherel¹⁹. Les inégalités (2.6) s'en déduisent immédiatement. \square

¹⁸. Il s'agit là du premier cran de la conjecture de Bieberbach (1916), prouvée par Louis de Branges en seulement 1985.

¹⁹. Voir le cours d'Analyse 3, ex. UE MHT 401, cf. par exemple [Y0], Théorème 4.10.

COROLLAIRE 2.5 (théorème de Liouville²⁰). *Soit $N \in \mathbb{N}$. Toute fonction entière f telle que $|f(z)| = O(|z|^N)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini est nécessairement une fonction polynomiale de degré au plus N . En particulier, toute fonction entière bornée dans le plan complexe tout entier est constante.*

DÉMONSTRATION. D'après les inégalités de Cauchy (2.6), on a

$$(2.30) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 1, \quad |a_p(0)| \leq \frac{\sup_{|z|=r} |f|}{r^p} \leq Kr^{N-p},$$

puisque $|F(z)| \leq K|z|^N$ pour $|z| \geq 1$ pour une certaine constante positive K ($F = O(|z|^N)$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini). Si $p > N$, en faisant tendre r vers $+\infty$ dans (2.30), on trouve $a_p(0) = 0$. Il reste donc

$$f(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

□

EXEMPLE 2.2 (une preuve « analytique » du théorème fondamental de l'algèbre²¹). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d > 0$. Si $z \mapsto P(z)$ ne s'annule pas dans \mathbb{C} , la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto 1/P(z)$ est une fonction entière bornée, donc constante grâce au Théorème 2.5 de Liouville. Ceci est contradictoire avec $d > 0$.

2.3.2. Suites de fonctions holomorphes, théorèmes de Weierstraß et de Montel. Sur le \mathbb{C} -espace vectoriel $C(U, \mathbb{C})$ des fonctions continues de U dans \mathbb{C} , on rappelle que l'on définit une métrique d en posant, par exemple

$$(2.31) \quad d(f, g) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} \min(1, \|f - g\|_{K_l}),$$

où, pour un compact K , $\|h\|_K := \sup_K |h|$, et $(K_l)_l$ désigne une suite de compacts emboîtés (en croissant) les uns dans les autres ($K_l \subset K_{l+1}$ pour tout $l \geq 0$) exhaustant U (i.e. $\bigcup_l K_l = U$)²². La topologie d'espace métrique associée à cette distance est dite *topologie de la convergence uniforme sur tout compact*. Elle ne dépend pas du choix de la suite d'exhaustion $(K_l)_{l \geq 0}$. Donnons deux résultats concernant le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel $H(U)$ de $C(U, \mathbb{C})$ défini comme le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel des fonctions holomorphes dans U (il s'agit même d'une sous-algèbre avec les opérations d'addition et de multiplication).

PROPOSITION 2.7. *La \mathbb{C} -sous-algèbre $H(U) \subset C(U, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre fermée de $C(U, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

20. Mathématicien français, Joseph Liouville (1809-1882) joua tout au long du XIX-ième siècle un rôle tant scientifique que politique au sein de la communauté mathématique française. C'est lui qui contribua à la diffusion par exemple des travaux de Galois.

21. À comparer avec la preuve « topologique » proposée dans l'exemple 1.9.

22. Pour construire une telle suite, il suffit de se souvenir que, du fait de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , U s'écrit comme une union dénombrable $\bigcup_{l=1}^{\infty} P_l$ de pavés ouverts relativement compacts dans U (voir par exemple [Yint], section 1.3). On pose alors $K_l = \bigcup_{j=1}^l \bar{P}_j$ pour tout $l \geq 1$. Notons que l'on peut tout aussi bien remplacer les pavés par les disques.

DÉMONSTRATION. Si une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions holomorphes dans U converge uniformément sur tout compact de \bar{U} vers une fonction continue f , on a, pour tout triangle fermé plein $T \subset U$,

$$\int_{(\partial T)_+} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{(\partial T)_+} f_n(z) dz \right) = 0.$$

Le théorème de Morera (Théorème 2.3) assure $f \in H(U)$. \square

PROPOSITION 2.8 (théorème de Weierstraß²³). *L'opérateur de dérivation complexe $f \rightarrow f'$ est un opérateur \mathbb{C} -linéaire continu de $H(U)$ dans lui-même lorsque $H(U)$ est équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U .*

DÉMONSTRATION. Si une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions holomorphes dans U converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction holomorphe f , on a, si $\bar{D}(z_0, r) \subset U$, en utilisant les formules de Cauchy dans un disque ((2.11), avec $p = 1$) de la Proposition 2.1 :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \sup_{|z-z_0| \leq r/2} |f'_n(z) - f'(z)| &= \sup_{|z-z_0| \leq r/2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{r}{(r/2)^2} \|f_n - f\|_{\{|z-z_0|=r\}} = \frac{4}{r} \sup_{|z-z_0|=r} |f_n - f|. \end{aligned}$$

Comme tout compact $K \subset U$ peut être recouvert par un nombre fini de disques fermés $\bar{D}(z_0, r)$ tels que $\bar{D}(z_0, 2r) \subset U$, on déduit de (2.32) que $\|f'_n - f'\|_K$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini pour tout compact $K \subset U$. \square

Le théorème de Weierstraß permet, comme nous l'avions annoncé, de compléter la Proposition 2.2.

COROLLAIRE 2.6 (dérivée complexe des intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre). *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et U un ouvert de \mathbb{C} . Soit $(f_z)_{z \in U}$ une collection de fonctions de Ω dans \mathbb{C} , toutes $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -mesurables, $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ désignant ici la tribu borélienne sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. On suppose les deux choses suivantes.*

- (1) *Pour tout $\omega \in \Omega$ (hormis éventuellement les points d'un sous-ensemble $E \subset \Omega$ tel que $\mu(E) = 0$), la fonction $z \mapsto f_z(\omega)$ est holomorphe dans U .*
- (2) *Pour tout $z_0 \in U$, il existe un voisinage $V(z_0)$ de z_0 dans U et une fonction positive $g_{z_0} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que*

$$\forall \omega \in \Omega, \forall z \in V(z_0), \quad |f_z(\omega)| \leq g_{z_0}(\omega).$$

Alors la fonction

$$F : z \in U \mapsto \int_{\Omega} f_z(\omega) d\mu(\omega)$$

est holomorphe dans U , de dérivée au sens complexe

$$F' : z \in U \mapsto \int_{\Omega} \frac{d}{dz} [f_z(\omega)] d\mu(\omega).$$

23. C'est dans les années 1840-1850 qu'à l'occasion de ses travaux sur les fonctions d'une variable complexe, que le mathématicien allemand Karl Weierstraß (1815-1897) approfondit les ponts entre le point de vue des formules de Cauchy d'un côté, et le point de vue analytique débouchant sur le concept d'analyticité de l'autre. On le retrouvera aussi à propos du concept de *fonction elliptique*, ainsi (au chapitres suivants) que dans la réalisation de fonctions holomorphes comme séries ou produits infinis.

DÉMONSTRATION. La clause de domination (2), couplée avec le théorème de Weierstraß (Proposition 2.8) assure que, pour tout point z_0 de U , on a (quitte à réduire le voisinage $V(z_0)$), en prime de (1) :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall z \in V(z_0), \quad \left| \frac{d}{dz} [f_z(\omega)] \right| \leq \gamma_{z_0} g_{z_0}(\omega),$$

γ_{z_0} désignant une constante strictement positive. D'autre part $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f_z(\omega)] = 0$ pour tout z dans U et tout ω dans Ω . Il résulte alors du théorème de différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres réels (Théorème 3.3 dans [Yint]) que la fonction F est de classe C^1 dans U , se plie au système de Cauchy-Riemann (et est donc holomorphe, ce qui fait que l'on retrouve ici, sans cette fois l'hypothèse de σ -finitude de la mesure μ , la conclusion de la Proposition 2.2) et que sa dérivée au sens complexe est bien la fonction obtenue en dérivant au sens complexe $z \mapsto f_z(\omega)$ sous la prise d'intégrale par rapport à la mesure μ . Pour plus de détails, on peut se reporter à la preuve du Théorème 3.3 dans [Yint]. \square

Un dernier résultat majeur concernant les suites (ou séries) de fonctions holomorphes dans un ouvert U de \mathbb{C} est le théorème de Montel²⁴, que nous énonçons ici sous la forme « séquentielle », qui en est la forme la plus habituellement utilisée.

THEORÈME 2.9 (théorème de Montel). *Soit $(f_n)_{n \geq \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U de \mathbb{C} . On suppose que, pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $M(K)$ telle que*

$$(2.33) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_K := \sup_K |f_n| \leq M(K)$$

(une telle suite de fonctions est dite uniformément bornée sur tout compact). On peut alors extraire de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite $(f_{\varphi(\nu)})_{\nu \geq 0}$, φ désignant une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) telle que l'on ait

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f_{\varphi(\nu)} = g$$

dans $H(U)$ pour une certaine fonction holomorphe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, ce qui signifie

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|f_{\varphi(\nu)} - g\|_K = 0$$

pour tout compact $K \subset U$.

DÉMONSTRATION. Du fait de la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il est possible de représenter U sous la forme d'une union dénombrable de disques ouverts $D(z_{0,l}, r_l)$ tels que les disques fermés concentriques $\overline{D(z_{0,l}, 2r_l)}$ de rayons doubles restent inclus dans U (on raisonne comme par exemple [Yint], section 1.3, les pavés étant remplacés ici par des disques). Fixons pour l'instant un tel disque $D(z_{0,l}, r_l)$ et posons $z_{0,l} = z_0$, $r_{0,l} = r$. Au voisinage de $\overline{D(z_0, 2r)}$, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}(z_0)(z - z_0)^k.$$

24. Mathématicien français (1876-1975). Ses travaux concernent l'analyse complexe en une et surtout plusieurs variables (où il a joué un rôle de pionnier).

D'après les inégalités de Cauchy (2.28), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2.34) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}(z_0)|^2 (2r)^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(f_n(z_0 + 2re^{i\theta}))|^2 d\theta \leq (M(\{|z - z_0| = 2r\}))^2.$$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k}(z_0))_{n \geq 0}$ est une suite de nombres complexes bornée. Or de toute suite bornée de nombres complexes, on sait extraire une sous-suite convergente. Par le procédé dit « diagonal », on extrait de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite $(f_{\varphi(\nu)})_{\nu \geq 0}$ telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} a_{\varphi(\nu),k}(z_0) = a_{\infty,k}(z_0) \in \mathbb{C}.$$

On a d'autre part, pour $z \in \overline{D}(z_0, r)$, pour ν_1, ν_2 dans \mathbb{N} , pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$(2.35) \quad \begin{aligned} |f_{\varphi(\nu_1)}(z) - f_{\varphi(\nu_2)}(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\varphi(\nu_1),k}(z_0) - a_{\varphi(\nu_2),k}(z_0)) (z - z_0)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^N |a_{\varphi(\nu_1),k} - a_{\varphi(\nu_2),k}| r^k + \sum_{k>N} |a_{\varphi(\nu_1),k} - a_{\varphi(\nu_2),k}| r^k \\ &\leq \sum_{k=0}^N |a_{\varphi(\nu_1),k} - a_{\varphi(\nu_2),k}| r^k + \left(\sum_{k>N} 2^{-k} \right) \|f_{\varphi(\nu_1)} - f_{\varphi(\nu_2)}\|_{\{|z-z_0|=2r\}} \\ &\leq \sum_{k=0}^N |a_{\varphi(\nu_1),k} - a_{\varphi(\nu_2),k}| r^k + \frac{1}{2^{N-1}} M(\{|z - z_0| = 2r\}). \end{aligned}$$

(si l'on utilise, pour passer de la ligne 2 à la ligne 3, les inégalités de Cauchy (2.29) de la Proposition 2.6, avec $2r$ en place de r). La suite $((f_{\varphi(\nu)})_{|\overline{D}(z_0,r)}}$ $_{\nu \geq 0}$ est donc une suite de Cauchy dans le \mathbb{C} -espace des fonctions continues de $\overline{D}(z_0, r)$ dans \mathbb{C} équipé de la norme uniforme $\| \cdot \|_{\overline{D}(z_0,r)}$: on peut en effet choisir N assez grand pour rendre le dernier terme au second membre de (2.35) arbitrairement petit, puis une fois N choisi, on rend la somme des N premiers termes de ce même second membre arbitrairement petite lorsque ν_1 et ν_2 sont assez grands. Comme ce \mathbb{C} -espace vectoriel normé est un espace de Banach (*i.e.* complet), cette suite est convergente (en norme uniforme) sur $\overline{D}(z_0, r)$. La limite $f_{\infty} = f_{z_0,\infty}$ est (d'après la Proposition 2.7) une fonction holomorphe dans $D(z_0, r)$.

Pour terminer, on utilise une fois de plus le procédé diagonal. On part de la représentation

$$U = \bigcup_{l=0}^{\infty} D(z_0, r_l).$$

On extrait de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite $(f_{\varphi_0(\nu)})_{\nu}$ pour avoir convergence vers une fonction holomorphe dans $H(D(z_0,0, r_0))$ équipé de la métrique de la convergence uniforme sur tout compact. C'est avec cette sous-suite que l'on travaille ensuite dans $D(z_0,1, r_1)$ pour en extraire une nouvelle sous-suite, etc. La suite obtenue en considérant, pour chaque entier $l \geq 0$, le l -ième élément de la suite résultant de $l + 1$ extractions successives (correspondant à un travail dans $D(z_0,0, r_0), \dots$, dans $D(z_0,l, r_l)$), on construit ²⁵ une suite extraite de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent vers une

25. C'est encore une incarnation du procédé dit « diagonal », d'usage très fréquent en analyse.

fonction holomorphe uniformément sur tous les compacts de l'union des $D(z_0, r_l)$, c'est-à-dire sur tous les compacts de l'ouvert U . Ceci achève la preuve du théorème de Montel. \square

REMARQUE 2.9. Le théorème de Montel (Théorème 2.9) se déduit le plus souvent du théorème d'Ascoli (voir le cours d'Analyse fonctionnelle) : « toute partie bornée et équicontinue de $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|)$ (K compact de U) est relativement compacte ». Nous avons préféré donner un argument plus spécifique, basé sur l'analyticité et le recours aux inégalités de Cauchy, plutôt que d'invoquer un théorème « admis » comme celui d'Ascoli. La preuve proposée ici nous semble plus en phase avec l'esprit du cours d'Analyse Complexe.

2.3.3. Principes du maximum. Le fait que les fonctions holomorphes vérifient la propriété de la moyenne (Proposition 2.4) implique un principe que nous énonçons sous forme *locale* et *globale*, le *principe du maximum*.

PROPOSITION 2.9 (principe du maximum pour les fonctions holomorphes, version locale). *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U . Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0 de U (il existe un voisinage $V(z_0) \subset U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in V(z_0)$), f est constante dans U .*

DÉMONSTRATION. On démontre ce résultat par l'absurde. Supposons que l'on ait $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ dans un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ ($r > 0$) inclus dans U . Soit $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z_0)(z - z_0)^k$ le développement de Taylor de f au voisinage de z_0 . La formule de Plancherel (2.28) de la Proposition 2.6 assure

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z_0)|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta \leq |f(z_0)|^2 = |a_0(z_0)|^2.$$

puisque $|f| \leq |f(z_0)|$ sur le cercle $\{|z - z_0| = r\}$. Pour tout $k \geq 1$, on a $a_k(z_0) = 0$. La fonction f est donc constante au voisinage de z_0 , donc dans l'ouvert connexe U d'après le principe des zéros isolés (Théorème 2.7). \square

PROPOSITION 2.10 (principe du maximum pour les fonctions holomorphes, version globale). *Soit U un ouvert connexe borné de \mathbb{C} , et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante dans U . Soit*

$$(2.36) \quad M = \sup_{\zeta \in \partial U} \left(\limsup_{\substack{\xi \rightarrow \zeta \\ \xi \in \bar{U}}} |f(\xi)| \right).$$

Alors, pour tout $z \in U$, on a $|f(z)| < M$. Dans le cas particulier où f se prolonge en une fonction continue à \bar{U} , alors

$$(2.37) \quad \forall z \in U, |f(z)| < \sup_{\zeta \in \partial U} |f(\zeta)|.$$

DÉMONSTRATION. Comme $|f|$ ne prend que des valeurs finies dans U , il n'y a rien à démontrer si $M = +\infty$. On peut donc supposer $M < +\infty$, ce qui est le cas intéressant, celui où il y a quelque chose réellement à prouver.

Remarquons d'abord que, si f est continue dans \bar{U} (ce cas correspond au second volet de la proposition), alors $|f|$ est bornée dans \bar{U} et atteint son maximum en un point z_0 de \bar{U} . Le point z_0 ne saurait être un point de U d'après la version locale du principe du maximum (Proposition 2.9). On a donc $z_0 \in \partial U$ et $|f| \leq \sup_{\partial U} |f|$ dans \bar{U} . Cette inégalité est stricte dans U toujours d'après la Proposition 2.9.

Dans le cas où f n'est plus supposée continue dans \bar{U} , voici comment on procède. On prolonge dans un premier temps $|f|$ à \bar{U} en posant, pour tout $z \in \partial U$,

$$(2.38) \quad |f(z)| = \limsup_{\substack{\xi \rightarrow z \\ \xi \in U}} |f(\xi)|.$$

La fonction $|f|$ ainsi prolongée est bornée sur \bar{U} , ce que nous allons prouver par l'absurde. S'il existait une suite de points $(z_n)_{n \geq 0}$ de \bar{U} telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(z_n)| = +\infty,$$

on pourrait en extraire (puisque U est borné) une sous-suite $(z_{\varphi(\nu)})_{\nu \geq 0}$ convergeant vers un point z_∞ de \bar{U} . Comme $|f|$ prend des valeurs finies dans U , le point z_∞ serait nécessairement à la frontière de U . Or le fait que $|f(z_\infty)| \leq M$ (d'après l'hypothèse (2.36)) est incompatible (du fait de la définition de $|f(z_\infty)|$ en (2.38)) avec $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} |f(z_{\varphi(\nu)})| = +\infty$.

Comme U est connexe et que f est non constante, $f(U)$ est un ouvert d'après le théorème de l'application ouverte (Corollaire 2.4). Si z est un point de $\partial[f(U)]$, on a $|a| \leq M$. En effet, a s'approche par une suite $(f(z_n))_{n \geq 0}$, $(z_n)_{n \geq 0}$ étant une suite de points de U ; on peut extraire de cette suite $(z_n)_{n \geq 0}$ une sous-suite $(z_{\varphi(\nu)})_{\nu \geq 0}$ convergeant dans \bar{U} vers un point z_∞ ; comme $a \in \partial[f(U)]$, il est impossible que $z_\infty \in U$; on a donc $z_\infty \in \partial U$ et, par conséquent, $|a| = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} |f(z_{\varphi(\nu)})| \leq M$.

L'ouvert $f(U)$ est donc un ouvert connexe borné dont la frontière est incluse dans $\bar{D}(0, M)$. On a donc $f(U) \subset D(0, M)$. \square

Signalons comme corollaire important de ce résultat le lemme suivant, dû aussi à Hermann Schwarz.

COROLLAIRE 2.7 (lemme de zéros de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0, 1)$ dans lui-même, s'annulant à l'ordre m à l'origine. On a alors*

$$(2.39) \quad \forall z \in D(0, 1) \setminus \{0\}, \quad |f(z)| \leq |z|^m$$

ainsi que

$$(2.40) \quad |f^{(m)}(0)| \leq m!.$$

De plus, si l'on a égalité dans (2.39) ou (2.40),

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall z \in D(0, 1), \quad f(z) = e^{i\theta} z^m.$$

DÉMONSTRATION. On applique le principe du maximum global (Proposition 2.10) à l'ouvert $U = D(0, 1)$ avec la fonction holomorphe g :

$$g : z \in D(0, 1) \mapsto \begin{cases} f(z)/z^m & \text{si } z \neq 0 \\ f^{(m)}(0)/m! = a_m(f; 0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Comme $|f| < 1$ dans $D(0, 1)$, on peut prendre $M = 1$ dans cette proposition ($|\xi|^m$ s'approche de 1 lorsque ξ s'approche du bord du disque). Si g n'est pas constante, alors on a (2.39) et (2.40) avec même des inégalités strictes. Si l'on a donc égalité dans (2.39) ou (2.40), ceci signifie que g est constante, la constante devant d'ailleurs être de module 1, c'est-à-dire $g(z) = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. \square

REMARQUE 2.10. Le lemme des zéros de Schwarz tire sa dénomination du constat suivant : si l'on impose à une fonction holomorphe de s'annuler, ceci se répercute sur sa croissance. On connaît bien le cas des fonctions polynomiales : si l'on impose à une telle fonction de s'annuler en d points distincts, alors ce doit être une fonction polynomiale de degré au moins d , dont la croissance est au moins en $|z|^d$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini (voir l'exercice 2.42). C'est sous cette forme qu'un tel « lemme de zéros » est exploité en théorie des nombres (en particulier dans l'étude des questions de nature diophantienne en transcendance).

Le principe du maximum global (Proposition 2.10) s'avère en défaut dès que l'ouvert U n'est plus borné (voir par exemple l'exercice 2.36). Il existe cependant des versions très utiles de ce principe dans certains ouverts non bornés (bandes, secteurs angulaires). Ce sont les théorèmes du type *Phragmén-Lindelöf*²⁶. On renvoie aux exercices 2.43, 2.44, 2.45.

2.3.4. Exercices.

EXERCICE 2.27 (procédé sommatoire de Borel (2)). Cet exercice constitue le second volet de l'exercice 2.18. Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| = O(\exp(\kappa|z|))$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ (pour un certain $\kappa > 0$) et $b_n = F^{(n)}(0)/n!$ pour $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_0^\infty n!b_n z^n$ est au moins égal à $1/\kappa$.

EXERCICE 2.28 (inégalités de Cauchy et théorème de Liouville). Soient f et g deux fonctions holomorphes dans \mathbb{C} et telles que $|f(z)| \leq C|g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f = \lambda g$, où λ est un nombre complexe tel que $|\lambda| \leq C$. Que peut-on dire d'une fonction entière f telle que $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}$?

EXERCICE 2.29 (inégalités de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $C_{r,R} := \{z; r < |z| < R\}$, où $0 < r < R < +\infty$, telle que, $\forall z \in C_{r,R}$, $\operatorname{Re}(f(z)) \in [A, B]$. Montrer que, pour tout $\rho \in]r, R[$,

$$\sup_{|\zeta|=\rho} |f'(\zeta)| \leq \frac{e^{B-A}}{\min(\rho-r, R-\rho)}$$

(on raisonnera avec $g = \exp f$).

EXERCICE 2.30 (convergence uniforme sur tout compact). La topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U de \mathbb{C} peut-elle être définie par une norme ? (on pensera au théorème de F. Riesz caractérisant les espaces vectoriels normés de dimension finie en termes de relative compacité de la boule unité ouverte).

EXERCICE 2.31 (séries de Dirichlet²⁷). Soit $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite strictement croissante de nombres positifs, et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes, telles que la série numérique $\sum_{k \geq 1} a_k e^{-\lambda_k z_0}$ converge pour un certain nombre complexe z_0 .

26. Établis en 1908 par les mathématiciens respectivement suédois et finlandais Lars Edvard Phragmén (1863-1937) and Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946), ces théorèmes jouent un rôle important, par exemple dans la théorie des distributions, en théorie des opérateurs, dans les questions d'interpolation, etc.

27. La terminologie fait référence à l'analyste et théoricien des nombres allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) qui étudia ce type de série de fonctions holomorphes dont la fonction zéta de Riemann constitue un prototype.

a) Montrer que la série de fonctions $z \mapsto \sum_{k \geq 1} a_k e^{-\lambda_k z}$ converge uniformément dans tout secteur fermé conique

$$C_\kappa(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im}(z - z_0)| \leq \kappa \operatorname{Re}(z - z_0)\}, \quad \kappa > 0.$$

(utiliser le procédé sommatoire d'Abel d'« *intégration par parties discrète* », comme dans l'exercice 1.8).

b) En déduire que $z \mapsto \sum_{k \geq 1} a_k e^{-\lambda_k z}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$. Donner une expression de sa dérivée sous la forme d'un développement en série.

EXERCICE 2.32 (suites de fonctions holomorphes, principe du prolongement analytique et fonction zéta de Riemann). Soit ζ la fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 1\}$ définie par $\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}$ (voir l'exercice 2.7).

a) Vérifier que

$$\forall z \in \{\operatorname{Re} z > 1\}, \quad \zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

et en déduire (en utilisant l'exercice 2.31) que la fonction ζ se prolonge analytiquement à l'ouvert $U := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0, z \notin 1 + (2i\pi/\log 2)\mathbb{Z}\}$.

b) Pour tout $t \geq 1$, on note $[t]$ la partie entière de t . En utilisant le procédé sommatoire d'Abel d'« *intégration par parties discrète* », vérifier que, pour tout $x > 1$, on a

$$\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{x+1}} dt.$$

c) Déduire du c) que la fonction ζ se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$ que l'on explicitera. Peut-on penser la prolonger en une fonction holomorphe dans tout le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$?

d) En utilisant le principe du prolongement analytique, déduire des questions précédentes, après avoir montré que les deux membres de la relation ci-dessous définissaient des fonctions holomorphes dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, que

$$\forall z \in \{\operatorname{Re} z > 0\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z} = \frac{z(1 - 2^{1-z})}{z-1} - z(1 - 2^{1-z}) \int_1^{\infty} \frac{t - [t]}{t^{z+1}} dt.$$

EXERCICE 2.33 (théorème de Montel). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et \mathcal{F} une famille bornée de fonctions holomorphes dans U (il existe, pour chaque compact $K \subset\subset U$, une constante M_K telle que l'on ait pour tout $f \in \mathcal{F}$, pour tout $z \in K$, l'inégalité $|f(z)| \leq M_K$). Montrer que la famille $\mathcal{F}' := \{f'; f \in \mathcal{F}\}$ est aussi une famille bornée. Si \mathcal{F}' est une famille bornée, en est-il de même de \mathcal{F} ?

EXERCICE 2.34 (théorème de Montel). Soit U un ouvert borné de \mathbb{C} et \mathcal{F} l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans lui-même. Pourquoi \mathcal{F} est-elle une partie relativement compacte de l'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U , équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ? Quelle est l'adhérence de \mathcal{F} dans $\mathcal{H}(U)$? Vérifier que \mathcal{F} est un semi-groupe pour la composition des applications et que, si $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$ dans \mathcal{F} , alors $g \circ f = \lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n \circ f_n)$ (toujours pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de U).

EXERCICE 2.35 (application ouverte et théorème de Montel). Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et f une application holomorphe non constante de U dans U telle que $f(U)$ soit un sous-ensemble relativement compact de U . On définit la suite $f^{(n)}$ en posant $f^{[n]} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois).

- a) Montrer que tous les ensembles $f^{[n]}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, sont ouverts et que leur intersection K est compacte.
 b) Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f^{[n]})_n$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction g et que $g(U) \subset K$.
 c) Montrer qu'en fait $g(U) = K$. En conclure que la suite $(f^{[n]})_n$ converge uniformément sur tout compact vers un point d'attraction $z_0 \in U$.

EXERCICE 2.36 (principe du maximum).

- a) Soit f une fonction continue dans un demi-plan fermé $\bar{\Pi}$, holomorphe dans le demi-plan ouvert Π . On suppose que $|f|$ est bornée par M sur la frontière de Π et que

$$\limsup_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in \Pi}} |f(z)| \leq M'.$$

Montrer que $|f|$ est bornée par $\sup(M, M')$ dans $\bar{\Pi}$.

- b) En considérant la fonction $z \mapsto e^{\cos z}$, vérifier que le principe du maximum global dans \bar{U} peut fort bien être en défaut lorsque U est non borné.

EXERCICE 2.37 (principe du maximum). Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe U . Si $|f|$ présente un minimum en $z_0 \in U$, que peut valoir ce minimum ?

EXERCICE 2.38 (principe du maximum). Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe U . On imagine le graphe de $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|^2$ vu comme une « carte en relief » dans l'espace \mathbb{R}^3 . Quelle particularité (ou plutôt anomalie) présente cette carte en relief (si on la compare à une carte en relief classique d'un massif montagneux, telle une carte IGN) ?

EXERCICE 2.39 (principe du maximum). Soit P un polynôme de degré d et a un nombre strictement positif. Montrer que l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}; |P(z)| < a\}$ ne saurait avoir plus de d composantes connexes.

EXERCICE 2.40 (lemme de zéros de Schwarz). Soit f une fonction holomorphe du disque unité ouvert $D(0, 1)$ dans lui-même. Soient z et w deux points de ce disque.

- a) Montrer que la fonction

$$\zeta \in D(0, 1) \mapsto \frac{f(\zeta) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(\zeta)}$$

est une fonction holomorphe de $D(0, 1)$ dans lui-même, s'annulant en w . En composant cette fonction avec une fonction holomorphe convenable de $D(0, 1)$ dans lui-même, construire une fonction holomorphe de $D(0, 1)$ dans lui-même s'annulant cette fois en 0 (et non plus en w).

- b) Montrer que

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|.$$

Que peut-on dire s'il y a égalité pour deux points z et w distincts ?

EXERCICE 2.41 (lemme de zéros de Schwarz). Soit f une application holomorphe de $D(0, 1)$ dans $D(0, 1)$ s'annulant au points z_1, \dots, z_n . Par récurrence sur n , montrer que $|f(0)| \leq |z_1 \dots z_n|$.

EXERCICE 2.42 (lemme de zéros de Schwarz). Soit f une fonction entière, s'annulant à l'ordre au moins ν en tout point d'un sous-ensemble fini S inclus dans le disque unité fermé $\overline{D(0, r)}$. Montrer que, pour tout $R > r$, on a

$$\log \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \log \sup_{|z|=R} |f(z)| - \nu \text{card}(S) \log \frac{R-r}{2r}.$$

On pensera à factoriser dans le disque unité ouvert la fonction

$$z \mapsto \frac{f(Rz)}{\sup_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|}$$

et à appliquer ensuite le lemme de zéros de Schwarz.

EXERCICE 2.43 (principe de Phragmén-Lindelöf). Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq Ce^{B|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, C et B étant deux constantes positives. On suppose aussi qu'il existe un entier N tel que $F(t) = O(1 + |t|)^N$ lorsque t tend vers $\pm\infty$ dans \mathbb{R} . Montrer qu'il existe une constante positive C' telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C'(1 + |z|)^N e^{B|\text{Im} z|}.$$

EXERCICE 2.44 (principe de Phragmén-Lindelöf dans une bande). Soit f une fonction holomorphe bornée dans la bande ouverte $B := \{z; 0 < \text{Re} z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue à \overline{B} . Soit $A_0 = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)|$ et $A_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(1 + iy)|$. On suppose $A_0 A_1 > 0$.

a) Montrer que la fonction $G : z \in B \mapsto f(z)A_0^{z-1}A_1^{1-z}$ est holomorphe dans B , se prolonge en une fonction continue dans \overline{B} , de prolongement borné en module par 1 sur la frontière de \overline{B} .

b) En utilisant le principe du maximum (Proposition 2.10) avec $z \mapsto G(z)e^{\epsilon z^2}$, où $\epsilon > 0$, puis en faisant tendre ϵ vers 0, montrer

$$\forall z \in B, |f(z)| \leq A_0^{1-\text{Re} z} A_1^{\text{Re} z}.$$

c) Que se passe-t'il si $A_0 A_1 = 0$?

EXERCICE 2.45 (principe de Phragmén-Lindelöf dans un secteur angulaire). Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et C_α le secteur angulaire ouvert

$$C_\alpha := \{z \in \mathbb{C}^*; |\arg_{]-\pi, \pi[}(z)| < \alpha\}.$$

a) Pour $\gamma \in]0, \infty[$, on définit la fonction $z \mapsto z^\gamma$ dans C_α par

$$z^\gamma := \exp(\gamma(\log |z| + i \arg_{] \pi, \pi[}(z))).$$

Montrer que cette fonction est holomorphe dans C_α et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{C_\alpha}$.

b) Soit f une fonction $\overline{C_\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$, continue sur $\overline{C_\alpha}$, holomorphe sur C_α et telle que $\sup_{\partial C_\alpha} |f| = M < \infty$. On suppose aussi qu'il existe trois constantes $A > 0$, $B > 0$, $\rho \in]0, \pi/(2\alpha)[$ telles que

$$\forall z \in \overline{C_\alpha}, |f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}.$$

Soit $\gamma \in]\rho, \pi/(2\alpha)[$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in \overline{C_\alpha}}} |f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}| = 0.$$

c) Montrer en utilisant convenablement le principe du maximum (Proposition 2.10) que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\forall z \in \overline{C_\alpha}, |f(z)e^{-\epsilon z^\gamma}| \leq M.$$

En déduire que $|f|$ est bornée par $M = \sup_{\partial C_\alpha} |f|$ dans $\overline{C_\alpha}$.

Singularités isolées, méromorphie et théorèmes d'approximation

3.1. Singularités isolées des fonctions holomorphes

3.1.1. Singularités isolées et coupures. Nous introduisons le concept de *singularité isolée en un point* pour une fonction holomorphe f . Par *singularité isolée en z_0* de f , nous entendons que la fonction f en question soit holomorphe dans tout un voisinage ouvert *épointé* de z_0 (c'est-à-dire un voisinage ouvert de z_0 auquel on a retiré ce point), mais non *a priori* au voisinage de z_0 (on dit qu'elle est *singulière* en ce point, elle n'a d'ailleurs nulle raison d'y être définie!). Cette situation est bien sûr très particulière. Il est fréquent de se trouver face à des situations plus complexes mettant en jeu des singularités *non isolées* : l'exemple de la fonction

$$(3.1) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{te^{i\theta_0}; t \geq 0\} \longmapsto \log |z| + i \arg_{\theta_0, \theta_0 + 2\pi}(z)$$

illustre pareil état de fait. Le qualificatif imagé plus général utilisé au XIX-ième siècle pour décrire ces situations plus complexes est celui de « *coupure* » ; on dit par exemple que la fonction logarithme complexe (3.1) présente une « *coupure* » le long de la demi-droite fermée $\{te^{i\theta_0}; t \geq 0\}$, ou encore que cette demi-droite fermée constitue une coupure pour la fonction (3.1).

DÉFINITION 3.1 (singularité isolée d'une fonction holomorphe en un point z_0 de \mathbb{C}). Une fonction f définie et holomorphe dans un ouvert épointé $U \setminus \{z_0\}$ (où $z_0 \in U$ et U est un ouvert de \mathbb{C}) est dite *fonction holomorphe présentant une singularité isolée au point $z_0 \in U$* .

Il est également important d'envisager le concept de *singularité isolée à l'infini*.

DÉFINITION 3.2 (singularité isolée d'une fonction holomorphe à l'infini). Une fonction f définie et holomorphe dans $\pi^+(V \setminus \{N\})$, où V est un ouvert de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 contenant le pôle nord $N = (0, 0, 1)$, et π^+ désigne la projection stéréographique depuis ce point, est dite *fonction holomorphe présentant une singularité isolée à l'infini*.

REMARQUE 3.1. On note que $\pi^+(V \setminus \{N\})$ est un ouvert de \mathbb{C} contenant le complémentaire $\{|z| > R\}$ d'un disque fermé pour R assez grand.

3.1.2. Développement de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne ou au voisinage épointé d'un point. Avant de revenir au cas plus spécifique des fonctions holomorphes f dans un ouvert $U \setminus \{z_0\}$ de \mathbb{C} et présentant une singularité isolée au point z_0 , nous allons déduire du théorème de représentation de Cauchy (Théorème 2.4) le théorème d'analyticité de Laurent ¹.

1. Avant de s'intéresser aux mathématiques sous l'impulsion de Cauchy, le polytechnicien Pierre Laurent (1813-1854) fut avant tout ingénieur hydraulicien. C'est en travaillant au projet de port du Havre qu'il entama une carrière (mal reconnue de son temps) de mathématicien.

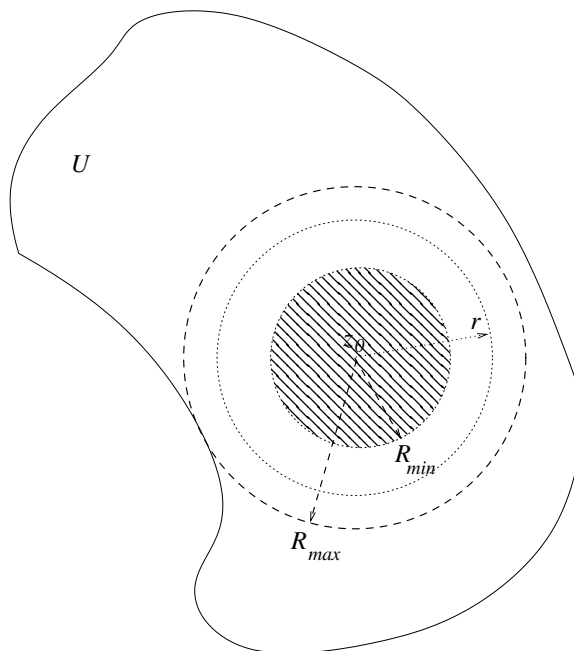


FIGURE 3.1. Le cadre du théorème d'analyticité de Laurent

Ce résultat constitue une extension importante du théorème d'analyticité au sens de Taylor (Théorème 2.5).

THEORÈME 3.1 (théorème d'analyticité de Laurent). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $\overline{D(z_0, R_{\min})}$ un disque fermé de centre z_0 inclus dans U (où $R_{\min} \geq 0$) et $f : U \setminus \overline{D(z_0, R_{\min})} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \overline{D(z_0, R_{\min})}$. Soit $R_{\max} \in]0, +\infty]$ la borne supérieure de l'ensemble des réels $r > R_{\min}$ tels que la couronne ouverte*

$$\{z \in \mathbb{C}; R_{\min} < |z - z_0| < r\}$$

reste incluse dans U (c'est-à-dire la distance de z_0 au bord de U , voir la figure 3.1). Alors :

- (1) *Pour tout $r \in]R_{\min}, R_{\max}[$, les coefficients de Fourier de la fonction C^∞ 2π -périodique $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto f(z_0 + re^{i\theta}) \in \mathbb{C}$, à savoir les nombres $r^p a_{r,p}(z_0)$, où*

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_{r,p}(z_0) &:= \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + re^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta, \quad p \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

s'expriment sous la forme $r^p a_p(z_0)$, où $a_p(z_0)$ ne dépend pas de r ;

- (2) *Les séries entières $\sum_{k \geq 1} a_{-k}(z_0) X^k$ et $\sum_{k \geq 0} a_k(z_0) X^k$ ont des rayons de convergence respectivement supérieurs ou égaux à $1/R_{\min} \in]0, +\infty]$ et $R_{\max} \in]0, +\infty]$.*

(3) *On a enfin*

$$(3.3) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z_0) (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k$$

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C}; R_{\min} < |z - z_0| < R_{\max}\}.$$

REMARQUE 3.2 (clause d'unicité et développement en série de Laurent dans une couronne). Soit $r \in]R_{\min}, R_{\max}[$. Si f admet un autre développement de la forme

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} \alpha_{r,-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k \geq 0} \alpha_{r,k} (z - z_0)^k,$$

valable sur tout le cercle de centre z_0 et de rayon r , tel que les deux séries entières $\sum_{k \geq 1} \alpha_{r,-k} X^k$ et $\sum_{k \geq 0} \alpha_{r,k} X^k$ aient des rayons de convergence respectivement strictement supérieurs à $1/r$ et r , alors nécessairement $\alpha_{r,k} = a_k(z_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ceci résulte immédiatement de l'unicité du développement en série de Fourier d'une fonction C^∞ 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . La développement (3.3) est appelé *développement de la fonction f en série de Laurent (centré en z_0)* dans la couronne ouverte $\{R_{\min} < |z - z_0| < R_{\max}\}$, incluse dans l'ouvert $U \setminus \overline{D(z_0, R_{\min})}$ sur lequel f est supposée définie et holomorphe.

DÉMONSTRATION. Le point (1) résulte du fait que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la forme différentielle

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta$$

est abélienne (*i.e.* du type $h(\zeta) d\zeta$ avec h holomorphe) dans la couronne ouverte $\Gamma := \{R_{\min} < |z - z_0| < R_{\max}\}$. Elle est donc fermée, par conséquent localement exacte dans cette couronne. Si $R_{\min} < r_1 < r_2 < R_{\max}$, les deux lacets

$$t \in [0, 1] \mapsto z_0 + r_j e^{2i\pi t}, \quad j = 1, 2,$$

sont homotopes (*via* $F(t, s) = z_0 + s e^{2i\pi t}$, $0 \leq t, s \leq 1$) dans l'homotopie entre lacets libres \mathcal{H}_Γ (Définition 1.14). Le fait que $a_{r_1,p}(z_0) = a_{r_2,p}(z_0)$ résulte donc de la Proposition 1.12 (volet 2).

Le point (2) résulte de la formule de Plancherel, qui assure

$$(3.4) \quad \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |a_k(z_0)|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})|^2 d\theta \leq \sup_{|z-z_0|=r} |f|^2 < +\infty$$

pour tout $r \in]R_{\min}, R_{\max}[$. La série entière $\sum_{k \geq 1} a_{-k} X^k$ converge donc normalement dans le disque fermé $\{|X| \leq 1/r\}$, tandis que la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$ converge normalement dans le disque fermé $\{|X| \leq r\}$. Comme r peut être choisi arbitraire dans $]R_{\min}, R_{\max}[$, on en déduit les minoration voulues pour les rayons de convergence des deux séries.

Pour le point (3), on choisit $r_1 < r_2$ arbitraires dans $]R_{\min}, R_{\max}[$ et l'on utilise, en choisissant comme ouvert la couronne ouverte $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, la formule de représentation de Cauchy 2.16 (avec ici $p = 1$) du Théorème 2.4 de représentation de Cauchy (dans sa version analytique). Pour tout point z dans $\{r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, il vient donc, en appliquant cette formule :

$$(3.5) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_2 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_1 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right).$$

La première des deux intégrales au second membre de (3.5) s'exprime sous la forme

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_2 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_2 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}. \end{aligned}$$

Comme $|z - z_0| < r_2$, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \quad \forall \zeta \in \{|\zeta - z_0| = r_2\}$$

(la convergence de cette série de fonctions de ζ étant uniforme en la variable ζ sur le cercle de centre z_0 et de rayon r_2). On peut donc intervertir série et intégrale après développement de l'intégrand (ζ étant précisément la variable d'intégration) sous l'intégrale figurant au second membre de (3.6) pour obtenir

$$(3.7) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_2 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{r_2, k}(z_0)(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0)(z - z_0)^k.$$

La seconde des deux intégrales au second membre de (3.5) s'exprime sous la forme

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_1 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_1 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{z - z_0} \frac{d\zeta}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}. \end{aligned}$$

Comme $|z - z_0| > r_1$, on a :

$$\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \quad \forall \zeta \in \{|\zeta - z_0| = r_1\}$$

(la convergence de la série de fonctions de ζ étant uniforme en la variable ζ sur le cercle de centre z_0 et de rayon r_1). On peut donc intervertir série et intégrale après développement de l'intégrand (ζ étant précisément la variable d'intégration) sous l'intégrale figurant au second membre de (3.8) pour obtenir

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & - \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + r_1 e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{r_1, -k-1}(z_0)(z - z_0)^{-k-1} = \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z_0)(z - z_0)^{-k}. \end{aligned}$$

En ajoutant les contributions (3.7) et (3.9) (dont la somme reproduit $f(z)$ d'après (3.7)), on obtient la formule (3.3) voulue, mais seulement sous la condition que $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Cependant, le choix de r_1 et r_2 tels que $r_1 < r_2$ étant arbitraire dans $]R_{\min}, R_{\max}[$, on a bien en fait validité de cette formule pour tout z dans la couronne ouverte $\{R_{\min} < |z - z_0| < R_{\max}\}$. Ceci achève la preuve des trois points du théorème d'analyticité de Laurent. \square

COROLLAIRE 3.1 (développement de Laurent au voisinage épointé d'une singularité isolée). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in U$, et $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$. Dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < d(z_0, \partial U)\}$, où*

$d(z_0, \partial U)$ désigne la distance de z_0 à la frontière de U , la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent :

$$(3.10) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z_0) (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k,$$

la série entière $\sum_{k \geq 1} a_{-k}(z_0) X^k$ ayant pour rayon de convergence $+\infty$ et la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k(z_0) X^k$ ayant un rayon de convergence au moins égal à $d(z_0, \partial U)$. De plus, on a

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a_p(z_0) &:= \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \rightarrow z_0 + re^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \forall r \in]0, d(z_0, \partial U)[. \end{aligned}$$

Les nombres $a_p(z_0)$, $p \in \mathbb{Z}$, sont appelés coefficients de Laurent de f au voisinage de la singularité isolée z_0 de la fonction holomorphe f . Le développement (3.10) est appelé développement de Laurent de f au voisinage (épointé) de cette singularité isolée.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un cas particulier d'application du Théorème d'analyticité de Laurent (Théorème 3.1), complété avec la Remarque 3.2 (pour ce qui est de la clause d'unicité). On prend ici $R_{\min} = 0$ et $R_{\max} = d(z_0, \partial U)$. \square

REMARQUE 3.3 (partie polaire, partie régulière). La formule (3.10) montre que la fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ se scinde dans la couronne ouverte $\Gamma_{z_0} := \{0 < |z - z_0| < d(z_0, \partial U)\}$ en la somme

$$(3.12) \quad f = (\text{Pol}_{z_0}[f])|_{\Gamma_{z_0}} + (\text{Reg}_{z_0}[f])|_{\Gamma_{z_0}}$$

de la restriction à Γ_{z_0} de la fonction

$$(3.13) \quad \text{Pol}_{z_0}[f] : z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}(z_0) (z - z_0)^{-k}$$

et de la restriction à Γ_{z_0} de la fonction

$$(3.14) \quad \text{Reg}_{z_0}[f] : z \in D(z_0, d(z_0, \partial U)) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0) (z - z_0)^k.$$

La fonction $\text{Pol}_{z_0}[f]$ définie en (3.13) est dite *partie polaire* de f en z_0 . Il s'agit (c'est important) d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. La fonction $\text{Reg}_{z_0}[f]$ définie en (3.14) est dite *partie régulière* de f en z_0 . Il s'agit (c'est important également) d'une fonction holomorphe dans tout le disque ouvert $D(z_0, d(z_0, \partial U))$, z_0 cette fois inclus.

COROLLAIRE 3.2 (développement de Laurent au voisinage de l'infini). Soit V un voisinage ouvert du pôle nord $N = (0, 0, 1)$ dans la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , et f une fonction holomorphe dans l'ouvert $\pi^+(V \setminus \{N\})$, i.e. une fonction holomorphe présentant une singularité isolée à l'infini. Dans la couronne ouverte $\{|z| > R\}$, où

$$R := \sup \{|\zeta|; \zeta \notin \pi^+(V \setminus \{N\})\},$$

la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent :

$$(3.15) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{a}_k(\infty) z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_{-k}(\infty) z^{-k}$$

la série entière $\sum_{k \geq 1} \tilde{a}_k(\infty) X^k$ ayant un rayon de convergence au moins égal à ∞ et la série entière $\sum_{k \geq 0} \tilde{a}_{-k}(\infty) X^k$ ayant un rayon de convergence au moins égal à $1/R$. De plus, on a

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_p(\infty) &:= \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto re^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{p+1}} d\zeta, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \forall r > R. \end{aligned}$$

Les nombres $\tilde{a}_p(\infty)$, $p \in \mathbb{Z}$, sont appelés coefficients de Laurent de f au voisinage de l'infini de la fonction holomorphe f . Le développement (3.15) est appelé développement de Laurent de f au voisinage (épointé) de l'infini.

DÉMONSTRATION. La fonction

$$w \mapsto f(1/w)$$

est holomorphe dans un voisinage épointé de 0 et présente une singularité isolée en l'origine. On peut donc lui appliquer le Corollaire 3.1. Cette fonction (holomorphe dans $D(0, 1/R) \setminus \{0\}$ vu la définition de R) se développe en série de Laurent dans $D(0, 1/R) \setminus \{0\}$ sous la forme

$$f(1/w) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{-k}(0) w^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(0) w^k,$$

où le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 1} b_{-k}(0) X^{-k}$ vaut $+\infty$ et celui de la série entière $\sum_{k \geq 0} b_k(0) w^k$ est au moins égal à $1/R$. On a donc, pour tout z tel que $|z| > R$,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{-k}(0) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(0) z^{-k}.$$

On obtient bien le résultat voulu si l'on remarque que, pour $r > R$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a, d'après le Corollaire 3.1 (formules (3.11)) :

$$(3.17) \quad \begin{aligned} b_p(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}/r} \frac{f(1/u)}{u^{p+1}} du = -\frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto re^{-2i\pi t}} f(\zeta) \zeta^{p+1} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto re^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-p+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

□

3.1.3. Résidu en une singularité isolée et version topologique de la formule des résidus. Soit f une fonction holomorphe au voisinage (épointé) d'un point z_0 du plan complexe. Cette fonction présente donc une singularité isolée en z_0 et se développe en série de Laurent (3.10) au voisinage (épointé) $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

(avec $r > 0$ assez petit) de ce point. Pour $p \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Laurent $a_p(z_0)$ de f au voisinage de z_0 s'exprime sous la forme

$$a_p(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta,$$

où γ désigne n'importe quel lacet continu de support inclus dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et d'indice 1 par rapport au point z_0 . Ceci résulte en effet de la Proposition 1.13, combinée avec la Proposition 1.12 : en effet, si γ est d'indice 1 par rapport à z_0 , γ est (d'après la Proposition 1.13) homotope à $t \in [0, 1] \mapsto z_0 + \rho e^{2i\pi t}$ pour $0 < \rho < r$ dans l'homotopie entre lacets libres $\mathcal{H}_{D(z_0, r) \setminus \{z_0\}}$, et l'on a par conséquent d'après la Proposition 1.12 (volet 2), pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0, 1] \mapsto z_0 + \rho e^{2i\pi t}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = a_p(z_0).$$

Si l'on effectue un changement de variable biholomorphe $z = \pi(w)$ au voisinage de z_0 (tel que $\pi(z_0) = z_0$, mais différent de l'identité), on constate que

$$(3.18) \quad a_p(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta = \int_{\gamma \circ \pi} \frac{1}{(\pi(w) - z_0)^{p+1}} \pi^*[f(\zeta) d\zeta].$$

Du fait de la présence du facteur intempestif $(\pi(w) - z_0)^{-p-1}$ sous l'intégrale curviligne au second membre de (3.18), on constate que, de tous les coefficients de Laurent $a_p(z_0)$, $p \in \mathbb{Z}$, de f au voisinage de sa singularité isolée z_0 , le seul qui présente une robustesse au niveau géométrique (au sens où il est préservé par un tel biholomorphisme local $\pi \neq \text{Id}$) est celui pour lequel un tel facteur intempestif ne figure pas, c'est-à-dire celui correspondant à $p = -1$:

$$(3.19) \quad a_{-1}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma \circ \pi} \pi^*[f(\zeta) d\zeta].$$

Ce constat majeur nous conduit naturellement à particulariser ce coefficient $a_{-1}(z_0)$ et à poser la définition suivante :

DÉFINITION 3.3 (résidu local en un point z_0 de \mathbb{C}). Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de z_0 , présentant donc une singularité isolée en z_0 . Le coefficient de Laurent $a_{-1}(z_0)$ de f au voisinage de z_0 est appelé résidu en z_0 de la forme (abélienne dans un voisinage épointé de z_0) $f(\zeta) d\zeta$ et noté $\text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta]$.

REMARQUE 3.4 (pourquoi le résidu d'une 1-forme et non d'une fonction?). C'est la robustesse géométrique matérialisée par l'invariance par biholomorphisme local (3.19) qui justifie que l'on parle de résidu local en z_0 de la 1-forme $f(\zeta) d\zeta$ et non (comme c'est souvent le cas par commodité dans la littérature) de résidu local en z_0 de la fonction f . Nous conserverons dans ce cours le point de vue consistant à interpréter le résidu local en z_0 comme le résidu d'une 1-forme abélienne (présentant une singularité isolée en z_0) et non d'une fonction holomorphe (présentant une singularité en z_0). Ce point de vue géométrique est très important. Henri Poincaré fut l'un des premiers à souligner le rôle d'un tel concept au travers de son interprétation géométrique (voir par exemple [CGL]).

On peut également définir de manière identique le résidu à l'infini d'une fonction holomorphe présentant une singularité en ce point (*cf.* la Définition 3.2).

DÉFINITION 3.4 (résidu à l'infini). Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert de la forme $\pi^+(V \setminus \{N\})$, où V désigne un voisinage du pôle nord N dans la sphère de Riemann, et π^+ la projection stéréographique sur le plan complexe depuis ce pôle nord. Le résidu à l'infini de la forme $f(\zeta) d\zeta$ (abélienne dans $\{|\zeta| > R\}$ pour R suffisamment grand) est l'opposé du coefficient de Laurent $\tilde{a}_{-1}(\infty)$ de f au voisinage (épointé) de l'infini², soit, d'après les formules (3.16),

$$(3.20) \quad \text{Res}_\infty[f(\zeta) d\zeta] = a_{-1}(\infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{t \in [0,1] \mapsto Re^{2i\pi t}} f(\zeta) d\zeta$$

pour $R > 0$ assez grand (pour que le cercle de centre 0 et de rayon R soit dans $\pi^+(V)$).

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Le résidu local $\text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta]$ (f étant une fonction holomorphe dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ pour $r > 0$ assez petit) matérialise de fait l'obstruction pour que la forme $f(z) dz$, considérée comme forme abélienne (*i.e.* continue et localement exacte, ou encore de classe C^1 et fermée, ce qui revient au même d'après le Théorème de Morera 2.3) soit exacte dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. En effet, on peut écrire, dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$,

$$(3.21) \quad \begin{aligned} f(\zeta) d\zeta &= a_{-1}(z_0) \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + d \left[\sum_{k=2}^{+\infty} a_{-k}(z_0) \frac{(\zeta - z_0)^{1-k}}{1-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0) \frac{(\zeta - z_0)^{k+1}}{k+1} \right] \\ &= \text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta] \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} + d \left[\sum_{k=2}^{+\infty} a_{-k}(z_0) \frac{(\zeta - z_0)^{1-k}}{1-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z_0) \frac{(\zeta - z_0)^{k+1}}{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Si γ désigne un lacet continu de support inclus dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, on peut donc affirmer, compte-tenu du fait que l'intégrale sur ce lacet d'une 1-forme continue exacte dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ est nulle, que

$$(3.22) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta] \times \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta] \times \text{Ind}(\gamma, z_0)$$

d'après la définition de l'indice.

La formule (3.22) constitue la version locale d'un résultat global très important, la *formule des résidus*, dont nous donnons ici une version topologique (une version analytique sera proposée ultérieurement).

THEOREME 3.2 (formule des résidus, version topologique). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} , z_1, \dots, z_N N points de U , et $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$, présentant donc des singularités isolées aux points z_1, \dots, z_N . Soit γ un lacet homotope à un lacet constant $t \in [0, 1] \mapsto \alpha$, $\alpha \in U$, dans l'homotopie \mathcal{H}_U entre lacets libres de U , tel que le support de γ soit inclus dans $U \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$. On a*

$$(3.23) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \text{Res}_{z_j}[f(\zeta) d\zeta] \times \text{Ind}(\gamma, z_j).$$

². Ceci pour respecter le fait que la forme dz/z est transformée par le changement de variables $z \leftrightarrow w$ en la forme $-dw/w$.

DÉMONSTRATION. La fonction

$$z \in U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^N \text{Pol}_{z_j}[f](z)$$

se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de chacun des points z_1, \dots, z_N dans U . Ceci résulte du scindage (3.12) (Remarque 3.3) au voisinage de $z_0 = z_j$ dans U , $j = 1, \dots, N$. Cette fonction se prolonge donc en une fonction \tilde{f} holomorphe dans U . La Proposition 1.12 implique

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = \int_{t \in [0,1] \mapsto \alpha} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = 0.$$

Or, pour $j = 1, \dots, N$, on a, dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$,

$$\text{Pol}_{z_j}[f](\zeta) d\zeta = \text{Res}_{z_j}[f(\zeta) d\zeta] \frac{d\zeta}{\zeta - z_j} + d \left[\sum_{k=2}^{+\infty} a_{-k}(z_j) \frac{(\zeta - z_j)^{1-k}}{1-k} \right].$$

On en déduit

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \text{Pol}_{z_j}[f](\zeta) d\zeta = \text{Res}_{z_j}[f(\zeta) d\zeta] \times \text{Ind}(\gamma, z_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Or

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\gamma} \text{Pol}_{z_j}[f](\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = 0.$$

La formule des résidus globale (3.23) est ainsi démontrée. \square

REMARQUE 3.5. Le Théorème 3.2 reste valable si l'ensemble fini d'exclusion $\{z_1, \dots, z_N\}$ est remplacé par un sous-ensemble \mathcal{Z} de U n'ayant aucun point d'accumulation dans U et évité par le support du lacet γ . Le sous-ensemble $\check{\mathcal{Z}}$ des points $z \in \mathcal{Z}$ tel que $\text{Ind}(\gamma, z) \neq 0$ est dans ce cas un sous-ensemble fini de \mathcal{Z} , à savoir $\{z_1, \dots, z_N\}$, et la formule (3.23) reste valable. En effet, ce sous-ensemble $\check{\mathcal{Z}}$ est certainement borné; s'il était infini, il aurait, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, un point d'accumulation z_{∞} dans $\mathbb{C} \setminus U$ (il ne saurait par hypothèse avoir de point d'accumulation dans U). En ce point z_{∞} , l'indice $I(\gamma, z_{\infty})$ serait non nul du fait que l'indice est localement constant (Proposition 1.9), ce qui est en contradiction (d'après la Proposition 1.12, volet 2) avec le fait que la forme $d\zeta/(\zeta - z_{\infty})$ est fermée (donc localement exacte) dans U et que γ est homotope dans l'homotopie entre lacets libres \mathcal{H}_U au lacet constant $t \in [0, 1] \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$.

3.1.4. Exercices.

EXERCICE 3.1 (développement de Laurent dans une couronne). Soient a et b deux nombres complexes non nuls tels que $|a| < |b|$. Déterminer les développements de Laurent (centrés à l'origine) dans le disque ouvert $D(0, |a|)$, dans la couronne ouverte $\{|a| < |z| < |b|\}$, puis enfin dans la couronne ouverte $\{|z| > |b|\}$, pour la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \mapsto \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

EXERCICE 3.2 (développement de Laurent dans une couronne). Développer en série de Laurent (centrée en 1) dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mapsto \exp\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Développer en série de Laurent (centrée en 0) cette même fonction dans la couronne $\{|z| > 1\}$.

EXERCICE 3.3 (développement de Laurent dans une couronne). Trouver le développement (centré en 0) dans la couronne $\{|z| > 1\}$ de l'unique fonction F holomorphe dans cette couronne, telle que $F(2) > 0$ et $(z+1)F^2(z) = z-1$ pour tout z tel que $|z| > 1$ (on justifiera dans un premier temps l'unicité de F).

EXERCICE 3.4 (développement de Laurent dans une couronne). Pour chacun des deux séries de Laurent suivantes (centrées respectivement en 0 et en 1), trouver une couronne Γ et une fonction f holomorphe de Γ dans \mathbb{C} telle que la série de Laurent représente le développement de Laurent (centré au centre de Γ) de f dans cette couronne :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{|k!|} \quad (\text{avec } 0! = 1) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-|k|} (z-1)^k.$$

EXERCICE 3.5 (développement série de Laurent au voisinage d'un point). Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|f(z)| = O(|z|^{-1+\epsilon})$ lorsque $|z|$ tend vers 0. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de l'origine.

EXERCICE 3.6 (développement de Laurent à l'infini, transformée de Cauchy d'une mesure). Soit K un compact du plan et μ une mesure positive de masse totale finie et de support inclus dans K . Montrer que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus K \mapsto \iint_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$$

(dite *transformée de Cauchy* de μ) admet une singularité isolée à l'infini. Calculer le développement de Laurent de cette fonction au voisinage (épointé) de l'infini. Dans quel disque épointé (centré en l'infini) ce développement est-il valable ?

EXERCICE 3.7 (développement de Laurent à l'infini). Soit f une fonction entière telle que les coefficients de Laurent $a_k(\infty)$ soient tous nuls pour k assez grand. Montrer que f est nécessairement une fonction polynomiale.

EXERCICE 3.8 (développement de Laurent à l'infini, exercice 1.4 revisité). Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. Montrer que F admet une singularité isolée à l'infini et que le développement de Laurent de F au voisinage (épointé) de l'infini est de la forme

$$F(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}, \quad (*)$$

où P est une fonction polynomiale, et les coefficients a_{-k} satisfont une relation de récurrence linéaire du type

$$a_{-k-p} = \sum_{j=0}^{p-1} u_j a_{-k-j} \quad k \geq 1,$$

pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, avec des constantes u_j . Réciproquement, un tel développement de Laurent (comme au second membre de $(*)$) peut-il être interprété comme le développement au voisinage (épointé) de l'infini d'une fraction rationnelle ?

EXERCICE 3.9 (formule des résidus). Soit γ un lacet continu du plan complexe et $R \in \mathbb{Q}(X)$ une fraction rationnelle. On suppose que le support du lacet γ évite tous les pôles de R dans \mathbb{C} . Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R(\zeta) d\zeta$$

est un nombre algébrique.

EXERCICE 3.10 (formule des résidus). Soit γ un lacet continu du plan complexe et $R = N/D \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, avec $\deg D = d > 0$. Soit γ un lacet continu de \mathbb{C} . On suppose que le support de γ évite tous les pôles de R et que, pour chacun de ces pôles α , on a $\text{Ind}(\gamma, \alpha) = 1$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R(\zeta) d\zeta$$

est égale au coefficient de X^{d-1} dans le reste de la division euclidienne de N par D , divisé par le coefficient dominant de D . Que vaut cette intégrale curviligne si $\deg N \leq d - 2$?

3.2. Types de singularités isolées, méromorphie

3.2.1. Classification des singularités isolées. Une première classification des singularités isolées s'opère entre celles qui sont de « vraies » singularités isolées (on parle alors de singularités isolées *non éliminables*) et celles qui sont en fait de « fausses » singularités isolées (auquel cas, on parle de singularités isolées *éliminables* ou *fictives*).

DÉFINITION 3.5 (singularité isolée éliminable ou fictive). Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C}$, et $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$, présentant donc une singularité isolée en z_0 . On dit que z_0 est une singularité isolée *éliminable* (ou encore *fictive*) de f si f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe dans U , ce qui équivaut à dire (du fait de la clause d'unicité dans le développement de Laurent (3.15)) que tous les coefficients de Laurent $a_p(z_0)$, $p < 0$, sont nuls.

Il résulte de la définition des coefficients de Laurent que l'on a l'important résultat suivant, dû à Riemann.

THEORÈME 3.3 (théorème de Riemann sur les singularités isolées). Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in U$, et $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$, présentant donc une singularité isolée en z_0 . Une condition nécessaire et suffisante pour que z_0 soit une singularité isolée fictive est que $|f|$ soit bornée dans un voisinage épointé de z_0 .

DÉMONSTRATION. Si f se prolonge en une fonction holomorphe \tilde{f} au voisinage de z_0 , $|f|$ est bornée dans un voisinage épointé de z_0 . Réciproquement, si tel est le cas, alors, on a, pour $p > 0$,

$$|a_{-p}(z_0)| = \frac{r^p}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \leq Mr^p$$

pour tout $r > 0$ assez petit, M désignant un majorant de $|f|$ dans un voisinage épointé de z_0 . En faisant tendre r vers 0, on trouve bien $a_{-p}(z_0) = 0$ pour tout $p > 0$, d'où le fait que f se prolonge bien (en utilisant le développement de Laurent

(3.15)) en une fonction holomorphe au voisinage de z_0 . La singularité isolée z_0 est bien fictive. \square

On opère un second tri entre cette fois les singularités non éliminables.

DÉFINITION 3.6 (pôles et singularités isolées essentielles). Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \mathbb{C}$, et $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$, présentant donc une singularité isolée en z_0 , singularité isolée que l'on suppose non éliminable. On dit que z_0 est un *pôle* (ou *singularité isolée non essentielle*) de f si et seulement si

$$(3.24) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} |f(z)| = +\infty$$

ou encore, ce qui est équivalent, f ne s'annule pas dans un voisinage épointé de z_0 et

$$(3.25) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0.$$

Si z_0 est ni une singularité éliminable, ni un pôle de f , on dit que z_0 est une *singularité isolée essentielle* de f .

PROPOSITION 3.1 (ordre d'un pôle). Soit U un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in U$, $f : U \setminus \{z_0\}$ holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$ et présentant donc une singularité isolée en z_0 . Cette singularité est un pôle si et seulement si :

$$(3.26) \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, a_{-p}(z_0) \neq 0 \text{ et } a_{-k}(z_0) = 0 \quad \forall k > p.$$

L'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant (3.26) est appelé *ordre du pôle* z_0 .

DÉMONSTRATION. Si (3.26) est remplie, on peut, en utilisant le développement (3.15), affirmer que dans un voisinage épointé de z_0 ,

$$f(z) = \frac{a_{-p}(z_0) + o(|z - z_0|)}{(z - z_0)^p}.$$

Comme $a_{-p}(z_0) \neq 0$, on a bien (3.24), ce qui prouve que z_0 est un pôle. Réciproquement, si z_0 est un pôle, alors, d'après (3.25), la fonction $z \mapsto 1/f(z)$ est holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine et admet pour limite 0 lorsque z tend vers z_0 (avec $z \neq z_0$). D'après le théorème de Riemann (Théorème 3.3), z_0 est une singularité fictive de $1/f$. Il existe donc une fonction g , holomorphe au voisinage de z_0 et non identiquement nulle au voisinage de ce point, mais nulle en z_0 , telle que, dans un voisinage épointé de z_0 , on ait $1/f(z) = g(z)$. Comme g n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0 , il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que le coefficient de Taylor $b_p(z_0)$ de g soit non nul, tandis que tous les coefficients $b_0(z_0), \dots, b_{p-1}(z_0)$ sont nuls (p est la multiplicité de z_0 comme zéro de g , cf. la remarque 2.7). On a

$$g(z) = (z - z_0)^p (b_p(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{p+k}(z_0)(z - z_0)^k) = (z - z_0)^p u(z)$$

au voisinage de z_0 , où u est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 et non nulle en ce point. Dans un voisinage épointé de z_0 , on peut donc écrire :

$$g(z) = \frac{1}{(z - z_0)^p} \times \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^p} \times \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_0) (z - z_0)^k,$$

où les $c_k(z_0)$ sont les coefficients de Taylor en z_0 de la fonction $1/u$ (holomorphe au voisinage de z_0). La condition (3.26) est donc bien remplie du fait de l'unicité du développement de Laurent (3.15). \square

Au voisinage d'une singularité essentielle, la description géométrique du comportement d'une fonction holomorphe s'avère impossible du fait du résultat prouvé par F. Casorati³ et K. Weierstraß.

THÉORÈME 3.4 (théorème de Casorati-Weierstraß). *Soit f une fonction holomorphe dans un disque épointé $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et présentant une singularité essentielle à l'origine. Pour tout $\epsilon \in]0, r[$, on a $f(D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$.*

REMARQUE 3.6 (grand théorème de Picard). Il existe de fait, sous les hypothèses du théorème de Casorati-Weierstraß, un résultat beaucoup plus fort, dû à Emile Picard⁴, connu comme le *grand théorème de Picard* : il existe un point $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $\epsilon \in]0, r[$, la restriction de f à $D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ prend une infinité de fois toute valeur dans $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$. Nous ne démontrerons pas, faute de temps, le grand théorème de Picard dans ce cours. On pourra par exemple consulter le chapitre VI de [Charp].

DÉMONSTRATION. On prouve le Théorème 3.4 par l'absurde. Soit $\epsilon > 0$. Si l'image par f du disque épointé $D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$ n'est pas dense, il existe $w_\epsilon \in \mathbb{C}$, $\rho_\epsilon > 0$, tel que

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}, |f(z) - w_\epsilon| > \rho_\epsilon.$$

La fonction

$$z \in D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} \mapsto \frac{1}{f(z) - w_\epsilon}$$

est holomorphe. Elle est aussi bornée dans un voisinage épointé de z_0 . D'après le théorème de Riemann (Théorème 3.3), la singularité qu'elle présente en z_0 est fictive. Il existe donc une fonction g_ϵ , holomorphe dans $D(z_0, \epsilon)$, telle que

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}, g_\epsilon(z) = \frac{1}{f(z) - w_\epsilon}.$$

La fonction g_ϵ s'annule nécessairement en z_0 (sinon f aurait une singularité fictive en z_0) et ce zéro est isolé. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de z_0 comme zéro de g_ϵ (cf. la remarque 2.7). On a, au voisinage (épointé) de z_0 ,

$$f(z) = w_\epsilon + \frac{1}{g_\epsilon(z)} = w_\epsilon + \frac{u_\epsilon(z)}{(z - z_0)^p},$$

où u_ϵ est une fonction holomorphe au voisinage de z_0 et non nulle en ce point. Ceci impliquerait $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, ce qui est en contradiction avec le fait que f présente en z_0 une singularité essentielle. \square

3. Felice Casorati (1835-1890), mathématicien italien, enseignant à Pavie, prouva ce résultat en 1868, un peu avant K. Weierstraß. Les deux noms y sont associés.

4. Mathématicien français, héritier de Bouquet, Emile Picard (1856-1941) a énoncé ce résultat au tout début de sa carrière (vers 1880).

3.2.2. Méromorphie et calcul de résidu en un pôle. Étant donné un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes dans U , équipé des opérations internes d'addition et de multiplication, ainsi que de l'opération externe de multiplication par un scalaire complexe, est une \mathbb{C} -algèbre. Notre objectif dans ce qui suit dans ce chapitre est d'en décrire explicitement (ce qui sera fait à la section 3.3) le corps des fractions $\mathcal{M}(U)$. Ceci nous amène dans un premier temps à introduire le concept de *fonction méromorphe*⁵ dans un ouvert du plan complexe.

DÉFINITION 3.7 (fonction méromorphe dans un ouvert de \mathbb{C}). Soit U un ouvert de \mathbb{C} . On appelle *fonction méromorphe dans U* toute fonction continue de U dans la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 (ou, ce qui revient au même, puisque \mathbb{S}^2 et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont difféomorphes, de U dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), telle que les points de $f^{-1}(N)$, N désignant le pôle nord de \mathbb{S}^2 , soient tous des points isolés de U , et que f soit holomorphe dans $U \setminus f^{-1}(N)$, c'est-à-dire que les points de $f^{-1}(N)$ soient tous des pôles de $f|_{U \setminus f^{-1}(N)}$.

L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ des fonctions méromorphes dans un ouvert U de \mathbb{C} est naturellement équipé des opérations internes d'addition et de multiplication. Comme on dispose aussi de l'opération externe de multiplication par un scalaire, $(\mathcal{M}(U), +, \times, \cdot)$ hérite d'une structure de \mathbb{C} -algèbre. Si l'on suppose de plus U connexe, cette \mathbb{C} -algèbre est un corps : si f est en effet une fonction méromorphe non identiquement nulle dans U , les zéros de f sont isolés dans U d'après le principe des zéros isolés (Théorème (2.7)), et la fonction $1/f$ est par conséquent une fonction méromorphe dans U , prenant la valeur $N \in \mathbb{S}^2$ précisément en ces zéros isolés ; c'est bien l'inverse de f pour la multiplication car $f \times 1/f \equiv 1$ dans U . Enfin, la dérivation $f \mapsto f'$ réalise un opérateur \mathbb{C} -linéaire du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{M}(U)$ dans lui-même.

Les fonctions méromorphes se prêtent aux calculs algébriques de résidus locaux. Point n'est besoin alors de revenir dans ce cas à la définition (3.19) dont on sait qu'elle implique un calcul d'intégrale (calcul en général impossible, autrement que par des outils d'analyse numérique, donc nécessairement approché). On a en effet le lemme technique suivant.

LEMME 3.1 (calcul du résidu local de $f(\zeta) d\zeta$ en un pôle $z_0 \in \mathbb{C}$). Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} et $z_0 \in f^{-1}(N)$, N désignant le pôle nord sur la sphère de Riemann (i.e. le point à l'infini de \mathbb{C}). Si f se présente dans un voisinage épointé de z_0 sous la forme :

$$(3.27) \quad f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} u_k (z - z_0)^k}{\sum_{k=l}^{\infty} v_k (z - z_0)^k}, \quad v_l \neq 0,$$

le résidu $\text{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta]$ s'obtient comme le coefficient de X^{l-1} dans le quotient

$$(3.28) \quad \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k X^k : \sum_{k=l}^{\infty} v_k X^{k-l} \right]_{\text{puis. croiss.}} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k X^k$$

de $\sum_{k \geq 0} u_k X^k$ par $\sum_{k \geq l} v_k X^{k-l}$ suivant l'algorithme de division suivant les puissances croissantes⁶. En particulier, dire que f peut s'exprimer dans un voisinage

5. Il semble que le préfixe « méro- » soit ici à interpréter au sens « partiellement » (au contraire de « holo- » pour « entièrement »).

6. Voir le cours d'Algèbre 1.

épointé de z_0 sous la forme $f(z) = g(z)/h(z)$, où g et h sont holomorphes au voisinage de z_0 et telles que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, équivaut à dire que f présente un pôle d'ordre 1 (on dit aussi pôle simple) au point z_0 ; on a dans ce cas particulier important :

$$(3.29) \quad \operatorname{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta] = \operatorname{Res}_{z_0} \left[\frac{g(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta \right] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

DÉMONSTRATION. Ceci provient de la définition de $\operatorname{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta]$ comme le coefficient $a_{-1}(z_0)$. On constate en effet que, si f se représente sous la forme (3.27) dans un voisinage épointé de z_0 et si les w_k , $k \geq 0$, sont définis algorithmiquement par (3.28), le développement de Laurent (3.15) de f au voisinage (épointé) de z_0 est donné par

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (z - z_0)^{k-1}.$$

□

REMARQUE 3.7 (une formule dans le cas d'un pôle multiple?). Souvent, on trouve dans les ouvrages la formule suivante, valable dans le cas où f présente un pôle d'ordre exactement $p > 1$ (on parle alors de *pôle multiple* en z_0) :

$$(3.30) \quad \operatorname{Res}_{z_0}[f(\zeta) d\zeta] = \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{p-1} \left[(z - z_0)^p f(z) \right]_{|z=z_0}.$$

Une telle formule est cependant à proscrire du point de vue pratique, au moins pour deux raisons : d'une part, la division par $(p-1)!$ qu'elle implique au second membre s'avère de fait une division fictive (car compensée en réalité par l'expression développée de la dérivée $(p-1)$ -ième figurant au numérateur de ce même second membre⁷); d'autre part, le calcul des dérivées successives d'une fonction est en général autrement plus lourd à gérer en terme de complexité algorithmique que ne l'est l'algorithme de division suivant les puissances croissantes impliqué dans (3.28).

EXEMPLE 3.1. Un exemple particulièrement important de calcul de résidu en un pôle simple est celui de $\operatorname{Res}_{z_0}[(f'(\zeta)/f(\zeta)) d\zeta]$, lorsque f est une fonction méromorphe dans U ayant tous ses zéros isolés (*i.e.* identiquement nulle dans aucune composante connexe de U). Les pôles de f'/f sont alors les zéros de f et les pôles de f . Ce sont tous des pôles simples de f'/f . Si z_0 est en effet un zéro de f de multiplicité $\nu(z_0) \in \mathbb{N}^*$, on a, au voisinage de z_0 ,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{\nu(z_0)} (a_{\nu(z_0)}(z_0) + o(|z - z_0|)) \\ f'(z) &= \nu(z_0)(z - z_0)^{\nu(z_0)-1} (a_{\nu(z_0)}(z_0) + o(|z - z_0|)) \end{aligned}$$

avec $a_{\nu(z_0)}(z_0) \neq 0$ (*cf.* la remarque 2.7). Par conséquent, z_0 est un pôle simple de f'/f et l'on a :

$$(3.31) \quad \operatorname{Res}_{z_0} \left[\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right] = \nu(z_0).$$

7. Que l'on ait à gérer dans des calculs algébriques pareille division peut représenter un handicap sérieux si l'on envisage de transposer ces calculs au cadre de la caractéristique positive (et non plus, comme c'est le cas ici avec le corps des complexes, en nous limitant au cadre de la caractéristique zéro).

Si z_0 est maintenant un pôle de f d'ordre $\nu(z_0) \in \mathbb{N}^*$, on a, au voisinage (épointé) de z_0 ,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-\nu(z_0)} (a_{-\nu(z_0)}(z_0) + o(|z - z_0|)) \\ f'(z) &= -\nu(z_0)(z - z_0)^{-\nu(z_0)-1} (a_{-\nu(z_0)}(z_0) + o(|z - z_0|)) \end{aligned}$$

avec $a_{-\nu(z_0)}(z_0) \neq 0$, et par conséquent z_0 est encore un pôle simple de f'/f , mais on a cette fois :

$$(3.32) \quad \text{Res}_{z_0} \left[\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right] = -\nu(z_0).$$

Pour clôre cette sous-section, signalons ici que le concept de *fonction méromorphe* (Définition 3.7) peut être étendu aux fonctions définies sur les ouverts de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 . Cette sphère de Riemann doit toujours être comprise comme l'union de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ (N désignant le pôle nord), qui est ouvert de \mathbb{S}^2 (en correspondance avec \mathbb{C} *via* la projection stéréographique π^+), et du pôle nord N , figurant, lui, le point à l'infini du plan complexe.

DÉFINITION 3.8 (fonction méromorphe dans un ouvert de \mathbb{S}^2). Soit U un ouvert de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 et π^+ la projection stéréographique depuis le pôle nord N . On appelle *fonction méromorphe dans U* toute fonction continue de U dans \mathbb{S}^2 , telle que les points de $f^{-1}(N)$ soient tous des points isolés de U , et que f soit holomorphe dans $U \setminus f^{-1}(N)$. Il est ici entendu que, si $N \in U$ et $f(N) \neq N$, dire que f est holomorphe dans un voisinage V de N signifie que la restriction de f à $V \setminus \{N\} \simeq \pi^+(V \setminus \{N\})$ (après identification de ces deux ouverts par le biais de la projection stéréographique π^+) est holomorphe et telle que

$$w \mapsto f(1/w)$$

(holomorphe pour $0 < |w| < \epsilon$ pour ϵ assez petit) présente une singularité fictive en $w = 0$. Si f est méromorphe dans U et telle que $f^{-1}(N) = \emptyset$, on dit que f est *holomorphe* dans U .

REMARQUE 3.8. Dire que f est méromorphe au voisinage de N avec $f(N) = N$ signifie donc, si l'on revient au plan complexe, que la fonction

$$w \mapsto f(1/w)$$

(définie pour $0 < |w| < \epsilon$ pour ϵ assez petit) présente un pôle en $w = 0$.

EXEMPLE 3.2 (fractions rationnelles, homographies). Les fractions rationnelles constituent des exemples de fonctions méromorphes dans la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 tout entière. Il se trouve d'ailleurs (*cf.* l'exercice 3.13) que les fractions rationnelles sont les seules fonctions méromorphes dans \mathbb{S}^2 toute entière. Parmi elles, les *homographies*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

constituent le modèle le plus simple (un seul pôle, simple, pouvant être le point N , et un seul zéro, simple aussi). Équipé de la loi de composition, l'ensemble des homographies constitue un groupe. Les homographies partagent la propriété algébrique importante de *préserv*er le *birapport de quatre points distincts pris arbitrairement dans la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$* (autre incarnation, on l'a vu, de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , *cf.* la sous-section 1.1.3).

3.2.3. Méromorphie et variation de l'argument. Les calculs effectués dans l'exemple 3.1 et conduisant aux formules (3.31) ou (3.32) ont pour conséquence, lorsqu'on les fait entrer dans la formule des résidus (3.23), version topologique (Théorème 3.2), la très importante formule de variation de l'argument.

THEORÈME 3.5 (formule de variation de l'argument). *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} , f une fonction méromorphe et non identiquement nulle dans U . Soit γ un lacet continu de U homotope à un point dans U (dans l'homotopie \mathcal{H}_U entre lacets libres de U), tel que le support de γ évite les zéros (nécessairement isolés dans U) et les pôles (isolés dans U par définition) de f . On a alors la formule*

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \text{Ind}(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \\ &= \sum_{\{\alpha; f(\alpha)=0\}} \text{Ind}(\gamma, \alpha) \nu(\alpha) - \sum_{\beta \in \{\text{pôle de } f\}} \text{Ind}(\gamma, \beta) \nu(\beta), \end{aligned}$$

étant entendu qu'il n'y a au plus qu'un nombre fini de zéros α ou pôles β de f dans U tels que $\text{Ind}(\gamma, \alpha) \neq 0$ ou $\text{Ind}(\gamma, \beta) \neq 0$ (conformément à la Remarque 3.5, puisque l'ensemble des zéros-pôles de f est un ensemble de points tous isolés dans U).

DÉMONSTRATION. En remplaçant $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ par un chemin C^1 par morceaux γ_σ correspondant au choix d'un pas de subdivision de $[0, 1]$ assez petit, on peut faire en sorte que le support de γ_σ évite tous les zéros ou pôles de f , que l'on ait, d'après la Proposition 1.8,

$$\text{Ind}(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{f \circ \gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{f \circ \gamma_\sigma} \frac{dz}{z},$$

et qu'enfin (cf. la Proposition 1.9), pour tout zéro ou pôle z_0 de f , $\text{Ind}(\gamma, z_0) = \text{Ind}(\gamma_\sigma, z_0)$. D'après la définition de l'intégrale curviligne d'une 1-forme continue sur un chemin C^1 par morceaux (cf. (1.42), Définition 1.3.2), on a

$$\int_{f \circ \gamma_\sigma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_\sigma} f^*[dz/z] = \int_{\gamma_\sigma} \frac{f'(\zeta) d\zeta}{f(\zeta)}.$$

On conclut en appliquant la formule des résidus (3.23) du Théorème 3.2 (complété avec la remarque 3.5) avec f'/f en place de f et γ_σ en place de γ . Les calculs de résidus impliqués sont exactement ceux qui ont été donnés dans l'exemple 3.1 (formules (3.31) ou (3.32) suivant que le pôle de f'/f soit un zéro α ou un pôle β de f). \square

3.2.4. La formule des résidus, version analytique. La formule des résidus, énoncée jusque là sous une version topologique (formule (3.23), Théorème 3.2) se décline aussi (comme c'était le cas pour la formule de Cauchy, cf. le Théorème 2.4) sous l'angle analytique. Ce résultat s'avère capital pour des calculs explicites d'intégrales⁸.

THEORÈME 3.6 (formule des résidus, version analytique). *Soit U un ouvert relativement compact de \mathbb{C} tel que $\bar{U} = K$ soit un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3 de Green-Riemann. Soit f une fonction méromorphe dans*

8. Attention ! pas de primitive, car il n'implique que des intégrales curvilignes sur des lacets C^1 par morceaux du plan complexe, et non sur des chemins arbitraires joignant deux points *a priori* distincts.

U , continue dans \bar{U} , telle que $f(\partial K) \subset \mathbb{C}$. Alors f ne peut présenter qu'un nombre fini de pôles z_1, \dots, z_N dans U et l'on a la formule analytique des résidus :

$$(3.34) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_+} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \text{Res}_{z_j}[f(\zeta) d\zeta],$$

où ∂K_+ désigne le bord orienté de K , comme dans ce même théorème 1.3 (sens trigonométrique pour le bord externe, sens des aiguilles d'une montre pour le bord interne).

DÉMONSTRATION. Qu'il n'y ait qu'un nombre fini de pôles pour f dans U résulte du fait que ces pôles sont isolés (puisque f est méromorphe dans U), et que f est bornée au voisinage du bord de U (puisque continue sur \bar{U} et à valeurs dans U sur ce bord) : l'ensemble des pôles de f ne saurait en effet être infini, car il aurait sinon (d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß), un point d'accumulation dans $\bar{U} = K$. Ce point ne peut être qu'à la frontière de U , ce qui est en contradiction avec le fait que f est bornée sur ∂K . La fonction

$$z \in U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^N \text{Pol}_{z_j}[f](z)$$

présente des singularités isolées fictives aux points z_1, \dots, z_N , et se prolonge donc en une fonction \tilde{f} holomorphe dans U et continue dans \bar{U} . D'après la formule de Green-Riemann ((1.54), Théorème 1.3), on a

$$\int_{\partial K_+} \tilde{f}(\zeta) d\zeta = 2i \iint_K \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) d\xi d\eta = 0.$$

On a donc

$$(3.35) \quad \int_{\partial K_+} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \int_{\partial K_+} \text{Pol}_{z_j}[f](\zeta) d\zeta.$$

D'autre part, le Théorème 2.4 (on applique la formule (2.16) à la fonction 1 avec $z = z_j$) implique, pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_+} \text{Pol}_{z_j}[f](\zeta) d\zeta &= \sum_{p=0}^{\infty} a_{-p-1}(z_j) \int_{\partial K_+} \frac{d\zeta}{(\zeta - z_j)^{p+1}} \\ &= 2i\pi a_{-1}(z_j) = 2i\pi \text{Res}_{z_j}[f(\zeta) d\zeta]. \end{aligned}$$

La formule (3.34) résulte donc de (3.35). \square

La formule des résidus joue un rôle majeur aux fins du calcul explicite (et exact, au lieu d'être simplement numérique) de certaines intégrales définies. De nombreux exercices en ce sens sont proposés dans la sous-section 3.2.6 ci-dessous. Outre ses nombreuses applications en ingénierie mathématique, en relation avec les transformations de Fourier, Mellin ou Laplace (cf. les exercices 3.23, 3.24, 3.25 ci-dessous), on la retrouve comme un puissant outil en théorie analytique des nombres (théorème des nombres premiers, théorème de la progression arithmétique de Dirichlet,...). Cette formule joue également un rôle important pour étudier le comportement d'intégrales curvilignes à paramètres

$$F : x \in \Omega \mapsto \int_{\gamma} \Phi(x, \zeta) d\zeta,$$

où Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^p , γ un chemin continu de support inclus dans un ouvert U de \mathbb{C} , $\Phi : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui, pour tout x fixé dans Ω , est méromorphe en ζ , avec pôles (dans les bons cas, indépendants de x) dans U , hors du support de γ . Pour étudier le comportement asymptotique de F lorsque par exemple x tend dans Ω vers l'infini (si Ω est non borné) ou plus généralement vers un point x_0 de la frontière de Ω , il s'avère souvent plus judicieux de modifier le choix du chemin γ (quitte à introduire dans l'expression de F des résidus $\text{Res}_\alpha[\Phi(\zeta, x)]$, où α est un pôle de $\zeta \mapsto \Phi(x, \zeta)$ dans U) en fonction du graphe de la fonction $\zeta \in U \mapsto |\Phi(x, \zeta)|$. Le choix d'un chemin privilégiant la brutalité des « accidents de parcours » (plonger brutalement dans les vallées, en suivre le fond aussi longtemps que possible, escalader les cols suivant la ligne de plus grande pente le plus tard possible pour passer d'une vallée à une autre, *etc.*) s'avère souvent plus judicieux, pour appréhender le comportement asymptotique de

$$x \mapsto \int_{\gamma} \Phi(x, \zeta) d\zeta$$

lorsque x tend vers x_0 , que ne le serait un choix de parcours γ plus « neutre », au sens où l'on se contente de suivre au mieux les lignes de niveau pour éviter un surcroît de fatigue. Cette méthode heuristique est dite *méthode du col*. On pourra se reporter à [Dieud] pour en trouver des exemples d'application. Il est important de mentionner ce principe ici. La célèbre méthode dite de la *phase stationnaire* en fournit un terrain d'application classique (voir [Dieud]).

3.2.5. Le théorème de Rouché, version analytique. Comme conséquence de la formule des résidus (Théorème 3.6), nous sommes en mesure d'en énoncer un cas particulier important, dont le premier volet apparaît comme une version analytique du principe de la formule de variation de l'argument (Théorème 3.5). Le second volet de l'énoncé constitue, lui, une version analytique du théorème de Rouché (dont la version topologique constituait l'énoncé du Théorème 1.6).

THEORÈME 3.7 (formule de variation de l'argument et théorème de Rouché, versions analytiques). *Soit U un ouvert relativement compact de \mathbb{C} tel que $\bar{U} = K$ soit un compact à bord orienté comme dans le Théorème 1.3 de Green-Riemann. Soit f une fonction méromorphe au voisinage de K , ne présentant aucun zéro ni pôle sur la frontière de K .*

– *Alors f ne peut présenter qu'un nombre fini de zéros ou pôles z_1, \dots, z_N dans U et l'on a :*

$$(3.36) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N_{\text{zer}}[f; U] - N_{\text{pol}}[f; U],$$

où ∂K_+ désigne le bord orienté de K , comme dans ce même théorème 1.3 (sens trigonométrique pour le bord externe, sens des aiguilles d'une montre pour le bord interne), $N_{\text{zer}}[f; U]$ désigne le nombre de zéros de f dans U (comptés chacun avec leur multiplicité) et $N_{\text{pol}}[f; U]$ désigne le nombre de pôles de f dans U (comptés chacun avec leur ordre).

– *Si de plus g est une autre fonction méromorphe au voisinage de K et telle que*

$$(3.37) \quad \forall z \in \partial K, \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

alors g (comme f) ne présente ni zéro, ni pôle sur ∂K , n'a qu'un nombre fini de zéros ou pôles dans U , et l'on a :

$$(3.38) \quad N_{\text{zer}}[g; U] - N_{\text{pol}}[g; U] = N_{\text{zer}}[f; U] - N_{\text{pol}}[f; U].$$

DÉMONSTRATION. Prouvons la première assertion. Le fait que f ne présente qu'au plus un nombre fini de zéros et de pôles dans U résulte du fait que, puisque f ne saurait être identiquement nulle dans U (f ne s'annule pas sur $\partial U = \partial K$), les zéros-pôles de f sont des points isolés dans U . L'ensemble des zéros-pôles de f ne saurait avoir de point d'accumulation dans le compact $K = \bar{U}$. Il est donc au plus fini d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß. La formule (3.36) est un cas particulier de la formule (3.34) : on travaille avec la forme $(f'(\zeta)/f(\zeta)) d\zeta$ au lieu de $f(\zeta) d\zeta$, et on utilise les calculs de résidus (3.31) ou (3.32) de l'exemple 3.1.

Pour ce qui est de la seconde assertion, on remarque que g ne saurait présenter ni pôle ni zéro sur ∂K du fait de la condition (3.37) : on ne saurait en effet avoir $\infty < \infty$ (ce qui se produirait si g avait un pôle β sur ∂K) ou $|f(\alpha)| < |f(\alpha)|$ en un point de ∂K . D'autre part, pour tout lacet γ_j impliqué dans le bord orienté de K , on a

$$(3.39) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \text{Ind}(f \circ \gamma_j, 0) = \text{Ind}(g \circ \gamma_j, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta,$$

l'égalité centrale résultant du théorème de Rouché topologique (Théorème 1.6) que l'on peut appliquer avec les deux lacets $\Gamma_{j,0} = f \circ \gamma_j$ et $\Gamma_{j,1} = g \circ \gamma_j$ puisque la condition (3.37) implique

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\Gamma_{j,0}(t) - \Gamma_{j,1}(t)| < |\Gamma_{j,0}(t)| + |\Gamma_{j,1}(t)|.$$

En ajoutant toutes les égalités (3.39) pour $j = 1, \dots, N$, on trouve bien l'égalité (3.38) voulue. \square

Un corollaire important du théorème de Rouché (version analytique) est le théorème d'Hurwitz⁹.

THEORÈME 3.8 (théorème d'Hurwitz). *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions holomorphes dans U , toutes injectives dans U , convergeant vers une fonction holomorphe $f \in \mathcal{H}(U)$ uniformément sur tout compact de U . Alors, soit f est aussi injective, soit f est constante.*

DÉMONSTRATION. Si f n'est ni constante, ni injective, $f' \not\equiv 0$ (car U est connexe), et il existe nécessairement deux points distincts z_1 et z_2 de U tels que $z_1 \neq z_2$ et $f(z_1) = f(z_2) = w$. La fonction $f - w$ s'annule en z_1 et z_2 avec des multiplicités respectives $\nu(z_1) \geq 1$ et $\nu(z_2) \geq 1$, toutes deux finies. D'après le théorème de Rouché version analytique (volet 2 du Théorème 3.7), $f_n - w$ a, pour n assez grand, exactement $\nu(z_1) \geq 1$ zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans tout disque $\overline{D}(z_1, \rho_1) \subset U$ dans lequel z_1 est le seul zéro de $f - w$. De même $f_n - w$ a, pour n assez grand, exactement $\nu(z_2) \geq 1$ zéros (comptés avec leurs multiplicités) dans tout disque $\overline{D}(z_2, \rho_2) \subset U$ dans lequel z_2 est le seul zéro de $f - w$. Ceci est contradictoire avec le fait que toutes les fonctions f_n (en particulier pour n assez grand) sont injectives dans U . Le théorème d'Hurwitz est ainsi démontré par l'absurde. \square

9. Mathématicien allemand (1859-1919), Adolf Hurwitz jeta, à partir de ses travaux sur les surfaces de Riemann, les bases de la théorie moderne des courbes algébriques complexes.

3.2.6. Exercices.

EXERCICE 3.11 (classification des singularités). Quelles sont les singularités isolées (et leur type) des fonctions suivantes :

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 - 1} \cos\left(\frac{\pi z}{z + 1}\right), \quad z \mapsto \cotan z - \frac{1}{z}, \quad z \mapsto z(e^{1/z} - 1)$$

(toujours considérées dans le plus grand ouvert de \mathbb{C} où leur expression permet de les définir) ?

EXERCICE 3.12 (classification des singularités).

a) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine, telle que $|f(z)| \leq C|z|^{-1/2}$ lorsque $|z|$ tend vers 0. Montrer que la singularité de f en 0 est une singularité éliminable (c'est-à-dire que f peut se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de 0).

b) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine. Montrer que 0 est une singularité essentielle de f si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} [r^n (\sup_{|z|=r} |f(z)|)] = +\infty.$$

En déduire que si g est une fonction holomorphe au voisinage de 0, non identiquement nulle, et telle que $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ a une singularité essentielle en 0 dès que f en a une.

c) Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'origine, présentant en 0 un pôle. Soit g une fonction holomorphe dans \mathbb{C} non polynomiale. Montrer que 0 est une singularité essentielle de $g \circ f$.

EXERCICE 3.13 (principe GAGA¹⁰). Une fonction f , holomorphe hors de $\overline{D(0, R)}$ pour R assez grand, est dite présenter un pôle à l'infini si et seulement si la fonction $w \mapsto f(1/w)$ présente un pôle en $w = 0$. Montrer que toute fonction méromorphe sur \mathbb{C} et présentant un pôle à l'infini est nécessairement une fraction rationnelle. Énoncer et prouver l'assertion réciproque. Montrer que, si f est une fraction rationnelle, donc une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 (au sens de la Définition 3.8, alors on a

$$\sum_{\alpha \in f^{-1}(N)} \operatorname{Res}_\alpha [f(\zeta) d\zeta] = 0.$$

EXERCICE 3.14 (calcul de résidus locaux). Soit $w \in \mathbb{C}$. Quels sont les pôles de la fonction

$$f_w : z \mapsto \frac{\cotan(\pi z)}{z^2(z - w)} ?$$

Calculer les résidus en ces pôles de la forme différentielle $f_w(z) dz$.

EXERCICE 3.15 (résidu local dans le cadre C^∞). Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, admettant un zéro isolé de multiplicité $\nu \in \mathbb{N}^*$ en ce point. Montrer que, pour toute fonction C^∞ au voisinage de l'origine, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|f|=\epsilon} \frac{\varphi(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{(\nu - 1)!} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial \zeta^{\nu-1}} \left[\frac{\zeta^\nu \varphi(\zeta)}{f(\zeta)} \right]_{|\zeta=0},$$

10. « Géométrie algébrique, Géométrie analytique ». Ce principe célèbre (ici formulé dans le cadre facile de la dimension 1) est en fait un cas particulier d'un principe général formulé par le mathématicien français Jean Pierre Serre (1926 - ...) dans un célèbre article paru en 1956 : toute fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est nécessairement rationnelle.

où le lacet $\{|f| = \epsilon\}$ (on expliquera pourquoi il s'agit bien d'un lacet simple dont le support entoure l'origine lorsque ϵ est suffisamment petit) est orienté dans le sens des arguments croissants. On pensera à effectuer d'abord un changement de variable holomorphe local $z \leftrightarrow w$ au voisinage de l'origine pour se ramener au cas où f est de la forme $w \mapsto f(w) = w^\nu$, cf. la preuve du Théorème 2.8.

EXERCICE 3.16 (fonction Gamma). On considère la fonction Γ définie dans le demi-plan ouvert $\Pi^+ := \{\operatorname{Re} z > 0\}$ par

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

(voir l'exercice 2.6). Dédurre du fait que Γ vérifie dans ce demi-plan l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ qu'elle admet un prolongement à \mathbb{C} tout entier en une fonction méromorphe dont les pôles sont $0, -1, -2, \dots$. Calculer les résidus en tous ces pôles de la forme $\Gamma(z) dz$.

EXERCICE 3.17 (une relation entre Γ et ζ , suite). Cet exercice constitue le prolongement de l'exercice 2.8. Soit Π_1^+ le demi-plan ouvert $\{\operatorname{Re} z > 1\}$.

a) Montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

est holomorphe dans Π_1^+ et qu'il existe une suite de nombres complexes $(a_k)_{k \geq 0}$ telle que la série entière $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$ soit de rayon de convergence 2π et que, pour tout $z \in \Pi_1^+$, on ait

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z+k-1}.$$

b) On rappelle (cf. l'exercice 2.8) que, si ζ désigne la fonction zéta de Riemann

$$z \in \Pi_1^+ \mapsto \zeta(z) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^z}$$

(cf. l'exercice 2.7), on a l'identité

$$\forall z \in \Pi_1^+, \quad \Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt,$$

et que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

est une fonction entière. Montrer que la fonction $z \mapsto \zeta(z)\Gamma(z)$ se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} dont on donnera la liste des pôles. Que valent les résidus en ces pôles de la forme $\zeta(z)\Gamma(z) dz$? Montrer que le prolongement de ζ à $\{\operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$ (cf. l'exercice 2.32) est méromorphe, de seul pôle $z = 1$, le résidu de $\zeta(z) dz$ en ce pôle valant 1.

EXERCICE 3.18 (fonctions elliptiques \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' de Weierstraß). Soient ω_1 et ω_2 deux nombres complexes non nuls tels que $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. On note Λ le sous-groupe additif de \mathbb{C} défini par $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (un tel sous-groupe additif est appelé *réseau* de \mathbb{C}).

a) Dénombrer le nombre de points du réseau Λ appartenant à la frontière du parallélogramme plein $\overline{\Pi_N} := \{t\omega_1 + s\omega_2; (t, s) \in [-N, N]^2\}$. En déduire que l'on a

$$\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3} < +\infty.$$

b) Montrer que la suite de fonctions $(\mathfrak{P}_N)_{N \geq 1}$, où

$$\mathfrak{P}_N : z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in (\overline{\Pi_N} \cap \Lambda) \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right),$$

converge (uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \Lambda$) vers une fonction holomorphe \mathfrak{P} , puis que \mathfrak{P} se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , vérifiant $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(-\cdot)$ (\mathfrak{P} est paire). Quels sont les pôles de cette fonction méromorphe \mathfrak{P} ? Quel est l'ordre de ces pôles? Que valent les résidus de $\mathfrak{P}(\zeta) d\zeta$ en ces pôles?

c) Montrer que l'on a $\mathfrak{P}' = -2\Omega$, où Ω est la fonction méromorphe, de pôles aux points du réseau Λ , définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda, \Omega(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{\lambda \in \overline{\Pi_N} \cap \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3} \right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3}.$$

Montrer que la fonction \mathfrak{P}' vérifie $\mathfrak{P}'(\cdot + \lambda) \equiv \mathfrak{P}'$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. En déduire que \mathfrak{P} vérifie aussi $\mathfrak{P}(\cdot + \lambda) \equiv \mathfrak{P}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (on dit que les fonctions \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' sont Λ -périodiques).

d) Quelles sont les fonctions entières Λ -périodiques (on pensera à utiliser le théorème de Liouville)? Montrer qu'il existe des constantes complexes A et B (que l'on exprimera sous forme de sommes de séries numériques en terme du réseau Λ) telles que la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda \mapsto (\mathfrak{P}'(z))^2 - 4(\mathfrak{P}(z))^3 - A(\mathfrak{P}(z))^2 - B\mathfrak{P}(z)$$

se prolonge en une fonction entière Λ -périodique. En déduire qu'il existe trois nombres complexes a, b, c (dépendant du réseau Λ) tels que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, le point $(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$ appartienne à la cubique Γ_Λ d'équation

$$Y^3 = 4(X - a)(X - b)(X - c)$$

dans $\mathbb{C}_{X,Y}^2$. Les deux fonctions Λ -périodiques $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ qui paramètrent cette cubique Γ_Λ sont dites *fonctions elliptiques de Weierstraß* attachées au réseau Λ . On notera l'analogie avec le couple de fonctions *trigonométriques* (\cos, \sin) (2π périodiques en z , seulement dans une direction du plan et non plus cette fois dans deux comme c'est le cas pour \mathfrak{P} et \mathfrak{P}'), paramétrant, elles, la *conique* dont l'équation dans $\mathbb{C}_{X,Y}^2$ est $Y^2 = -(X - 1)(X + 1)$.

EXERCICE 3.19 (variation de l'argument et formule de résidus). Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D}(0, 3)$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque, et $\gamma : t \mapsto 3e^{2i\pi t}$. On suppose

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2 f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -4.$$

Que valent les zéros de f dans le disque $D(0, 3)$?

EXERCICE 3.20 (lemme de préparation de Weierstraß pour les fonctions de deux variables). Soit f une fonction continue dans $\overline{D(0,1)} \times \overline{D(0,1)}$, telle que, pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, la fonction

$$f_w : z \longmapsto f(z, w)$$

soit holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1)$. On suppose aussi que f ne s'annule pas dans $\{|z|=1\} \times D(0,1)$.

a) Montrer que pour tout $w \in \overline{D(0,1)}$, f_w n'a qu'un nombre fini de zéros (chacun compté avec sa multiplicité) dans $D(0,1)$, et que ce nombre ne dépend pas de w . On l'appelle dans la suite p .

b) On suppose aussi que, tout $z \in D(0,1)$, la fonction $w \mapsto f(z, w)$ est holomorphe dans $D(0,1)$. Montrer qu'il existe des fonctions A_1, \dots, A_p holomorphes dans $D(0,1)$, telles que dans $D(0,1) \times D(0,1)$,

$$f(z, w) = (z^p + A_1(w)z^{p-1} + \dots + A_{p-1}(w)z + A_p(w))g(z, w),$$

où g est une fonction continue de $D(0,1) \times D(0,1)$ dans \mathbb{C}^* telle que, pour tout $w \in D(0,1)$, $z \mapsto g(z, w)$ soit une fonction holomorphe dans $D(0,1)$ (et vice versa en échangeant z et w). Les zéros de f dans $D(0,1) \times D(0,1)$ peuvent-ils être des points isolés? (on utilisera les formules de Newton reliant les sommes de Newton S_1, \dots, S_p de p nombres aux fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ de ces mêmes p nombres).

EXERCICE 3.21 (formule des résidus et interpolation-division de Lagrange). Soit U un ouvert borné de \mathbb{C} tel que $\overline{U} = K$ soit un compact à bord orienté (comme dans l'énoncé du Théorème 3.6), f, h deux fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert V de K , telles que f ne s'annule pas sur ∂K .

a) Montrer que, pour tout $z \in U$, la fonction

$$g_z : \zeta \in K \longmapsto \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

est une fonction holomorphe dans $V \setminus \{z\}$, présentant une singularité fictive au point z .

b) Dédurre de la formule de Cauchy (version analytique), la formule

$$\begin{aligned} \forall z \in U, \quad h(z) &= \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{h(\zeta)}{f(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_+} h(\zeta) \frac{g_z(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{h(\zeta)}{f(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta + \sum_{\alpha \in f^{-1}(0) \cap U} \operatorname{Res}_\alpha [(h(\zeta)g_z(\zeta)/f(\zeta)) d\zeta]. \end{aligned}$$

c) Montrer que, si de plus les zéros de f dans U sont tous simples, on a

$$\forall z \in U, \quad h(z) = \frac{f(z)}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{h(\zeta)}{f(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta + \sum_{\alpha \in U \cap f^{-1}(0)} h(\alpha) \frac{1}{f'(\alpha)} \frac{f(z)}{z - \alpha}$$

(on reconnaît au second membre les interpolateurs de Lagrange).

d) On suppose que $f = f_1 f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions holomorphes dans V n'ayant que des zéros simples dans U et ne s'annulant pas sur ∂K . Vérifier, si les

ensembles $f_1^{-1}(0) \cap U$ et $f_2^{-1}(0) \cap U$ sont disjoints, la formule :

$$\forall z \in U, h(z) = \frac{f_1(z)f_2(z)}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{h(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)(\zeta-z)} d\zeta + \\ + f_1(z) \left(\sum_{\beta \in f_2^{-1}(0) \cap U} \frac{h(\beta)}{f_1(\beta)} \frac{f_2(z)}{f_2'(\beta)(z-\beta)} \right) + f_2(z) \left(\sum_{\alpha \in f_1^{-1}(0) \cap U} \frac{h(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{f_1(z)}{f_1'(\alpha)(z-\alpha)} \right).$$

Montrer que, si l'on ne suppose plus les zéros de f_1 et de f_2 dans U simples (mais que l'on maintienne les hypothèses $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \cap U = \emptyset$ et $(f_1 f_2)^{-1}(0) \cap \partial K = \emptyset$), on conserve une identité

$$\forall z \in U, h(z) = \frac{f_1(z)f_2(z)}{2i\pi} \int_{\partial K_+} \frac{h(\zeta)}{f_1(\zeta)f_2(\zeta)(\zeta-z)} d\zeta + f_1(z)A_1(z) + f_2(z)A_2(z),$$

où A_1, A_2 sont deux fonctions holomorphes dans U que l'on explicitera.

e) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degrés strictement positifs n'ayant aucune racine commune dans \mathbb{C} . Dédurre de e) la possibilité d'expliciter une *identité de Bézout*

$$1 \equiv P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \quad \deg Q_1 \leq \deg P_2 - 1, \quad \deg Q_2 \leq \deg P_1 - 1$$

sans utiliser (comme on le fait classiquement) l'algorithme de division euclidienne étendu.

EXERCICE 3.22 (calculs *via* la formule des résidus de transformées de Fourier de fonctions rationnelles). En utilisant la formule des résidus (version analytique), vérifier, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|\omega|}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^{2n}} dt = \frac{\pi}{n} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \zeta_{n,k} e^{i\zeta_{n,k}|\omega|} \right), \quad \text{où } \zeta_{n,k} := \exp \frac{(2k-1)i\pi}{2n}$$

(utiliser dans les deux cas pour contour, soit le chemin $t \in [-R, R] \mapsto t$ concaténé avec $t \in [0, \pi] \mapsto Re^{it}$, où R tend vers $+\infty$, dans le cas où $\omega < 0$, soit le chemin $t \in [-R, R] \mapsto t$ concaténé avec $t \in [0, \pi] \mapsto Re^{-it}$, où R tend vers $+\infty$, dans le cas où $\omega > 0$).

EXERCICE 3.23 (formule des résidus et transformée de Fourier). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue non identiquement nulle sur \mathbb{R} , admettant un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier, ce prolongement (noté encore f) étant continu en tout point de l'axe réel \mathbb{R} . On suppose qu'il existe une suite $(R_N)_{N \geq 1}$ de nombres strictement positifs, tendant vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|\zeta|=R_N} |f(\zeta)| \right) = 0.$$

a) Soit γ_N^+ le chemin continu $\theta \in [0, \pi] \mapsto R_N e^{i\theta}$. Montrer que, pour tout $N \geq 1$ et pour tout $\omega < 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N^+} e^{-i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| &\leq R_N \sup_{|\zeta|=R_N, \operatorname{Im} \zeta \leq 0} |f(\zeta)| \times \int_0^\pi e^{-R_N|\omega| \sin \theta} d\theta \\ &\leq 2R_N \sup_{|\zeta|=R_N, \operatorname{Im} \zeta \leq 0} |f(\zeta)| \times \int_0^{\pi/2} e^{-2R_N|\omega|\theta/\pi} d\theta. \end{aligned}$$

En déduire

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N^+} e^{-i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Montrer que le même résultat subsiste lorsque $\omega > 0$, pourvu que l'on remplace γ_N^+ par $\gamma_N^- : \theta \in [0, \pi] \mapsto -R_N e^{i\theta}$.

b) Soit $\omega \in \mathbb{R}$ tel que la limite, lorsque T tend vers $+\infty$, de

$$\int_{-T}^T e^{-i\omega t} f(t) dt$$

existe. Montrer que, si $\omega < 0$, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T e^{-i\omega t} f(t) dt = 2i\pi \sum_{\substack{\alpha \in f^{-1}(N) \cap \{\operatorname{Im} z > 0\} \\ |\alpha| < R_N}} \operatorname{Res}_\alpha [e^{-i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta],$$

tandis que si $\omega > 0$, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T e^{-i\omega t} f(t) dt = -2i\pi \sum_{\substack{\alpha \in f^{-1}(N) \cap \{\operatorname{Im} z < 0\} \\ |\alpha| < R_N}} \operatorname{Res}_\alpha [e^{-i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta]$$

($f^{-1}(N)$ désignant ici l'ensemble des pôles de f dans \mathbb{C}).

EXERCICE 3.24 (formule des résidus et transformée de Mellin). Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $f : \gamma + i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue non identiquement nulle sur la droite verticale $\gamma + i\mathbb{R}$, admettant un prolongement méromorphe au demi-plan $\{\operatorname{Re} z < \gamma\}$, ce prolongement (noté encore f) étant continu dans $\{\operatorname{Re} z \leq \gamma\}$. On suppose qu'il existe une suite $(R_N)_{N \geq 1}$ de nombres strictement positifs, tendant vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\substack{|\lambda - \gamma| = R_N \\ \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma}} |f(\lambda)| \right) = 0.$$

a) Soit $\gamma_N^- : t \in [\pi/2, 3\pi/2] \mapsto \gamma + R_N e^{it}$. Montrer que, pour tout $N \geq 1$ et pour tout $u \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_N^-} f(\lambda) u^{-\lambda} d\lambda \right| &\leq u^{-\gamma} R_N \sup_{\substack{|\lambda - \gamma| = R_N \\ \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma}} |f(\lambda)| \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-|\log u| R_N \sin \theta} d\theta \\ &\leq u^{-\gamma} R_N \sup_{\substack{|\lambda - \gamma| = R_N \\ \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma}} |f(\lambda)| \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2|\log u| R_N \theta/\pi} d\theta. \end{aligned}$$

En déduire

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N^-} f(\lambda) u^{-\lambda} d\lambda = 0.$$

b) Soit $u \in]0, 1[$, tel que la limite lorsque y tend vers $+\infty$ de

$$\int_{[\gamma-iy, \gamma+iy]} f(\lambda) u^{-\lambda} d\lambda = i \int_{-y}^y f(\gamma + i\omega) u^{-\gamma-i\omega} d\omega$$

existe. En utilisant la formule des résidus (version analytique), déduire de **a**) que l'on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{[\gamma-iy, \gamma+iy]} f(\lambda) u^{-\lambda} d\lambda = 2i\pi \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\alpha \in f^{-1}(N) \\ |\alpha-\gamma| < R_N}} \text{Res}_\alpha [f(\lambda) u^{-\lambda} d\lambda]$$

($f^{-1}(N)$ désignant ici l'ensemble des pôles de f dans $\{\text{Re } z < \gamma\}$).

EXERCICE 3.25 (formule des résidus et transformation de Laplace). Soit $p_0 \in \mathbb{R}$ et $F : p_0 + i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue se prolongeant à \mathbb{C} tout entier en une fonction méromorphe (notée encore F) continue sur $p_0 + i\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(R_N)_{N \geq 1}$ de nombres strictement positifs, tendant vers $+\infty$, telle que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sup_{|p|=R_N} |F(p)| \right) = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ est tel que la limite lorsque T tend vers $+\infty$ de

$$\int_{[p_0-iT, p_0+iT]} F(p) e^{-pt} dp = i \int_{-T}^T F(p_0 + i\omega) e^{-t(p_0+i\omega)} d\omega.$$

a) En utilisant le résultat établi à l'exercice 3.24, montrer que, si $t > 0$, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{[p_0-iT, p_0+iT]} F(p) e^{pt} dp = 2i\pi \sum_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\alpha \in F^{-1}(N) \cap \{\text{Re } p < p_0\} \\ |\alpha-p_0| < R_N}} \text{Res}_\alpha [F(p) e^{pt} dp].$$

b) Montrer de même que, si $t < 0$, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{[p_0-iT, p_0+iT]} F(p) e^{pt} dp = -2i\pi \sum_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{\alpha \in F^{-1}(N) \cap \{\text{Re } p > p_0\} \\ |\alpha-p_0| < R_N}} \text{Res}_\alpha [F(p) e^{pt} dp].$$

c) Si $F = N/D$ est une fraction rationnelle telle que $\deg N < \deg D$ et que tous les pôles de F soient de partie réelle strictement inférieure à $p_0 \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout $t \neq 0$, la limite, lorsque T tend vers $+\infty$, de

$$\int_{[p_0-iT, p_0+iT]} F(p) e^{pt} dp$$

existe. Calculer explicitement cette limite en utilisant la décomposition en éléments simples de F (on distinguera suivant que $t > 0$ et $t < 0$).

EXERCICE 3.26 (calcul des intégrales de Fresnel). Vérifier les formules de Fresnel¹¹

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \cos(t^2) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

en utilisant comme compact à bord orienté K_R le secteur angulaire

$$K_R := \{r e^{i\theta} ; 0 \leq r \leq R, \theta \in [0, \pi/4]\}$$

11. Ces formules, introduites par l'opticien et mathématicien français Augustin Fresnel (1788-1827), jouent un rôle important en optique géométrique.

et en appliquant la formule des résidus (version analytique) avec la forme $\exp(-\zeta^2) d\zeta$ (avant de faire tendre R vers $+\infty$).

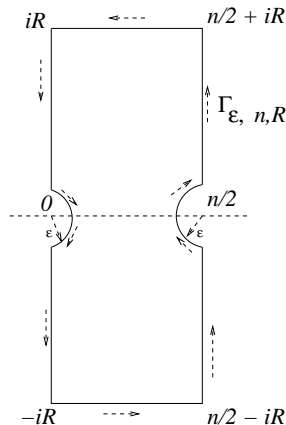


FIGURE 3.2. Le lacet $\Gamma_{n,\epsilon,R}$ de l'exercice 3.27

EXERCICE 3.27 (calcul des sommes de Gauß). Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\Gamma_{n,\epsilon,R}$ ($\epsilon \ll 1$, $R \gg 1$) le lacet continu figuré sur la figure 3.2.

a) Dédire de la formule des résidus, version analytique, appliquée dans le compact à bord orienté délimité par le support de $\Gamma_{n,\epsilon,R}$, la formule

$$\int_{\Gamma_{n,\epsilon,R}} \frac{e^{2i\pi\zeta^2/n}}{e^{2i\pi\zeta} - 1} d\zeta = \sum_{0 < k < n/2} e^{2i\pi k^2/n} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 < k \leq n-1 \\ k \neq n/2}} e^{2i\pi k^2/n}.$$

b) En déduire (en faisant tendre simultanément ϵ vers 0 et R vers l'infini)

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{0 < k \leq n-1 \\ k \neq n/2}} e^{2i\pi k^2/n} = \sqrt{n}(i + (-i)^{n-1}) \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^R e^{-2i\pi t^2} dt.$$

c) En intégrant la forme $e^{-2\pi\zeta^2}$ sur le bord orienté (dans le sens trigonométrique) du secteur angulaire $\{re^{2i\pi\theta}; \epsilon < r < R, \theta \in [0, \pi/4]\}$ (voir aussi l'exercice 3.26), vérifier la formule

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^R e^{-2i\pi t^2} dt = \frac{1}{2(1+i)}.$$

Dédire alors, en combinant ce résultat avec celui établi au **b**), l'expression de la n -ième somme de Gauß¹² :

$$\tau_n := \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi k^2/n} = \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k^2/n} = i\sqrt{n} \frac{1 + (-i)^n}{1 + i}.$$

Vérifier que $\tau_n^2 = n \times \left(\frac{-1}{n}\right)$, où $\left(\frac{-1}{n}\right)$ désigne le symbole quadratique de Legendre (valant 1 si -1 est résidu quadratique modulo n , -1 sinon).

12. Très importantes en théorie analytique des nombres, ces sommes ont été calculées en 1801 par le mathématicien, astronome et physicien allemand Carl Friedrich Gauß (1777-1855), dont l'œuvre immense préfigure tant l'analyse complexe que la théorie des nombres modernes.

EXERCICE 3.28 (formule des résidus et factorisation de fonctions entières comme \cos). Soit f une fonction entière non identiquement nulle dont les zéros sont tous simples et non nuls. Soit $(\gamma_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ une suite de lacets simples C^1 par morceaux tels que :

$$\text{Supp } \gamma_N \subset \mathbb{C} \setminus f^{-1}(0), \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\text{dist}(0, \text{Supp } \gamma_N) \right) = +\infty,$$

$$\text{longueur}(\gamma_N) := \int_0^1 |\gamma'_N(t)| dt = O(\text{dist}(0, \text{Supp } \gamma_N)) \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty,$$

$$\sup_{\text{Supp } \gamma_N} |f'/f| = O(1) \quad \text{lorsque } N \rightarrow +\infty.$$

On suppose d'autre part, si U_N désigne l'ouvert borné enserré par γ_N , que l'on a $\overline{U_N} \subset U_{N+1}$.

a) Exprimer, grâce à la formule des résidus (version analytique) appliquée dans le compact à bord délimité par le support de γ_N , l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_N} \frac{f'(\zeta)}{\zeta f(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta$$

lorsque $N \in \mathbb{N}^*$ (on supposera dans un premier temps que $zf(z) \neq 0$).

b) Montrer que la suite de fonctions méromorphes dans \mathbb{C} (en fait rationnelles) $(F_N)_{N \geq 1}$, où

$$F_N(z) := \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{\alpha \in f^{-1}(0) \cap U_N} \left(\frac{1}{z - \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(0)$ vers la fonction holomorphe f'/f .

c) Dédire du b) que l'on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = f(0) \exp\left(\frac{f'(0)}{f(0)} z\right) \times \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\prod_{\alpha \in f^{-1}(0) \cap U_N} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) e^{z/\alpha} \right).$$

d) Construire une suite de chemins $(\gamma_N)_{N \geq 1}$ adaptée comme dans le préambule de cet exercice à la fonction \cos . Dédire du c) que l'on a, dans ce cas particulier,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \cos z = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{((2k+1)\pi/2)^2}\right),$$

la convergence au membre de droite ci-dessus étant uniforme sur tout compact du plan complexe.

EXERCICE 3.29 (factorisation de la fonction sinus).

a) Soit γ_N le chemin continu $t \in [0, 1] \mapsto (N + 1/2)e^{2i\pi t}$. Vérifier que la fonction méromorphe $z \in \mathbb{C} \mapsto \cotan(\pi z)$ ne présente aucun pôle sur le support de γ_N .

b) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall N \geq 1, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |\cotan(\pi \gamma_N(t))| \leq C.$$

En déduire, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_N} \frac{\cotan(\pi \zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = 0 \quad (*)$$

c) Calculer, lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, l'intégrale curviligne figurant au membre de gauche de (*) en utilisant la formule des résidus (version analytique) dans le compact à bord orienté délimité par le support de γ_N . En déduire

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right),$$

la convergence au membre de droite ci-dessus étant uniforme sur tout compact du plan complexe.

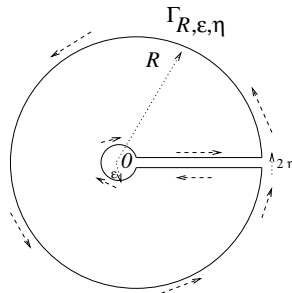


FIGURE 3.3. Le lacet $\Gamma_{R, \epsilon, \eta}$ des exercices 3.30 et 3.32

EXERCICE 3.30 (calculs d'intégrales du type $\int_0^\infty (\log(t))^q f(t) dt$). En utilisant le compact à bord $K_{R, \epsilon, \eta}$ délimité par le lacet $\Gamma_{R, \epsilon, \eta}$ représenté sur la figure 3.3 et la formule des résidus (version analytique), puis en faisant tendre simultanément R vers $+\infty$ et ϵ et η vers 0, vérifier la formule

$$\int_0^\infty \frac{\log t}{(1+t)^3} dt = -\frac{1}{2}.$$

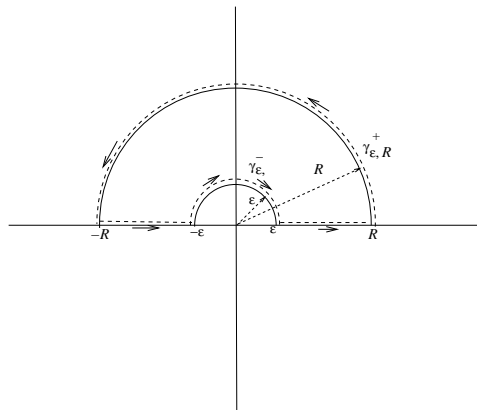


FIGURE 3.4. Le lacet $\gamma_{\epsilon, R}$ des exercices 3.31 et 3.33

EXERCICE 3.31 (calculs d'intégrales du type $\int_0^\infty (\log(t))^q f(t) dt$). En utilisant le compact à bord orienté $K_{\epsilon, R}$ délimité par le support du chemin $\gamma_{\epsilon, R}$ représenté sur la figure 3.4 pour appliquer la formule des résidus (version analytique), puis en faisant tendre simultanément R vers l'infini et ϵ vers 0, vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la formule

$$\int_0^\infty \frac{(\log t)^2}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi^2}{8|a|} + \frac{\pi}{2} \frac{(\log |a|)^2}{|a|}$$

(on utilisera comme détermination du logarithme complexe la détermination valide dans $\mathbb{C} \setminus \{-it; t \geq 0\}$).

EXERCICE 3.32 (formule des compléments). Soit z un nombre complexe de partie réelle strictement entre 0 et 1.

a) En utilisant le compact à bord $K_{R, \epsilon, \eta}$ délimité par le lacet $\Gamma_{R, \epsilon, \eta}$ représenté sur la figure 3.3 et la formule des résidus (version analytique), puis en faisant tendre simultanément R vers $+\infty$ et ϵ et η vers 0, vérifier la formule

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

b) Vérifier, en utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue, puis le théorème de Fubini, que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{z-1} e^{-s} ds \times \int_0^\infty u^{-z} e^{-u} du &= \iint_{]0, \infty[^2} (s/u)^z e^{-(s+u)} \frac{ds du}{s} = \\ &= \iint_{]0, \infty[^2} e^{-v} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt dv = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t} dt. \end{aligned}$$

En déduire que la fonction Γ d'Euler (voir les exercices 2.6 et 3.16) vérifie la *formule des compléments* :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \quad \Gamma(z) \times \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

(prendre d'abord $z \in]0, 1[$, puis utiliser ensuite le principe du prolongement analytique).

EXERCICE 3.33 (calcul de l'intégrale de la fonction sinus cardinal). En utilisant le compact à bord orienté $K_{\epsilon, R}$ délimité par le support du lacet $\gamma_{\epsilon, R}$ représenté sur la figure 3.4 et la formule des résidus (version analytique), puis en faisant tendre simultanément R vers l'infini et ϵ vers 0, vérifier la formule

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 3.34 (formule des résidus et fonctions puissance). Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et f une fonction méromorphe dans \mathbb{C} , ayant au plus un nombre fini de pôles dans \mathbb{C} , tous dans $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Soit \log la fonction logarithme définie dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ par

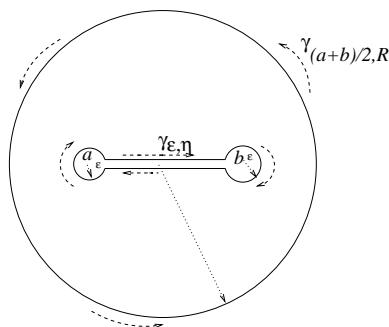
$$\log z := \log |z| + i \arg_{]0, 2\pi[}(z).$$

a) Montrer que la fonction holomorphe

$$\Phi_{a,b} : z \in \mathbb{C} \setminus [a, +\infty[\mapsto \log(z-a) - \log(z-b)$$

se prolonge à $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ en une fonction holomorphe aussi notée $\Phi_{a,b}$.

b) Montrer que, pour tout nombre complexe λ , la fonction $z \mapsto F(z) e^{\lambda \Phi_{a,b}(z)}$ est

FIGURE 3.5. Les lacets $\gamma_{(a+b)/2, R}$ et $\gamma_{\epsilon, \eta, a, b}$ de l'exercice 3.34

bien une fonction holomorphe dans un voisinage épointé de l'infini (pôle nord N de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2), donc présentant une singularité isolée en ce point.

c) Soit λ un nombre complexe de partie réelle dans $]0, 1[$. En utilisant la formule des résidus dans le compact à bord orienté délimité par les supports des deux lacets continus $\gamma_{(a+b)/2, R}$ et $\gamma_{\epsilon, \eta, a, b}$ représentés sur la figure 3.5, puis en faisant tendre simultanément R vers l'infini, ϵ et η vers 0, vérifier la formule :

$$\int_a^b f(t) \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^\lambda dt = -\frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)} \sum_{\alpha \in f^{-1}(N) \cup \{\infty\}} \text{Res}_\alpha [f(\zeta) e^{\lambda \Phi_{a,b}(\zeta)} d\zeta].$$

EXERCICE 3.35 (dérivée logarithmique de ζ). Soit $\Lambda : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, \infty[$ la fonction arithmétique définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k \text{ avec } p \text{ premier, } k \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction zéta de Riemann est la fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\{\text{Re } z > 1\}$ et définie dans ce demi-plan par

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

(cf. l'exercice 2.7).

a) En utilisant la formule d'Euler établie dans l'exercice 2.7 (question b)) et le théorème de Rouché (version analytique, cf. volet 2 du Théorème 3.7), vérifier que ζ ne s'annule pas dans $\{\text{Re } z > 1\}$, et que l'on a

$$\forall z \in \{\text{Re } z > 1\}, \quad \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^z}.$$

b) En utilisant le procédé sommatoire d'Abel (intégration par parties discrète), montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \left(\sum_{k \leq t} \Lambda(k) \right) dt = \sum_{1 \leq k \leq x} (x-k) \Lambda(k).$$

c) On note, pour tout $x \geq 1$, $\psi(x) := \sum_{1 \leq k \leq x} (x-k) \Lambda(k)$. En utilisant la formule des résidus, vérifier, en s'inspirant des exercices 3.24 et 3.25 pour choisir le compact

à bord orienté adéquat (ici en l'occurrence un demi-disque $\overline{D(\gamma, R)} \cap \{\operatorname{Re} \lambda \geq \gamma\}$) que, pour tout $x > 1$, pour tout $\gamma > 1$, on a

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda(\lambda+1)} \frac{\zeta'(\lambda)}{\zeta(\lambda)} d\lambda \\ \frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{x^{\lambda-1}}{\lambda(\lambda+1)} \left(\frac{\zeta'(\lambda)}{\zeta(\lambda)} + \frac{1}{\lambda-1} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

EXERCICE 3.36 (le théorème des nombres premiers¹³).) Cet exercice constitue le prolongement de l'exercice 3.35 précédent. Il n'illustre pas directement cette section, mais détaille le cheminement conduisant, depuis les formules déduites de la formule des résidus au **c**) de l'exercice 3.35, à la preuve du *théorème des nombres premiers*. On reprend dans cet exercice¹⁴ la fonction zéta de Riemann (cf. les exercices 2.7, 2.32, 3.17, 3.35), dont on sait (cf. l'exercice 2.32, question **c**) et l'exercice 3.17, question **b**)) qu'elle se prolonge depuis le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 1\}$, où elle est naturellement définie par $\zeta(z) := \sum_{k \geq 1} k^{-z}$, en une fonction méromorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, d'unique pôle $z = 1$, le résidu en ce pôle valant 1. Le prolongement de ζ à $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ est donné (cf. l'exercice 2.32, question **c**)) par

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^{z+1}} dt. \quad (*)$$

a) Vérifier que le polynôme trigonométrique $3 + 4 \cos(\omega) + \cos(2\omega)$ reste strictement positif sur $[0, 2\pi]$. En remarquant que, pour $\gamma > 1$,

$$\log |\zeta(\gamma + i\omega)| = \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ k \in \mathbb{N}^*}} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{k(\gamma + i\omega)}}$$

(par intégration terme à terme de la dérivée de cette fonction de ω), vérifier que

$$\log |\zeta^3(\gamma) \zeta^4(\gamma + i\omega) \zeta(\gamma + 2i\omega)| > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

soit que, pour tout $\gamma > 1$,

$$((\gamma - 1)\zeta(\gamma))^3 \left| \frac{\zeta(\gamma + i\omega)}{\gamma - 1} \right|^4 |\zeta(\gamma + 2i\omega)| \geq \frac{1}{\gamma - 1} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

En déduire que le prolongement de ζ à $\{\operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$ ne s'annule pas sur la droite verticale $1 + i\mathbb{R}$.

b) Montrer que la formule (*) s'exprime aussi ainsi :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \zeta(z) = \sum_{k=1}^N k^{-z} + z \int_N^{\infty} \frac{[t] - t + 1/2}{t^{z+1}} dt + \frac{N^{1-z}}{z-1} - \frac{N^{-z}}{2}. \quad (**)$$

13. On doit ce célèbre théorème au mathématicien belge Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962) et au mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963), qui l'ont démontré indépendamment, mais tous deux par une méthode fondée sur l'analyse complexe, méthode que nous présentons ici. Il faudra attendre les travaux du mathématicien norvégien Atle Selberg (1917-2007) et du mathématicien hongrois Paul Erdős (1913-1996) pour voir émerger des preuves élémentaires n'utilisant plus la fonction ζ de Riemann et les outils de l'analyse complexe (1949-1950).

14. Cet exercice est directement inspiré de la présentation faite dans [Titch], chapitre III, ouvrage que l'on pourra consulter pour de plus amples détails.

c) Dédire de l'expression (***) pour $\zeta(z)$ dans $\{\operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{1\}$ qu'il existe $A > 0$ tel que

$$|\zeta(\gamma + i\omega)| = O(\log \omega),$$

ce uniformément dans le domaine $\{1 - A/\log \omega \leq \gamma \leq 2, \omega \geq 2\}$ (on pourra admettre ce résultat plus technique). En déduire, en utilisant les inégalités de Cauchy, que l'on a, uniformément dans le domaine $\{\gamma + i\omega; \gamma \in [1, 2], \omega \geq 2\}$, à la fois

$$|\zeta(z)| = O(\log \omega) \quad \text{et} \quad |\zeta'(z)| = O(\log^2 \omega).$$

d) Dédire de **a)** qu'il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\forall \tilde{\gamma} \in]1, 2], \forall \omega \geq 2, |\zeta(\tilde{\gamma} + i\omega)| \geq \frac{(\tilde{\gamma} - 1)^{3/4}}{B \log^{1/4} \omega}.$$

Montrer que, pour tout $\tilde{\gamma} \in]1, 2[$, pour tout $\gamma \in [1, \tilde{\gamma}[$, pour tout $\omega \geq 2$, on a (d'après le résultat établi au **c)** et l'inégalité des accroissements finis)

$$|\zeta(\gamma + i\omega) - \zeta(\tilde{\gamma} + i\omega)| \leq K(\tilde{\gamma} - 1) \log^2 \omega$$

pour une certaine constante positive K . En déduire que, pour tout $\gamma \in [1, 2]$, pour tout $\tilde{\gamma} \in]1, 2[$, pour tout $\omega \geq 2$, on a

$$|\zeta(\gamma + i\omega)| \geq \frac{(\tilde{\gamma} - 1)^{3/4}}{B \log^{1/4} \omega} - K(\tilde{\gamma} - 1) \log^2 \omega = (\tilde{\gamma} - 1) \left(\frac{(\tilde{\gamma} - 1)^{-1/4}}{B \log^{1/4} \omega} - K \log^2 \omega \right).$$

En choisissant $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_\omega \in]1, 2[$ convenable en fonction de ω (par exemple, en prenant $\tilde{\gamma}_\omega = 1 + \log^{-\alpha} \omega$ avec $\alpha > 9$ pour chaque $\omega \geq 2$), montrer que

$$\frac{1}{|\zeta(\gamma + i\omega)|} = O(\log^7 \omega)$$

lorsque ω tend vers $+\infty$, ce uniformément par rapport à $\gamma \in [1, 2]$.

e) En couplant le résultat établi au **d)** avec celui établi à la question **c)** de l'exercice 3.35, montrer que, pour tout $x > 1$,

$$\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(\omega) e^{i\omega \log x} d\omega,$$

où la fonction h est intégrable au sens de Lebesgue sur \mathbb{R} . En utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue sur le comportement asymptotique de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable (voir le cours d'Analyse de Fourier [**Yfourier**]), en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\psi(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

f) En revenant à la définition de la fonction ψ , déduire du résultat établi au **e)** que le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs ou égaux à x est équivalent à $x/\log x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3.37 (théorème de Rouché, version analytique). Calculer le nombre de zéros du polynôme

$$P(X) = X^5 + 12X^3 + 3X^2 + 20X + 3$$

dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$. Même question pour le polynôme

$$P(X) = X^7 - 5X^3 + 6.$$

EXERCICE 3.38 (théorème de Rouché, version analytique). Cet exercice complète l'exercice 3.18 dont il reprend les notations (définition des fonctions elliptiques de Weierstraß \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' attachées au réseau $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$).

a) Montrer qu'il existe toujours un parallélogramme fermé

$$\overline{\Pi(z_0)} := \{z_0 + t\omega_1 + s\omega_2; (t, s) \in [0, 1]^2\}$$

sur le bord duquel la fonction méromorphe $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}'$ ne présente ni zéro ni pôle.

b) En utilisant le théorème de Rouché (version analytique), montrer que la fonction \mathfrak{P} présente deux zéros à l'intérieur de $\overline{\Pi(z_0)}$ (comptés avec leurs multiplicités). Montrer que la fonction \mathfrak{P}' admet trois zéros (comptés avec leurs multiplicités) à l'intérieur de $\overline{\Pi(z_0)}$.

c) Vérifier, en utilisant la formule des résidus pour représenter leur somme sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(\partial\Pi(z_0))_+} \zeta \frac{\mathfrak{P}'(\zeta)}{\mathfrak{P}(\zeta)} d\zeta,$$

que la somme des deux zéros de \mathfrak{P} dans $\overline{\Pi(z_0)}$ est un point du réseau $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. Même question pour la somme des trois zéros de \mathfrak{P}' dans ce même parallélogramme $\overline{\Pi(z_0)}$.

EXERCICE 3.39 (théorème de Rouché, version analytique).

a) Soit P un polynôme de degré $d > 0$ et $M > 0$. Montrer l'équivalence des deux conditions :

$$\forall z \in \{|z| = 1\}, |P(z)| \leq M$$

et

$$\forall \lambda \in \{|\lambda| > 1\}, \{z; P(z) = \lambda M z^d\} \subset D(0, 1).$$

b) Soit P un polynôme de degré $d \geq 2$. Montrer que les zéros de P' appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de P (utiliser l'expression de la fraction rationnelle $P'(X)/P(X)$ calculée sous forme de dérivée logarithmique).

c) En utilisant les résultats établis aux questions a) et b), montrer que, si P est un polynôme de degré $d \geq 2$ et si $M = \sup_{|z|=1} |P|$, les zéros de $P'(X) - \lambda d N X^{d-1}$ sont tous dans $D(0, 1)$ dès que $|\lambda| > 1$. En déduire (en utilisant le principe du maximum) que

$$\sup_{|z| \leq 1} |P'| \leq d \sup_{|z| \leq 1} |P|.$$

Cette inégalité est dite *inégalité de Bernstein*¹⁵. Est-elle encore vraie si $d = 0$ ou $d = 1$?

EXERCICE 3.40 (théorème de Rouché, version analytique). Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $d > 0$ et $R > 0$ tels que $|a| > e^R/R^d$. Montrer que l'équation $az^d = e^z$ admet exactement d racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $D(0, R)$, et qu'au moins $d - 1$ de ces racines sont des racines simples.

EXERCICE 3.41 (théorème de Rouché version analytique). Soit $f \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, pensée comme une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 . Montrer que l'on a nécessairement $N_{\text{zer}}[f; \mathbb{S}^2] = N_{\text{pol}}[f; \mathbb{S}^2]$, les zéros

15. Il s'agit de Serguei Bernstein (1880-1968), mathématicien soviétique, à qui l'on doit l'approximation polynomiale par les *polynômes de Bernstein*. Cette inégalité a un pendant important en théorie du signal : si f est une fonction C^∞ sur \mathbb{R} , de spectre borné, inclus dans $[-\Omega, \Omega]$, on a $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq \Omega \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

et les pôles étant ici comptés avec leurs multiplicités ou leurs ordres (suivant qu'il s'agisse de zéros ou de pôles).

3.3. Théorème de Weierstraß et résolution du $\bar{\partial}$

Comme nous l'avons signalé, l'un des objectifs majeurs de cette section est de prouver que, si U désigne un ouvert connexe de \mathbb{C} , le corps $\mathcal{M}(U)(+, \times)$ des fonctions méromorphes dans U est exactement le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{H}(U)(+, \times)$ (intègre d'après le principe des zéros isolés) des fonctions holomorphes dans U . La réalisation de cet objectif passe par la construction effective de fonctions méromorphes à ensembles de zéros et de pôles prescrits (ainsi que leurs multiplicités ou leurs ordres). C'est ce que nous allons détailler au fil des deux sous-sections suivantes.

3.3.1. Produits infinis et facteurs primaires de Weierstraß. Dans cette sous-section, nous nous proposons de construire explicitement, étant donnée une suite de nombres complexes $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\alpha_k| = +\infty$, rangée suivant l'ordre des modules croissants

$$0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}| \leq \dots$$

(cette manière d'ordonner les α_k n'étant bien sûr pas unique), une fonction entière F dont les zéros sont exactement les points α_k (et eux seuls), la multiplicité de chaque α_{k_0} , $k_0 \in \mathbb{N}^*$, comme zéro de F étant exactement égale au nombre de fois (nécessairement fini, puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} |\alpha_k| = +\infty$) où α_{k_0} apparaît dans la suite ordonnée $(\alpha_k)_{k \geq 1}$. La remarque que nous avons fait à propos du Lemme de Schwarz (Remarque 2.10, cf. aussi l'exercice 2.42) justifie qu'il soit important, avant d'envisager pareille construction, de disposer d'une hypothèse *a priori* sur la croissance de la suite des nombres positifs $(|\alpha_k|_{k \geq 1})$: heuristiquement, plus cette suite converge vite vers $+\infty$, moindre est la croissance de $\max_{|\zeta|=R} |F|$ vers l'infini lorsque R tend vers l'infini¹⁶.

Avant d'expliciter cette construction, nous rappelons une proposition importante, concernant la réalisation de fonctions holomorphes dans un ouvert comme limites de produits de fonctions holomorphes.

PROPOSITION 3.2 (convergence de produits infinis). *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $(u_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes dans U , telle que la série de fonctions $\sum_k u_k$ soit normalement convergente sur tout compact K de U , i.e.*

$$(3.40) \quad \forall K \subset\subset U, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sup_K |u_k| < +\infty.$$

Alors, quelque soit la permutation \mathfrak{s} de \mathbb{N}^* , la suite de fonctions holomorphes

$$\Pi_{\mathfrak{s}, N} : z \in U \mapsto \Pi_{\mathfrak{s}, N}(z) := \prod_{k=1}^N (1 + u_{\mathfrak{s}(k)}(z)), \quad N = 1, 2, \dots$$

16. On verra au chapitre 4, Section 4.3, avec la formule de Jensen (Proposition 4.2), comment préciser ce constat pour l'instant heuristique.

converge, lorsque N tend vers l'infini, uniformément sur tout compact de \mathbb{C} , vers une fonction Π , indépendante du choix de la permutation \mathfrak{s} , et que l'on note

$$\Pi := \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) \quad \text{ou mieux} \quad \prod_{k \in \mathbb{N}^*} (1 + u_k)$$

pour rendre compte de la convergence commutative du produit. L'ensemble des zéros de Π est exactement

$$\Pi^{-1}(0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\alpha; u_k(\alpha) = -1\},$$

la multiplicité de α comme zéro de Π étant exactement la somme (pour $k \in \mathbb{N}^*$) des multiplicités de α comme zéro (éventuel) des fonctions $z \mapsto u_k(z) + 1$.

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur N , on démontre d'abord que, si w_1, \dots, w_N sont N nombres complexes, on a

$$(3.41) \quad \left| \prod_{k=1}^N (1 + w_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^N (1 + |w_k|) - 1.$$

Cette inégalité est vraie si $N = 1$ (c'est d'ailleurs une égalité dans ce cas). Si l'inégalité (3.41) est supposée vraie au cran N , on a, étant donnés $N + 1$ nombres complexes w_1, \dots, w_{N+1} ,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{N+1} (1 + w_k) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^N (1 + w_k) - 1 \right) (1 + w_{N+1}) + w_{N+1} \right| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^N (1 + |w_k|) - 1 \right) (1 + |w_{N+1}|) + |w_{N+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{N+1} (1 + |w_k|) - 1, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité (3.41) au cran $N + 1$.

Fixons la permutation \mathfrak{s} de \mathbb{N}^* . Soit K un compact de U et $\epsilon \in]0, 1[$. Il existe, du fait de l'hypothèse (3.40), un entier $N_{K,\epsilon} \geq 1$ assez grand pour que

$$\prod_{k > N_{K,\epsilon}} (1 + \sup_K |u_k|) - 1 \leq \exp \left(\sum_{k > N_{K,\epsilon}} \sup_K |u_k| \right) - 1 \leq \epsilon.$$

Soit $N \geq N_{K,\epsilon}$ et M assez grand pour que $\{1, \dots, N\} \subset \{\mathfrak{s}(1), \dots, \mathfrak{s}(M)\}$. On a, pour $N \geq N_{K,\epsilon}$, en utilisant l'inégalité (3.41) et le fait que $\Pi_{\mathfrak{s},N}$ s'exprime comme le produit de $\Pi_{\text{Id},N}$ avec un nombre fini de facteurs tous de la forme $1 + u_l$ avec $l > N \geq N_{K,\epsilon}$,

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \sup_K \left| \Pi_{\mathfrak{s},M} - \Pi_{\text{Id},N} \right| &\leq \sup_K \left| \Pi_{\text{Id},N} \right| \times \left(\prod_{j, \mathfrak{s}(j) > N_{K,\epsilon}} (1 + \sup_K |u_{\mathfrak{s}(j)}|) - 1 \right) \\ &\leq \sup_K \left| \Pi_{\text{Id},N} \right| \times \exp \left(\sum_{k > N_{K,\epsilon}} \sup_K |u_k| \right) - 1 \leq \epsilon \sup_K \left| \Pi_{\text{Id},N} \right| \leq C(K) \epsilon, \end{aligned}$$

où $C(K) := \exp(\sum_{k \geq 1} \sup_K |u_k|)$. Si l'on raisonne avec $\mathfrak{s} = \text{Id}$, on déduit de (3.42) que la suite de fonctions $(\Pi_{\text{Id},N})_{N \geq 1}$ est uniformément de Cauchy sur le compact K , donc converge uniformément (puisque le \mathbb{C} -espace des fonctions continues de K

dans \mathbb{C} équipé de la norme uniforme est de Banach) vers une fonction continue Π_K ; ceci étant vrai pour tout compact K , il résulte de la Proposition 2.8 que les Π_K se recollent en une fonction Π , holomorphe dans U . En reprenant (3.42), cette fois avec \mathfrak{s} , on voit que la suite $(\Pi_{\mathfrak{s},N})_{N \geq 1}$ converge uniformément sur K vers la même limite $\Pi_K = \Pi$.

Pour $N \geq N_{K,\epsilon}$, on déduit de (3.42)

$$\forall z \in K, \Pi(z) = \left(\prod_{k=1}^{N_{K,\epsilon}} (1 + u_k(z)) \right) \times (1 + V(z)),$$

où

$$\sup_K |V| \leq \epsilon.$$

On constate que Π a exactement les mêmes zéros que $\Pi_{N(K,\epsilon)}$ dans le compact K (avec les mêmes multiplicités). Ceci justifie la dernière assertion. \square

DÉFINITION 3.9 (facteurs élémentaires de Weierstraß). Les *facteurs élémentaires* E_0, E_1, \dots de Weierstraß sont les fonctions entières définies, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $E_0(z) := 1 - z$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, par

$$(3.43) \quad E_p(z) := (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right).$$

On a de plus

$$(3.44) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \overline{D(0,1)}, \quad |1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

DÉMONSTRATION. Prouvons (3.44). On remarque que

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= (-1 + (1 - z)(1 + z + \dots + z^{p-1})) \times \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \times \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right). \end{aligned}$$

La fonction $1 - E_p$ a tous ses coefficients de Taylor $a_k(0)$ positifs ou nuls et s'annule avec la multiplicité $p + 1$ en $z = 0$. La fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto (1 - E_p(z))/z^{p+1}$ présente donc une singularité fictive à l'origine et se prolonge en une fonction entière dont tous les coefficients de Taylor $a_{k+p+1}(0)$ en 0, $k = 0, 1, \dots$, sont positifs. On a donc, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$,

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p+1}(0) |z|^k \leq |z|^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p+1}(0) = \left[\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \right]_{z=1} = 1.$$

\square

A l'aide des facteurs élémentaires de Weierstraß, il est possible d'expliciter la construction d'une fonction entière dont les zéros (avec leurs multiplicités) sont précisés, pourvu que l'on dispose d'une hypothèse *a priori* sur la vitesse avec laquelle la suite des modules de ces zéros « prescrits » tend vers $+\infty$.

PROPOSITION 3.3 (construction d'une fonction entière à zéros précisés). Soit $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes, supposée rangée dans l'ordre des modules croissants

$$0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}| \leq \dots,$$

telle $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\alpha_k| = +\infty$ (en particulier $\alpha_k \neq 0$ au delà d'un seuil minimal $k \geq M$, $M \in \mathbb{N}^*$) et qu'il existe une suite d'entiers $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, avec

$$(3.45) \quad \forall R > 0, \quad \sum_{k=M}^{\infty} \left(\frac{R}{|\alpha_k|} \right)^{1+p_k} < +\infty.$$

Le produit infini

$$z \mapsto \Pi(z) = z^{M-1} \times \prod_{k \geq M} E_{p_k}(z/\alpha_k)$$

converge et définit une fonction entière dont les seuls zéros sont les points α_k , la multiplicité de α_{k_0} étant exactement égale au nombre de fois que le nombre complexe α_{k_0} se trouve répété dans la suite $(\alpha_k)_{k \geq 1}$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que les α_k sont tous non nuls, quitte à multiplier ultérieurement la fonction construite par z^{M-1} pour récupérer l'annulation à l'ordre $M-1$ en $z=0$. Soit $R > 0$. Pour $k \geq N(R)$, avec $N(R) \in \mathbb{N}^*$ assez grand, on a $|\alpha_k| \geq R$. On a donc, compte-tenu de (3.44),

$$\sum_{N(R)}^{\infty} \sup_{|z| \leq R} |E_{p_k}(z/\alpha_k) - 1| \leq \sum_{N(R)}^{\infty} \sup_{|z| \leq R} \left(\frac{|z|}{|\alpha_k|} \right)^{p_k+1} \leq \sum_{N(R)}^{\infty} \left(\frac{R}{|\alpha_k|} \right)^{p_k+1} < +\infty$$

d'après l'hypothèse (3.45). On peut donc appliquer la Proposition 3.2 en posant $u_k : z \mapsto E_{p_k}(z/\alpha_k) - 1$ pour tout $k \geq 1$ (en fait $k \geq M$). \square

3.3.2. Le théorème de Weierstraß. Nous rappelons ici que nous avons introduit (Définition 3.8) le concept de *fonction méromorphe dans un ouvert de \mathbb{C}* . Cette notion est commode pour formuler le principe général de construction d'une fonction méromorphe à zéros-pôles prescrits (avec leurs multiplicités ou leurs ordres, suivant qu'on les envisage comme zéros ou comme pôles).

THEOREME 3.9 (théorème de Weierstraß, formulation constructive). *Soit U un ouvert de \mathbb{S}^2 , distinct de la sphère de Riemann toute entière. Soit Λ un sous-ensemble de U sans point d'accumulation dans U . Soit $m : \lambda \in \Lambda \mapsto m(\lambda)$ une application de Λ dans \mathbb{Z}^* . Il existe une fonction méromorphe dans U , de zéros dans U exactement les points λ_+ appartenant à $\Lambda_+ := m^{-1}(\mathbb{N}^*)$ (avec comme multiplicité en un tel zéro $m(\lambda_+)$), de pôles dans ce même ouvert U exactement les points $\lambda_- \in \Lambda_- := m^{-1}(\mathbb{Z}^{-*})$ (avec comme ordre en un tel pôle $-m(\lambda_-)$).*

REMARQUE 3.9 (le cas $U = \mathbb{S}^2$). La conclusion du Théorème 3.9 est en défaut lorsque $U = \mathbb{S}^2$. Il se trouve en effet (cf. l'exemple 3.2 et l'exercice 3.13) que les seules fonctions méromorphes dans \mathbb{S}^2 tout entier sont les fonctions rationnelles. Or, pour une telle fonction rationnelle, on a (cf. l'exercice 3.41), comme conséquence de la formule des résidus, le fait que $N_{\text{zer}}[f; \mathbb{S}^2] = N_{\text{pol}}[f; \mathbb{S}^2]$. On ne peut donc résoudre, dans le cas $U = \mathbb{S}^2$, le problème posé dans le théorème de Weierstraß que sous la contrainte que $\sum_{\lambda} m(\lambda) = 0$ (Λ est nécessairement fini car sans point d'accumulation dans le compact $\mathbb{S}^2 = U$ par hypothèse). La fonction méromorphe ayant alors les zéros et pôles prescrits est un produit fini d'homographies, c'est-à-dire de fonctions du type

$$(3.46) \quad z \in \mathbb{S}^2 \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

présentant chacune un seul zéro et un seul pôle.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\Lambda_- = \emptyset$: en effet, on raisonne sinon avec les deux ensembles que sont celui des paires $(\lambda_+, m(\lambda_+))$ d'une part, des paires $(\lambda_-, -m(\lambda_-))$ d'autre part, pour construire deux fonctions f_+ et f_- holomorphes dans U , à zéros prescrits (respectivement les λ_+ avec leurs multiplicités $m(\lambda_+)$, et les λ_- avec leurs multiplicités $-m(\lambda_-)$), puis on en fait le quotient f^+/f_- pour réaliser la fonction méromorphe demandée. En faisant agir sur \mathbb{S}^2 une homographie (application méromorphe bijective, d'inverse holomorphe, de \mathbb{S}^2 dans \mathbb{S}^2 , du type (3.46)), on peut se ramener au cas où le point à l'infini N appartient à U , auquel cas $\mathbb{S}^2 \setminus U$ est un compact C (non vide) du plan complexe (une fois identifié à une région du plan *via* la projection stéréographique depuis le pôle nord N). En faisant agir une nouvelle homographie, on peut aussi supposer que N n'est pas un point de Λ (il suffit que cette homographie échange si nécessaire N avec un point de $U \setminus \Lambda$). On peut de plus supposer $\Lambda = \Lambda^+$ infini car, sinon, toute fonction rationnelle (donc méromorphe dans \mathbb{S}^2) du type

$$f_w : z \mapsto \prod_{\lambda \in \Lambda} \left(\frac{z - \lambda}{z - w} \right)^{m(\lambda)}, \quad \text{où } w \in K = \mathbb{S}^2 \setminus U \subset \mathbb{C},$$

convient (elle s'annule en chaque λ avec la multiplicité $m(\lambda)$, n'a pas d'autres zéros dans U , et est holomorphe, donc sans pôles, dans l'ouvert U).

Une fois tout ce travail préliminaire fait, on peut entamer la preuve proprement dite. L'ensemble Λ est nécessairement dénombrable¹⁷, et on peut l'organiser en une suite infinie $(\lambda_k)_{k \geq 1}$, dans laquelle chaque $\lambda \in \Lambda$ est répété consécutivement $m(\lambda)$ fois. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, soit ζ_k l'élément du compact C réalisant la distance de λ_k à C (cette distance est bien atteinte en un point de C , puisque toute fonction continue sur un compact y réalise son minimum). Comme Λ n'a pas de point d'accumulation dans U , on a nécessairement $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k - \zeta_k| = 0$: en effet, on pourrait sinon extraire de cette suite une sous-suite $(\lambda_{\nu(k)} - \zeta_{\nu(k)})_{k \geq 1}$ avec $|\lambda_{\nu(k)} - \zeta_{\nu(k)}| \geq \eta > 0$ pour tout $k \geq 1$; comme la suite $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ est bornée (le point à l'infini est dans U et ne peut être point d'accumulation de Λ) et ne saurait de plus avoir de point d'accumulation dans $U \cap \mathbb{C}$, une suite extraite de la suite $(\lambda_{\nu(k)})_{k \geq 1}$ ne saurait converger que vers un point de C , ce que l'inégalité précédente exclut. On introduit les facteurs élémentaires de Weierstraß (Définition 3.9) et le produit infini

$$(3.47) \quad f(z) = \prod_{k \in \mathbb{N}^*} E_k \left(\frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right)$$

dont il s'agit de démontrer qu'il remplit bien la clause de la Proposition 3.2 (condition (3.40)) pour en assurer la convergence commutative uniformément sur tout compact de U . Nous vérifions d'abord la validité de cette clause dans l'ouvert $U \cap \mathbb{C}$. Soit K un compact de $U \cap \mathbb{C}$ et $\delta_K > 0$ la distance de K au compact C . Il existe $N_K > 0$ tel que, pour $k \geq N_K$, on ait

$$|\lambda_k - \zeta_k| \leq \frac{\delta_K}{2} = \frac{1}{2} \inf_{z \in K} |z - \zeta_k|.$$

¹⁷. Λ est sans point d'accumulation dans U ; on peut donc utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß dans chaque compact K_l , $(K_l)_l$ désignant une suite croissante de compacts exhaustant U , i.e. $U = \bigcup_l K_l$.

On a alors, compte-tenu des inégalités (3.44) (avec $p = k$, $k \geq N_K$),

$$\sum_{k \geq N_K} \sup_{z \in K} \left| E_k \left(\frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right) - 1 \right| \leq \sum_{k \geq N_K} \sup_{z \in K} \left| \frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right|^{k+1} \leq \sum_{k \geq N_K} \frac{1}{2^{k+1}} < +\infty.$$

La clause (3.40) est donc remplie pour un tel compact $K \subset U \cap \mathbb{C}$. Le produit infini (3.47) converge alors commutativement (d'après la Proposition 3.2) dans l'ouvert $U \cap \mathbb{C}$ et définit dans cet ouvert $U \cap \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dont les seuls zéros sont les points λ_k , $k \geq 1$, comptés précisément avec leurs multiplicités. Comme la suite $(|\lambda_k - \zeta_k|)_{k \geq 1}$ est bornée et que les points ζ_k , $k \geq 1$, restent dans le compact C , on a, dans un voisinage épointé convenable $\{|z| > R\}$ de l'infini dans U ,

$$\forall k \geq 1, \quad \left| E_k \left(\frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right) - 1 \right| \leq \left| \frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right|^{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Il résulte des majorations établies dans la preuve de la Proposition 3.2 que, dans ce voisinage épointé,

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \right) = e.$$

La fonction f présente une singularité fictive à l'infini et se prolonge donc en une fonction holomorphe en ce point. Comme le même raisonnement s'applique à la fonction

$$z \in \{|z| > R\} \mapsto \frac{1}{f(z)} = \prod_{k \geq 1} \left(E_k \left(\frac{\lambda_k - \zeta_k}{z - \zeta_k} \right) \right)^{-1},$$

le prolongement de f au voisinage de l'infini ne s'annule pas en ce point (on vérifie d'ailleurs aisément que $f(\infty) = 1$). La fonction f ainsi prolongée dans U tout entier réalise bien l'objectif prévu. Le Théorème 3.9 est ainsi démontré. \square

Nous sommes en mesure maintenant d'énoncer la conséquence la plus visible (en tout cas du point de vue algébrique) du théorème de Weierstraß sur les zéros-pôles prescrits.

COROLLAIRE 3.3 (corps des fractions de $(\mathcal{H}(U), +, \times)$). *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{S}^2 différent de la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 toute entière (en particulier un ouvert de \mathbb{C}). L'anneau $(\mathcal{H}(U), +, \times)$ des fonctions holomorphes dans U est un anneau intègre et son corps des fractions est le corps $(\mathcal{M}(U), +, \times)$ des fonctions méromorphes dans U .*

REMARQUE 3.10 (le cas $U = \mathbb{S}^2$). Le corollaire 3.3 est faux si $U = \mathbb{S}^2$: en effet, le corps $(\mathcal{M}(U), +, \times)$ est dans ce cas le corps des fonctions rationnelles (voir l'exercice 3.13 et la remarque 3.2), tandis que l'anneau $(\mathcal{H}(U), +, \times)$ des fonctions holomorphes s'identifie à \mathbb{C} puisque toute fonction holomorphe sur \mathbb{S}^2 induit par restriction à \mathbb{C} une fonction holomorphe et bornée sur \mathbb{C} , donc constante d'après le théorème de Liouville (Théorème 2.5).

DÉMONSTRATION. Soit f une fonction méromorphe et non identiquement nulle dans U . D'après le principe des zéros isolés (Théorème 2.7), les zéros de f , comme les pôles, sont des points isolés et constituent donc deux sous-ensembles de U sans point d'accumulation dans U . Suivant le théorème de Weierstraß (Théorème 3.9, appliqué ici dans une situation où $\Lambda_- = \emptyset$), on construit une fonction $f_+ \in \mathcal{H}(U)$ ne s'annulant qu'aux zéros de f , ce avec la même multiplicité que f . On construit de la même manière une fonction $f_- \in \mathcal{H}(U)$, ne s'annulant qu'aux pôles de f , avec

comme multiplicité en chacun de ces pôles l'ordre du pôle comme pôle de f . Le quotient f_+/f_- est donc le produit de f par une fonction $h \in \mathcal{H}(U)$ qui ne s'annule pas dans U . On peut donc bien représenter f comme le quotient des deux fonctions holomorphes f_+ et hf_- . \square

3.3.3. Les théorèmes d'approximation de Runge. Les fonctions polynomiales ou rationnelles (d'une variable réelle ou complexe) sont les seules fonctions qu'il est possible d'« encoder » en machine : un polynôme peut être encodé par la suite de ses coefficients (une fois son degré précisé), une fraction rationnelle par la suite des coefficients de son polynôme numérateur et de son polynôme dénominateur, une fois les degrés de ceux-ci précisés. Il est donc très important, tant du point de vue théorique que du point de vue appliqué, de pouvoir approcher en norme uniforme, sur un compact $K \subset \mathbb{C}$ donné, les restrictions à ce compact des fonctions holomorphes au voisinage de K par les restrictions à K de fonctions plus aisément manipulables (car plus facilement encodables), par exemple les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles à pôles précisés hors de K , etc. Ceci malheureusement n'est pas toujours possible, mais c'est cependant dans cette direction que se situent les théorèmes de type Runge¹⁸. Nous allons dans ce cours énoncer deux versions du théorème de Runge, une version analytique (mettant en jeu l'approximation holomorphe) et une version algébrique (mettant en jeu l'approximation polynomiale ou rationnelle). Ces deux versions se complètent évidemment.

Notre premier cadre sera celui d'une paire (K, U) constituée d'un compact K de \mathbb{C} et d'un ouvert U le contenant. Nous aurons besoin de définir une notion attachée à cette paire, celle d'*enveloppe d'holomorphie* d'un compact dans un ouvert.

DÉFINITION 3.10 (enveloppe d'holomorphie d'un compact dans un ouvert). Soit K un compact de \mathbb{C} et U un ouvert de \mathbb{C} le contenant. On appelle *enveloppe d'holomorphie de K dans U* le sous-ensemble de U défini par

$$(3.48) \quad \widehat{K}_U := \{z \in U; \forall f \in \mathcal{H}(U), |f(z)| \leq \sup_K |f|\}.$$

Ce sous-ensemble \widehat{K}_U est aussi un compact inclus dans U et contenant K . Si le compact $K \subset U$ vérifie $K = \widehat{K}_U$, on dit que K est *holomorphiquement convexe dans U* . De plus, on a

$$(3.49) \quad \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U) = \text{dist}(\widehat{K}_U, \mathbb{C} \setminus U).$$

DÉMONSTRATION. Le sous-ensemble \widehat{K}_U est un sous-ensemble fermé de U comme intersection de fermés : si $f \in \mathcal{H}(U)$, $\{z \in U; |f(z)| \leq \sup_K |f|\}$ est en effet fermé dans U puisque f est continue. La fonction $z \mapsto z$ est holomorphe dans U et l'on a donc, pour tout $z \in \widehat{K}_U$, $|z| \leq \sup_K |z| < \infty$. Le sous-ensemble \widehat{K}_U est fermé dans U et borné dans \mathbb{C} . Ceci ne prouve cependant pas encore que ce soit un compact de \mathbb{C} inclus dans U ; il faut encore montrer que la distance d'un point de \widehat{K}_U à $\mathbb{C} \setminus U$ reste minorée par $\eta > 0$, ce que nous donnera précisément (3.49). Pour prouver (3.49), on remarque que, si $w \in \mathbb{C} \setminus U$, la fonction $z \mapsto 1/(z - w)$ est

18. Mathématicien allemand (1856-1927), Carl David Tolmé Runge fut à la fois un théoricien, un expérimentateur, un numéricien (on lui doit aussi les schémas numériques de Runge-Kutta pour la résolution des EDO), et un mathématicien appliqué.

holomorphe dans U ; pour tout z dans $\widehat{K_U}$, on a donc

$$\left| \frac{1}{z-w} \right| \leq \sup_{\zeta \in K} \left| \frac{1}{\zeta-w} \right|,$$

soit

$$\min_{\zeta \in K} |\zeta - w| \geq |z - w|.$$

En prenant le minimum en w , puis en z , on trouve $\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U) \geq \text{dist}(\widehat{K_U}, \mathbb{C} \setminus U)$. Comme l'inégalité contraire résulte de $K \subset \widehat{K_U}$, on a bien l'égalité (3.49). \square

REMARQUE 3.11 (la notion d'*ouvert d'holomorphic*). Une propriété, semblant ici somme toute anodine, est cependant à souligner, car elle ne l'est pas autant qu'il ne paraît : que, pour tout ouvert U de \mathbb{C} , pour tout compact $K \subset U$, l'enveloppe d'holomorphic $\widehat{K_U}$ reste, comme K , un compact de U . Ceci est primordial, comme on le verra par exemple lorsque nous prouverons, pour tout ouvert U de \mathbb{C} , la surjectivité de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\bar{z} : C^\infty(U, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ (Théorème 3.12 dans la sous-section 3.3.4 suivante). On dit que *tout ouvert de \mathbb{C} est un ouvert d'holomorphic*. Cette propriété ne survit pas lorsque l'on passe du cadre de une variable complexe au cadre de plusieurs variables complexes. Le fait d'introduire des degrés de liberté supplémentaires conduit à l'apparition de ce que l'on appelle le *phénomène de Hartogs*. Les ouverts de \mathbb{C}^n ne sont pas tous d'holomorphic au sens où on l'entendait en dimension 1 (l'enveloppe d'holomorphic de tout compact de U reste un compact de U). Comme pour ce qui est du principe des zéros isolés (qui s'effondre en dimension supérieure, voir l'exercice 3.20), le fait que tout ouvert soit d'holomorphic (et, avec lui, la formulation des théorèmes d'approximation de type Runge) n'est pas un résultat qui subsiste comme tel lorsque l'on passe de la dimension 1 à la dimension n .

Nous donnons ici la version analytique du théorème de Runge; le volet (3) en est la clause la plus intéressante du point de vue pratique, tandis que le volet (2) caractérise la configuration géométrique sous laquelle le mécanisme d'approximation (3) est réalisable. L'équivalence entre (1) et (2) revient à dire que K est holomorphicment convexe dans U si et seulement si K ne présente pas de « trous » dans U (voir la figure 3.6, figure de droite, pour précisément un exemple de configuration exclue).

THEORÈME 3.10 (théorème de Runge, version analytique). *Soit K un compact de \mathbb{C} , U un ouvert contenant K . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) K est holomorphicment convexe dans U (i.e. $\widehat{K_U} = K$);
- (2) l'ouvert $U \setminus K$ n'a aucune composante connexe C qui soit relativement compacte dans U (au contraire de ce qui se passe à droite sur la figure 3.6);
- (3) toute fonction holomorphic au voisinage de K s'approche en norme uniforme sur K par la suite des restrictions à K d'une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{H}(U)$.

REMARQUE 3.12 (description de l'enveloppe d'holomorphic d'un compact dans un ouvert). Si K est un compact de \mathbb{C} inclus dans un ouvert U , il résulte de l'équivalence entre (1) et (2) dans le Théorème 3.10 que l'enveloppe d'holomorphic de K dans U est exactement l'union de K et de toutes les composantes connexes

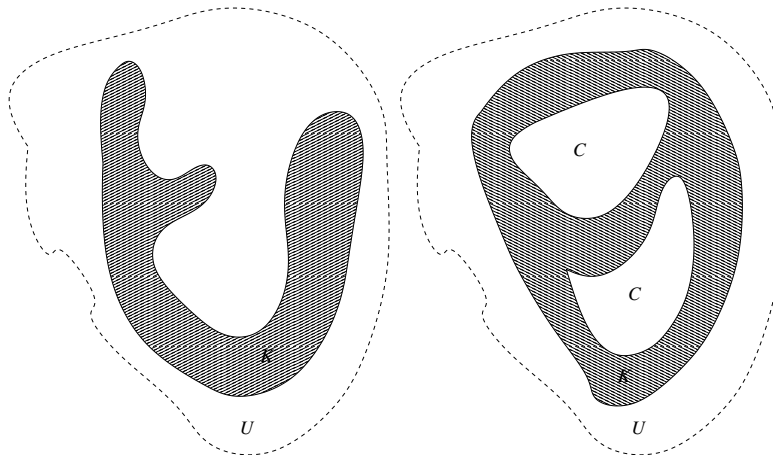


FIGURE 3.6. Théorème 3.10 : une « bonne » et une « mauvaise » configuration

de $U \setminus K$ qui sont relativement compactes dans U . En effet, puisque (1) implique (2), $\widehat{K_U}$ doit être un compact de U tel que $U \setminus \widehat{K_U}$ n'ait aucune composante relativement compacte dans U , ce qui implique que $\widehat{K_U}$ contienne nécessairement toutes les composantes connexes de $U \setminus K$ qui sont relativement compactes dans U (il faut nécessairement « remplir les trous »). Mais, en construisant l'union de K et de toutes ces composantes de $U \setminus K$ relativement compactes dans U , on construit bien (puisque (2) implique (1)) un compact holomorphiquement convexe dans U . Ce compact est le plus petit compact holomorphiquement convexe dans U et contenant K , c'est donc bien $\widehat{K_U}$.

DÉMONSTRATION. Prouvons d'abord (1) \implies (2) par l'absurde. Supposons que K soit holomorphiquement convexe dans U et que C soit une composante connexe de l'ouvert $U \setminus K$ relativement compacte dans U (comme sur la figure de droite, figure 3.6). Cette composante C est un ouvert borné, inclus dans U , et dont la frontière est incluse dans K . D'après le principe de maximum (Proposition 2.10), si $f \in \mathcal{H}(U)$, f est continue sur \overline{C} et on a, pour tout $z \in C$, $|f(z)| \leq \sup_{\partial C} |f| \leq \sup_K |f|$, ce qui implique $C \subset K$, d'où la contradiction.

Prouvons maintenant (2) \implies (3). Supposons (2) remplie. Notons $\mathcal{H}(U)|_K$ le sous-espace vectoriel de l'espace de Banach $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \sup_K | \cdot |)$ constitué des restrictions au compact K des fonctions holomorphes dans U . Soit h la restriction à K d'une fonction holomorphe dans un voisinage V de K . Pour montrer que h s'approche uniformément sur K par des éléments de $\mathcal{H}(U)|_K$, nous avons recours au théorème de Hahn-Banach¹⁹ : il suffit de montrer que, pour tout élément T du dual de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, on a

$$(3.50) \quad \left(\forall f \in \mathcal{H}(U), \langle T, f|_K \rangle = 0 \right) \implies \langle T, h|_K \rangle = 0$$

19. Voir le cours d'Analyse fonctionnelle de M1.

On admet ici le théorème de Frigyes Riesz²⁰ faisant le lien entre les points de vue fonctionnel et ensembliste en théorie de l'intégration²¹ : toute forme linéaire continue T sur le \mathbb{C} -espace de Banach $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \sup_K | \cdot |)$ se représente (de manière unique) sous la forme :

$$\varphi \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C}) \longmapsto \iint_K \varphi(\zeta) d\mu_T(\zeta)$$

où $\mu_T = \mu_T^+ - \mu_T^- + i(\nu_T^+ - \nu_T^-)$ est la combinaison (complexe) de quatre mesures positives sur la tribu borélienne, toutes les quatre de masse finie, *i.e.*

$$\iint_K d\mu_T^+(\zeta) + \iint_K d\mu_T^-(\zeta) + \iint_K d\nu_T^+(\zeta) + \iint_K d\nu_T^-(\zeta) < +\infty.$$

Une telle mesure μ_T est dite *mesure de Radon complexe* (ici, portée par K et de masse totale finie). Supposons que T vérifie la condition figurant à gauche de l'implication (3.50) et soit μ_T la mesure de Radon complexe associée. On introduit la *transformée de Cauchy* de cette mesure, définie comme la fonction

$$\text{TC}[\mu_T] : z \in \mathbb{C} \setminus K \longmapsto \iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus K$, comme on le vérifie en lui faisant subir le test de Morera (Théorème 2.3), test qu'elle passe avec succès si l'on invoque le théorème de Fubini. Nous allons prouver que cette transformée de Cauchy est identiquement nulle sous l'hypothèse faite sur T . On remarque tout d'abord que, si $K \subset D(0, R)$, alors, pour tout z tel que $|z| > R$, on a

$$\iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \iint_K \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^k \right) d\mu_T(\zeta) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\iint_K \zeta^k d\mu_T(\zeta) \right) \frac{1}{z^{k+1}}$$

(on utilise la convergence uniforme sur K de la série géométrique pour justifier l'interversion entre sommation infinie et prise d'intégrale dans la dernière égalité). Puisque $\zeta \mapsto \zeta^k$ est une fonction entière, donc holomorphe dans U , on a nécessairement $\langle T, (\zeta^k)|_U \rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ du fait de l'hypothèse faite sur T . La fonction $\text{TC}[\mu_T]$ est donc identiquement nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Si C est maintenant une composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus K$, on ne saurait avoir $C \subset U$: la frontière de C est en effet incluse dans K et l'hypothèse $C \subset U$ nous mettrait dans la configuration interdite selon (2) (figure de droite dans la figure 3.6). Chaque composante connexe bornée C de $\mathbb{C} \setminus K$ contient au moins un point $z_C \in \mathbb{C} \setminus U$; pour tout z voisin de z_C , la fonction

$$\zeta \in U \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$$

est dans $\mathcal{H}(U)$ et l'on a donc, par hypothèse sur T , pour de tels z ,

$$\text{TC}[\mu_T](z) = \langle T, 1/(\cdot - z) \rangle = 0.$$

D'après le principe des zéros isolés, la fonction $\text{TC}[\mu_T]$ est identiquement nulle dans toute la composante connexe bornée C puisqu'elle est identiquement nulle au

20. Analyste hongrois (1880-1956), Frigyes Riesz contribua beaucoup au développement de l'analyse fonctionnelle et de la théorie ergodique.

21. On pourra se reporter à [Rud] ou aussi à la section 1.2 de [Ydistrib] pour un rappel de cet énoncé, en écho à la présentation ensembliste de la théorie de l'intégration, comme elle est le plus souvent enseignée en L3 (voir par exemple [Yint]).

voisinage de $z_C \in C$. Ainsi, la transformée de Cauchy $\text{TC}[\mu_T]$ est identiquement nulle dans $\mathbb{C} \setminus K$. La figure 3.7 éclaire la suite du raisonnement. D'après le lemme de

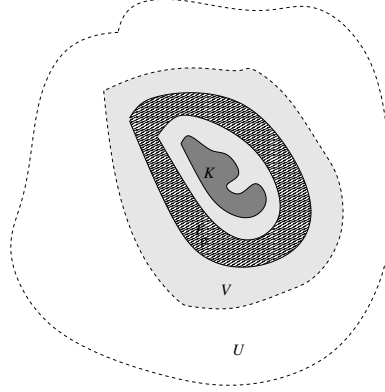


FIGURE 3.7. Preuve de (2) \implies (3) (Théorème 3.10)

partition de l'unité²², il existe une fonction « plateau » ρ identiquement égale à 1 au voisinage de K et de support inclus dans V . Le support de la fonction $\partial\rho/\partial\bar{\zeta}$ est un compact F_ρ inclus dans $V \setminus K$. D'après la formule de Cauchy-Pompeiu (Proposition 1.6, (1.59), appliquée dans un disque fermé contenant V), on a

$$\begin{aligned} \forall z \in K, h(z) &= h(z)\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\text{Supp } \rho \subset V} \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}[\rho h](\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{F_\rho} h(\zeta) \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de Fubini, on a donc

$$\begin{aligned} \iint_K h(z) d\mu_T(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_K \left(\iint_{F_\rho} h(\zeta) \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \right) d\mu_T(z) \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{F_\rho} h(\zeta) \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta) \left(\iint_K \frac{d\mu_T(z)}{\zeta - z} \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{F_\rho} h(\zeta) \frac{\partial\rho}{\partial\bar{\zeta}}(\zeta) \text{TC}[\mu_T](\zeta) d\xi d\eta = 0 \end{aligned}$$

puisque la transformée de Cauchy $\text{TC}[\mu_T]$ est identiquement nulle sur $\mathbb{C} \setminus K$, donc sur F_ρ . On a donc bien prouvé (en faisant appel au théorème de Hahn-Banach) que h s'approche uniformément sur K par une suite de restrictions à K déléments de \mathcal{H}_U .

Prouvons l'implication (3) \implies (1). Nous allons montrer d'abord (par l'absurde) que $U \setminus K$ ne saurait avoir de composante connexe relativement compacte dans K (c'est la clause (2)). Soit C une telle composante et $w \in C$. On peut, si (3) est

²². On admet ce lemme ici. Pour un énoncé et une preuve, voir par exemple le corollaire 1.6 dans la section 1.3 de [Ydistrib].

satisfaite, approcher en norme uniforme sur K la restriction à K de la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z-w}$$

(holomorphe au voisinage de K) par une suite $(f_k)_{k \geq 1}$ de fonctions holomorphes dans U . Le principe du maximum (Proposition 2.10, appliquée dans l'ouvert borné C dont la frontière est dans K) assure que, puisque la suite des restrictions des f_k à ∂C est de Cauchy dans $(\mathcal{C}(\partial C, \mathbb{C}), \sup_{\partial C} | \cdot |)$, que la suite $(f_k)_{k \geq 1}$ est uniformément de Cauchy sur tout compact F de C . Elle converge donc uniformément sur tout compact de C , d'après le fait que $(\mathcal{C}(F, \mathbb{C}), \sup_F | \cdot |)$ est complet et la Proposition 2.7, vers une fonction f holomorphe dans l'ouvert C et telle que

$$(z-w)f(z) + 1 = 0.$$

Ceci est impossible (il suffit de prendre $z = w$ pour s'en convaincre). Aucune composante connexe de $U \setminus K$ n'est donc relativement compacte dans U . Soit $z \in U \setminus K$. Posons $K_z := K \cup \{z\} \subset U$. Aucune composante connexe de $U \setminus K_z$ ne saurait être relativement compacte dans U : c'est bien sûr vrai pour les composantes connexes de $U \setminus K_z$ correspondant aux composantes connexes de $U \setminus K$ qui ne contiennent pas z (elles ne sont pas touchées lorsque K est remplacé par K_z) et c'est encore vrai pour la composante connexe de $U \setminus K_z$ restante (c'est juste une composante connexe de $U \setminus K$ à laquelle on a cette fois retiré un point). Puisque l'on sait que (2) implique (3), il est possible de construire une suite de fonctions $(f_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur K vers la fonction identiquement nulle et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) = 1$. On peut donc ainsi construire une fonction $\widehat{f} = f_k$ (pour k assez grand) telle que $|f(z)| > \sup_K |f|$. Ceci montre que $z \in U \setminus \widehat{K}_U$. On a ainsi montré $U \setminus K \subset U \setminus \widehat{K}_U$ et, par conséquent, $\widehat{K}_U \subset K$. Comme $K \subset \widehat{K}_U$, on a bien l'égalité et K est holomorphiquement convexe dans U . Ceci achève la preuve du théorème de Runge, version analytique. \square

Voici maintenant une version algébrique du théorème de Runge déclinée en quatre volets (approximation polynomiale ou approximation rationnelle, sur un compact ou sur un ouvert).

THÉORÈME 3.11 (théorème de Runge, version algébrique). *Les quatre assertions suivantes sont vraies.*

- (1) *Soit K un compact de \mathbb{C} tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe ; toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par des fonctions polynomiales en la variable z . L'assertion réciproque est aussi vraie.*
- (2) *Soit U un ouvert de \mathbb{C} tel que $\mathbb{C} \setminus U$ soit connexe. Toute fonction holomorphe dans U s'approche dans U (uniformément sur tout compact) par une suite de fonctions polynomiales en la variable z .*
- (3) *Soit K un compact de \mathbb{C} et $\Lambda \subset \mathbb{C} \setminus K$ un ensemble ayant au moins un point dans chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par une suite de fonctions rationnelles en la variable z , à pôles dans Λ .*
- (4) *Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $\Lambda \subset \mathbb{C} \setminus U$ un ensemble ayant au moins un point dans chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus U$. Toute fonction holomorphe dans U s'approche dans U (uniformément sur tout compact) par une suite de fonctions rationnelles à pôles (éventuels) dans Λ .*

DÉMONSTRATION. Les assertions (2) et (4) se déduisent respectivement de (1) et (3) en utilisant le procédé diagonal (utilisé dans ce cours par exemple pour la preuve du théorème de Montel), couplé avec le fait qu'il existe une exhaustion de U par une suite croissante de compacts $(K_l)_{l \geq 1}$. On pourra prouver ces résultats en exercice (cf. par exemple l'exercice 3.48). Nous donnerons ici seulement les preuves des assertions (1) et (3).

Assertion (1). On utilise, pour la formulation directe, l'implication (2) \implies (3) du Théorème 3.10 en prenant $U = \mathbb{C}$. Si $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe, $\mathbb{C} \setminus K$ n'a aucune composante connexe bornée (i.e. relativement compacte dans \mathbb{C}). Toute fonction holomorphe h au voisinage de K s'approche donc uniformément sur K par une suite de la forme $((F_k)|_K)_{k \geq 1}$, où les F_k , $k \geq 1$, sont des fonctions entières. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_k telle que $\sup_K |h - F_k| \leq \epsilon/2$. Mais toute fonction entière $F = \sum_{l \geq 0} a_l z^l$ s'approche uniformément sur un compact K par la suite $((\sum_{l=0}^L a_l z^l)|_K)_{L \geq 0}$; il existe donc une fonction polynomiale p_k telle que $\sup_K |F_k - p_k| \leq \epsilon/2$. On a donc, au final, $\sup_K |h - p_k| \leq \epsilon$. Trouver une telle fonction polynomiale p_k étant possible pour tout $\epsilon > 0$, on conclut bien à l'assertion (1). La formulation réciproque est immédiate : si toute fonction holomorphe au voisinage de K s'approche uniformément sur K par une suite de restrictions à K de fonctions polynomiales (donc en particulier holomorphes dans \mathbb{C} tout entier), la clause (3) du Théorème 3.10 (avec $U = \mathbb{C}$) est remplie; on a donc, puisque (3) \implies (2) dans l'énoncé de ce théorème, que $\mathbb{C} \setminus K$ n'admet aucune composante connexe bornée, donc est connexe car coïncidant avec sa seule composante connexe non bornée.

Assertion (3). On invoque, comme dans la preuve de (2) \implies (3) dans le Théorème 3.10, le théorème de Hahn-Banach. Soit T une forme linéaire continue sur le \mathbb{C} -espace de Banach $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \sup_K |\cdot|)$ (donc représentable par une mesure de Radon complexe μ_T de masse totale finie, supportée par K , d'après le théorème de F. Riesz), telle que, pour toute fonction rationnelle R à pôles dans Λ , on ait

$$(3.51) \quad \langle T, R \rangle = \iint_K R(\zeta) d\mu_T(\zeta) = 0.$$

Soit C une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, contenant donc au moins (par hypothèses) un point $\lambda_C \in \Lambda$. Au voisinage de $z = \lambda_C$, on peut développer la transformée de Cauchy $\text{TC}[\mu_T]$ ainsi :

$$\begin{aligned} \text{TC}[\mu_T](z) &= \iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{\zeta - z} = \iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{(\zeta - \lambda_C) - (z - \lambda_C)} \\ &= \iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{(\zeta - \lambda_C) \left(1 - \frac{z - \lambda_C}{\zeta - \lambda_C}\right)} = \iint_K \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - \lambda_C}{\zeta - \lambda_C}\right)^k \frac{d\mu_T(\zeta)}{\zeta - z} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\iint_K \frac{d\mu_T(\zeta)}{(\zeta - \lambda_C)^{k+1}} \right) (z - \lambda_C)^k \end{aligned}$$

(pour la dernière égalité, on utilise comme toujours, pour intervertir sommation infinie et prise d'intégrale, le fait qu'il y ait convergence uniforme sur K de la série de fonctions en ζ sous l'intégrale, ce pourvu que $|z - \lambda_C| < \text{dist}(z, K)$). D'après l'hypothèse (3.51) faite sur T , donc sur μ_T , toutes les intégrales figurant comme coefficients de cette série de puissances de $z - \lambda_C$ sont nulles. On en conclut, de par le principe des zéros isolés (Théorème 2.7) que la transformée de Cauchy $\text{TC}[\mu_T]$ est

identiquement nulle dans C . Ceci étant vrai pour toute composante connexe C de $\mathbb{C} \setminus K$, cette transformée de Cauchy $\text{TC}[\mu_T]$ est identiquement nulle dans $\mathbb{C} \setminus K$. On reprend alors à ce stade le raisonnement (basé sur le recours à la formule de Cauchy-Pompeiu) utilisé pour conclure à l'assertion (2) \implies (3) dans la démonstration du Théorème 3.10. On en conclut que, pour toute fonction h holomorphe au voisinage de K , $\langle T, h|_K \rangle = 0$, d'où la possibilité d'approcher h par une suite de fractions rationnelles à pôles dans Λ (si l'on invoque le théorème de Hahn-Banach). \square

3.3.4. Résolution du $\bar{\partial}$. Étant donné un ouvert U de \mathbb{C} , nous avons introduit au chapitre 1 les deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$, respectivement du \mathbb{C} -espace vectoriel $C^1(U, \mathbb{C})$ des fonctions de classe C^1 de U dans \mathbb{C} dans (pour ∂) le \mathbb{C} -espace des 1-formes continues dans U de la forme $A(z) dz$, et dans (pour $\bar{\partial}$) le \mathbb{C} -espace des 1-formes continues dans U de la forme $B(z) d\bar{z}$ (appelés respectivement espace des $(1, 0)$ -formes continues dans U et espace des $(0, 1)$ -formes continues dans U). Si l'on note $\mathcal{C}_{0,0}^\infty(U, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace des $(0, 0)$ -formes différentielles, *i.e.* des fonctions de U dans \mathbb{C} , de classe C^∞ , et $\mathcal{C}_{0,1}^\infty(U, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace des $(0, 1)$ -formes différentielles complexes de classe C^∞ dans U , on dispose du complexe de morphismes suivant, dit *complexe de Dolbeault*²³ :

$$(3.52) \quad \mathcal{C}_{0,0}^\infty(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_{0,1}^\infty(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0.$$

Un tel complexe de morphismes de \mathbb{C} -espaces vectoriels est dit *exact* si et seulement si l'image d'une flèche est égale au noyau de la flèche suivante. Nous pouvons aussi, utilisant les \mathbb{C} -espaces quotients, introduire le complexe incrémenté du morphisme nul à gauche :

$$(3.53) \quad 0 \longrightarrow \frac{\mathcal{C}_{0,0}^\infty(U, \mathbb{C})}{\mathcal{H}(U)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_{0,1}^\infty(U, \mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} 0.$$

Le premier morphisme $\bar{\partial}$ dans (3.52) passe bien en effet au quotient car toute fonction holomorphe $h \in \mathcal{H}(U)$ vérifie $\bar{\partial}h(\zeta) = (\partial h / \partial \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \equiv 0$ dans U . Nous pouvons alors énoncer l'important résultat important.

THEORÈME 3.12 (résolution du $\bar{\partial}$). *Pour tout ouvert U de \mathbb{C} , le complexe (3.53) est exact, autrement dit :*

- (1) *pour toute fonction φ de classe C^∞ de U dans \mathbb{C} , $\bar{\partial}\varphi(\zeta) \equiv 0$ dans U implique $\varphi \in \mathcal{H}(U)$;*
- (2) *pour toute $(1, 0)$ -forme complexe $\psi(\zeta) d\bar{\zeta}$ de classe C^∞ dans U , il existe une fonction φ de classe C^∞ sur U telle que $\bar{\partial}\varphi(\zeta) \equiv \psi(\zeta) d\bar{\zeta}$ dans U , ou encore, en termes de coefficients fonctions, $\partial\varphi/\partial\bar{\zeta} \equiv \psi$ dans U .*

DÉMONSTRATION. Le point (1) est déjà connu d'après le Théorème 2.2. Il reste donc à prouver le point (2), à savoir que si ψ est une fonction C^∞ de U dans \mathbb{C} , il existe toujours une fonction C^∞ φ de U dans \mathbb{C} telle que

$$(3.54) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z) = \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

On commence par remarquer que trouver φ est aisé lorsque ψ est à support compact dans U . Dans ce cas là en effet, on peut introduire une suite croissante de compacts à bord orienté $(K_l)_{l \geq 1}$, tous inclus dans U et contenant $\text{Supp } \psi$ dans leur intérieur,

²³. Pierre Dolbeault, mathématicien français contemporain (1924 -...), développa, avec Henri Cartan (1904-2008), l'analyse et la géométrie pluricomplexes.

telle que $U = \bigcup_{l \geq 1} K_l$. La formule de Cauchy-Pompeiu (Proposition 1.6, (1.59)), appliquée dans K_l avec chaque fois l assez grand (en fonction de z) pour que z soit à l'intérieur de K_l , nous assure que

$$\begin{aligned} \forall z \in U, \quad \psi(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{K_l} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \end{aligned}$$

(la dernière égalité résulte de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue dans le plan). Comme le support de ψ est compact, le théorème de différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres²⁴ s'applique ici (au voisinage de chaque point z_0 fixé dans U) et nous permet de montrer que la fonction

$$\varphi : z \in U \mapsto -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \psi(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est C^∞ dans U et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \psi(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \right] (z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

La fonction φ vérifie donc bien l'équation aux dérivées partielles (3.54).

Il reste à traiter le cas général, lorsque ψ n'est plus à support compact dans U . Comme l'enveloppe d'holomorphic $\widehat{K_U}$ dans U de tout compact K de U (Définition 3.10) est encore un compact de U , on peut réaliser²⁵ l'ouvert U comme union d'une suite croissante $(K_l)_{l \geq 1}$ de compacts K_l tous holomorphiquement convexes dans U , c'est-à-dire tels que $(\widehat{K_l})_U = K_l$ pour tout $l \geq 1$. Soit, pour chaque $l \geq 1$, $\rho_l : U \rightarrow [0, 1]$ une fonction « plateau²⁶ », identiquement égale à 1 au voisinage de K_l et de support compact dans U . On pose $\sigma_1 = \rho_1$ et, pour tout $l \geq 2$, $\sigma_l = \rho_l - \rho_{l-1}$, de telle sorte que

$$(3.55) \quad \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l(z) = 1 \quad \forall z \in U.$$

La fonction ψ peut donc se décomposer dans U en

$$\psi \equiv \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \right) \times \psi \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \sigma_l \psi,$$

chaque composant $\sigma_l \psi$, $l \geq 1$, étant une fonction C^∞ à support compact dans U . Pour chaque $l \geq 1$, il existe donc, d'après ce qui précède, une fonction φ_l , C^∞ dans U , telle que

$$(3.56) \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial \bar{z}}(z) = \sigma_l(z) \psi(z) \quad \forall z \in U.$$

Comme $\sigma_l = \rho_l - \rho_{l-1}$ pour $l \geq 2$ et que $\rho_l \equiv 1$ au voisinage de K_l pour tout $l \geq 1$, il résulte de (3.56) et du Théorème 2.2 que la fonction φ_l , pour $l \geq 2$, est holomorphe au voisinage de K_{l-1} . D'après le théorème de Runge, version analytique

24. cf. par exemple le théorème 3.3 dans [Yint].

25. C'est précisément cette construction d'une suite $(K_l)_{l \geq 1}$ qui achoppe en dimension supérieure, lorsque U est un ouvert de \mathbb{C}^n sur lequel on ne fait aucune hypothèse, voir la remarque 3.12.

26. On renvoie encore ici, pour la possibilité de réaliser une telle fonction, au corollaire 1.6 dans la section 1.3 de [Ydistrib].

(Théorème 3.10), on peut approcher φ_l , $l \geq 2$, uniformément sur K_{l-1} par une suite de restrictions à K_{l-1} de fonctions $h_{l,k}$ toutes holomorphes dans U (en effet K_{l-1} est supposé holomorphiquement convexe dans U). On peut en particulier choisir $h_{l,k} = h_l$ de manière à ce que

$$(3.57) \quad \sup_{K_{l-1}} |\varphi_l - h_l| \leq 2^{-l} \quad \forall l \geq 2.$$

On introduit la fonction

$$\varphi = \varphi_1 + \sum_{l=2}^{\infty} (\varphi_l - h_l).$$

La série définissante converge normalement sur tout compact K de U puisque la suite $(K_l)_{l \geq 1}$ exhauste U et que l'on a (3.57). D'autre part, pour tout $l \geq 2$, la fonction

$$z \mapsto \sum_{j=l+1}^{\infty} (\varphi_j - h_j)$$

est une somme (infinie, mais avec convergence normale de la série sur tout compact) de fonctions holomorphes au voisinage de K_l ; c'est donc une fonction holomorphe au voisinage de K_l . Pour z dans un tel voisinage de K_l ($l \geq 2$) sur lequel on suppose de plus que ρ_l vaut identiquement 1, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\varphi_1 + \sum_{j=2}^l (\varphi_j - h_j) \right](z) \\ &= \sum_{j=1}^l \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}}(z) = \sum_{j=1}^l \sigma_j(z) \psi(z) = \rho_l(z) \psi(z) = \psi(z). \end{aligned}$$

Comme $l \geq 2$ est ici arbitraire, la fonction φ est bien solution de l'équation aux dérivées partielles (3.54) et le Théorème 3.12 est démontré. \square

REMARQUE 3.13 (procédé de Mittag-Leffler²⁷). Le procédé utilisé dans cette preuve pour passer du cas où ψ est à support compact au cas général à partir d'une partition C^∞ de l'unité telle que (3.55), induisant la construction d'une suite $(\varphi_l)_{l \geq 1}$ que l'on « corrige » en invoquant le théorème de Runge, est appelé *procédé de Mittag-Leffler*. Ce procédé est d'un usage très fréquent en analyse ou géométrie complexe d'une ou plusieurs variables. Il permet de profiter de la souplesse du cadre C^∞ (partitions de l'unité, construction de fonctions plateau) pour prouver des résultats relevant du cadre holomorphe, qui lui est, on l'a vu tout au long de ce cours, un cadre beaucoup plus rigide (comme en attestent le principe des zéros isolés, le principe du maximum, celui de l'application ouverte, etc.).

27. Mathématicien suédois, Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) eut énormément d'échanges avec les analystes complexes français (Liouville, Briot, Bouquet, Hermite,...) et avec l'école allemande (Kummer, Weierstraß,...). Il publia ses résultats majeurs en Analyse complexe (souvent inspirés par le procédé de « sommation modifiée » qu'il popularisa) dans les années 1880-1890. On lui doit aussi la fondation, dans ce qui fut sa villa dans la banlieue de Stockholm, d'un célèbre Institut (toujours très actif) dédié aux mathématiques.

3.3.5. Le théorème de Mittag-Leffler et l'interpolation. Le théorème de Mittag-Leffler combine le résultat du théorème de Weierstraß (Théorème 3.9, ici dans le cas d'un ouvert U de \mathbb{C}) avec le théorème de résolution du $\bar{\partial}$ (Théorème 3.12), aux fins d'un problème d'interpolation : construire une fonction méromorphe à pôles (et ordres de ces pôles) prescrits, interpolant des valeurs complexes données en des points prescrits (ce à des ordres de précision aussi imposés).

THÉORÈME 3.13 (théorème de Mittag-Leffler). *Soit Λ_+ et Λ_- deux sous-ensembles disjoints d'un ouvert U de \mathbb{C} , tous les deux sans point d'accumulation dans U . Soient $m_+ : \Lambda_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ et $m_- : \Lambda_- \rightarrow \mathbb{N}^*$ deux fonctions à valeurs dans \mathbb{N}^* respectivement définies sur Λ_+ et Λ_- . Soient $w : \Lambda_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique définie sur Λ_+ . Il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{S}^2$, méromorphe dans U , et présentant aux points de $\Lambda_+ \cup \Lambda_-$ le comportement suivant :*

- (1) *tout point $\lambda_- \in \Lambda_-$ est pôle de f avec pour ordre $m_-(\lambda_-)$;*
- (2) *tout point $\lambda_+ \in \Lambda_+$ est zéro de $f - w(\lambda_+)$ avec une multiplicité égale à $m_+(\lambda_+)$.*

REMARQUE 3.14. Au contraire de ce que précise le théorème de Weierstraß (Théorème 3.9), rien n'est ici mentionné concernant le comportement de f en dehors de ce qui se passe sur un voisinage de $\Lambda_+ \cup \Lambda_-$ (sinon juste le fait que f soit méromorphe). La fonction f a-t-elle en particulier d'autres pôles que les points de Λ_- ? Où ? La fonction $f - w(\lambda_+)$ s'annule-t-elle ailleurs qu'aux points de Λ_+ où il est prescrit qu'elle s'annule ? Où ? Aucune information n'est ici fournie. Les théorèmes 3.9 et 3.13 sont donc bien de nature très différente.

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 3.9, il existe une fonction F , méromorphe dans U , ayant comme seuls zéros-pôles dans U les points de $\Lambda_+ \cup \Lambda_-$, avec comme multiplicité de chaque point $\lambda_+ \in \Lambda_+$ comme zéro l'entier $m_+(\lambda_+)$, et comme ordre de chaque point $\lambda_- \in \Lambda_-$ comme pôle l'entier $m_-(\lambda_-)$.

Pour chaque $\lambda_+ \in \Lambda_+$, introduisons un disque D_{λ_+} centré en λ_+ et tel que le disque fermé de rayon double $\overline{D_{\lambda_+}}$ soit inclus dans U . On fait aussi en sorte que tous ces disques $\overline{D_{\lambda_+}}$ soient deux à deux disjoints et qu'aucun ne rencontre Λ_- . Tout ceci est réalisable car les sous-ensembles Λ_+ et Λ_- sont disjoints et tous deux constitués de points isolés dans U . Comme on l'a fait dans les preuves du Théorème 3.10, puis du Théorème 3.12, on construit, pour chaque λ_+ , une fonction « plateau » $\rho_{\lambda_+} : U \rightarrow [0, 1]$, de classe C^∞ , de support inclus dans $\overline{D_{\lambda_+}}$, identiquement égale à 1 au voisinage de $\overline{D_{\lambda_+}}$. Considérons la fonction C^∞

$$\Theta : z \in U \longmapsto \Theta(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda_+} w(\lambda_+) \rho_{\lambda_+}(z),$$

puis la fonction $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$, tout aussi C^∞ (car Θ est constante au voisinage de chaque D_{λ_+} et que F est holomorphe au voisinage de l'union des supports des fonctions ρ_{λ_+} et a comme seuls zéros les points de Λ_+ dans ce voisinage), définie par

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{F(z)} (\partial\Theta/\partial\bar{z})(z) & \text{si } z \notin \bigcup_{\lambda_+} \overline{D_{\lambda_+}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au Théorème 3.12, on trouve une fonction $\Phi : U \mapsto \mathbb{C}$, de classe C^∞ et telle que $\partial\Phi/\partial\bar{z} \equiv \Psi$ dans U . Posons

$$\forall z \in U, \Theta_1(z) := \Theta(z) - \Phi(z)F(z).$$

Cette fonction vérifie $\partial\Theta_1/\partial\bar{z} \equiv 0$ dans U et est donc holomorphe dans cet ouvert d'après le Théorème 2.2. Au voisinage de chaque $\overline{D_{\lambda_+}}$, elle y coïncide avec la fonction $z \mapsto w(\lambda_+) - \Phi(z)F(z)$ et est donc telle que $\Theta_1 - w(\lambda_+)$ s'annule avec une multiplicité supérieure ou égale à $m_+(\lambda_+)$ en chaque point $\lambda_+ \in \Lambda_+$.

En reprenant tout ce que nous venons de faire (mais cette fois dans la situation où $\Lambda_- = \emptyset$ et Λ_+ est remplacé par $\Lambda_+ \cup \Lambda_-$, la fonction m_+ par la fonction constante égale à 1, et $w = 1 - \Phi$), on montre que l'on peut construire une fonction $H \in \mathcal{H}(U)$, valant exactement $1 - \Phi(\lambda_+)$ en chaque point $\lambda_+ \in \Lambda_+$ et $1 - \Phi(\lambda_-)$ en chaque point $\lambda_- \in \Lambda_-$.

On conclut en posant

$$f = \Theta - (\Phi + H)F.$$

Cette fonction est solution du problème, comme on le vérifie immédiatement. \square

REMARQUE 3.15 (un exemple de variante). Notons que c'est plus le procédé qui est important que le résultat qui en découle. Il existe en effet de nombreuses variantes du théorème de Mittag-Leffler (basées sur le recours au même procédé). On peut par exemple se donner un sous-ensemble $\Lambda \subset U$ sans point d'accumulation dans U et, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, une fonction f_λ méromorphe au voisinage de λ dans U . Le même procédé que celui utilisé pour la preuve du Théorème 3.13 permet alors de construire une fonction f méromorphe dans U , holomorphe dans $U \setminus \Lambda$, et telle que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $f - f_\lambda$ soit holomorphe au voisinage de λ (exercice 3.58).

3.3.6. Exercices.

EXERCICE 3.42 (un produit infini introduit par Mahler²⁸). Prouver la convergence du produit infini

$$z \in D(0, 1) \mapsto \prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + z^{2^k}).$$

vers une fonction holomorphe dans le disque unité. Vérifier la formule

$$\forall z \in D(0, 1), \frac{1}{1-z} = \prod_{k \in \mathbb{N}} (1 + z^{2^k}).$$

EXERCICE 3.43 (factorisation de la fonction Gamma).

a) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction méromorphe

$$f_k(z) := \frac{k}{k+z} \left(\frac{k+1}{k} \right)^z.$$

Montrer que le produit infini

$$z \mapsto \prod_{k \in \mathbb{N}^*} f_k(z)$$

28. Dans le sillage de Carl Siegel (1896-1981), Kurt Mahler (1903-1988), mathématicien allemand, s'intéressa particulièrement à la théorie des nombres, plus particulièrement à ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui la *géométrie diophantienne*.

est bien défini sur $U := \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ et définit dans cet ouvert une fonction Φ méromorphe dans \mathbb{C} , à pôles les entiers strictement négatifs.

b) Montrer que, pour tout z tel que $z - 1 \in U$,

$$\Phi(z - 1) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N! N^z}{z(z+1) \cdots (z+N)}.$$

c) Vérifier, pour tout z de partie réelle strictement positive, la formule

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N! N^z}{z(z+1) \cdots (z+N)}.$$

Utiliser pour cela le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que e^{-t} est, pour tout $t > 0$, la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $(1 - t/N)^N \chi_{[0, N]}(t)$.

d) Montrer que la fonction

$$z \in \{\operatorname{Re} z > 0\} \mapsto \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

se prolonge en une fonction méromorphe à tout le plan complexe et que ce prolongement coïncide avec la fonction $z \mapsto \Phi(z - 1)$.

e) En déduire que Γ ne s'annule pas dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, que $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière F , et que l'on a

$$F(z) = ze^{\gamma z} \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

où

$$\gamma := \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \log N \right) \quad (\dagger)$$

désigne la *constante d'Euler* (on montrera l'existence de la limite (\dagger)). Quels sont les zéros de la fonction entière F ?

EXERCICE 3.44 (le prolongement de ζ). Cet exercice constitue un prolongement de l'exercice 3.17 à la lumière des résultats de l'exercice 3.43. Combiner le résultat établi au **b)** de l'exercice 3.17 avec le résultat obtenu au **e)** de l'exercice 3.43 pour montrer que la fonction ζ définie dans $\{z; \operatorname{Re} z > 1\}$ par

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe et de la forme

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + H(z),$$

où $H(z)$ est une fonction entière.

EXERCICE 3.45 (une autre factorisation de la fonction sinus). En utilisant convenablement la formule traduisant la duplication des angles dans le calcul du sinus, montrer que l'on a la factorisation de la fonction sinus :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \cos\left(\frac{\pi z}{2k}\right),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du plan. Comparer avec la factorisation obtenue à l'exercice 3.29.

EXERCICE 3.46. Vérifier la convergence uniforme sur tout compact de U (et commutative au sens de la Proposition 3.2) des produits infinis apparaissant dans les questions **b)** de l'exercice 2.7 (dans ce cas $U = \{\operatorname{Re} z > 1\}$, **d)** de l'exercice 3.28 (dans ce cas $U = \mathbb{C}$), et **c)** de l'exercice 3.29 (dans ce cas $U = \mathbb{C}$).

EXERCICE 3.47 (théorème de Weierstraß).

a) Montrer qu'il existe une fonction entière F telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z+1) = F(z)$$

et qui s'annule en tous les zéros de $z \mapsto e^z - 1$.

b) Montrer en revanche que si P est un polynôme à coefficients complexes, de zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, supposés tous simples, la seule fonction entière F telle que l'on ait $P(d/dz)[F] \equiv 0$ et $F(\bar{\alpha}_j) = 0$, $j = 1, \dots, d$, est la fonction identiquement nulle²⁹.

EXERCICE 3.48 (théorème de Runge, assertion (2) du Théorème 3.11). Soit U un ouvert de \mathbb{C} dont le complémentaire n'a pas de composante connexe bornée. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans l'espace des fonctions holomorphes sur U (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

EXERCICE 3.49 (théorème de Runge). Soit K un compact de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe au voisinage de K . En utilisant le théorème de Runge, montrer que f s'approche uniformément sur K par des fonctions rationnelles à pôles simples, tous dans $\mathbb{C} \setminus K$. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de Cauchy : montrer pour cela qu'étant donné un ouvert U contenant K , il existe un nombre fini N de courbes de Jordan (polygonales) de support dans U telles que K soit dans l'union des ouverts qu'elles enserrent.

EXERCICE 3.50 (théorème de Runge). Montrer élémentairement que la fonction $z \mapsto 1/z$ ne peut être limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales dans l'anneau $\{1 \leq |z| \leq 2\}$. Cela est-il bien en concordance avec le théorème de Runge ?

EXERCICE 3.51 (théorème de Runge).

a). Soit $k \in \mathbb{N}$ et $0 < b_k < a_k < k$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale p_k tel que $|p_k(z)| \geq k$ si $\operatorname{Im} z = b_k$ et $z \in \overline{D}(0, k)$, et $|p_k(z)| \leq 1/k$ pour $z \in \overline{D}(0, k)$ et soit $\operatorname{Im} z \leq 0$, soit $\operatorname{Im} z \geq a_k$.

b) Dédire du **a)** l'existence d'une suite de fonctions polynomiales $(p_k)_k$ convergeant simplement vers la fonction nulle, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, mais non uniforme au voisinage d'aucun point de l'axe réel.

c) Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant simplement vers 0 sur \mathbb{R} et vers 1 sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

EXERCICE 3.52 (théorème de Runge et dualité). Soit K un compact de \mathbb{C} de mesure nulle. Montrer que les fonctions rationnelles à pôles hors de K sont denses dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

EXERCICE 3.53 (théorème de Runge et dualité). Soit K un compact de \mathbb{C} tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe et K de mesure nulle. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}(K)$. Que retrouve-t-on si K est un intervalle de \mathbb{R} ?

²⁹ L'opérateur $H(D)$ associé à la fonction entière $H : z \mapsto e^z - 1$, comme $P(D)$ l'est au polynôme P , est l'opérateur qui à une fonction entière F associe $F(z+1) - F(z)$, d'où le lien entre les deux questions **a)** et **b)** de l'exercice.

EXERCICE 3.54 (Runge et enveloppe d'holomorphic). Donner un exemple d'un compact K et de deux ouverts U_1 et U_2 contenant tous les deux K et tels que les enveloppes d'holomorphic \widehat{K}_{U_1} et \widehat{K}_{U_2} diffèrent.

EXERCICE 3.55 (Runge et enveloppe d'holomorphic). Prouver que les items suivants sont équivalents, étant donnés deux ouverts $U_1 \subset U_2$ de \mathbb{C} .

- Toute fonction holomorphic dans U_1 est limite uniforme sur tout compact d'une suite de restrictions à U_1 de fonctions holomorphic sur U_2 .
- Si $U_2 \setminus U_1 = K \cup F$ avec K compact, F fermé dans U_2 et $K \cap F = \emptyset$, alors $K = \emptyset$.
- Pour tout compact K de U_1 , $\widehat{K}_{U_2} = \widehat{K}_{U_1}$.
- Pour tout compact K de U_1 , $\widehat{K}_{U_1} = U_1 \cap \widehat{K}_{U_2}$.
- Pour tout compact K de U_1 , $U_1 \cap \widehat{K}_{U_2}$ est aussi un compact de U_1 .

EXERCICE 3.56 (Résolution du $\bar{\partial}$ et identité de Bézout). Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphic dans le disque unité ouvert $D(0, 1)$ du plan complexe, sans zéro commun dans ce disque.

- a) Construire deux fonctions g_1 et g_2 de classe C^∞ dans $D(0, 1)$ telles que l'on ait l'identité de Bézout $1 \equiv f_1 g_1 + f_2 g_2$ dans $D(0, 1)$.
- b) Déterminer tous les couples de fonctions (v_1, v_2) de classe C^∞ dans $D(0, 1)$ tels que l'on ait l'identité $f_1 v_1 + f_2 v_2 \equiv 0$ dans $D(0, 1)$.
- c) Avec la surjectivité de l'opérateur de Cauchy-Riemann de $C^\infty(D(0, 1), \mathbb{C})$ dans lui-même, montrer qu'en « corrigeant » judicieusement le couple (f_1, f_2) construit au a), on peut trouver deux fonctions h_1 et h_2 holomorphic dans $D(0, 1)$ telles que $f_1 h_1 + f_2 h_2 \equiv 1$ dans $D(0, 1)$.

EXERCICE 3.57 (problème additif de Cousin³⁰). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $(U_\iota)_\iota$ une famille d'ouverts de U telle que $\bigcup_\iota U_\iota = U$ (on dit que la famille $(U_\iota)_\iota$, indexée par un indice ι qui parcourt un ensemble dénombrable ou non, réalise un *recouvrement* de l'ouvert U). On dispose, pour tout couple d'indices (ι, ι') , de la donnée d'une fonction $f_{\iota, \iota'} \in \mathcal{H}(U_\iota \cap U_{\iota'})$. On impose les conditions suivantes :

$$\forall \iota_0, \iota_1, \iota_2, \quad f_{\iota_1, \iota_2} - f_{\iota_2, \iota_0} + f_{\iota_0, \iota_1} \equiv 0 \quad \text{dans} \quad U_{\iota_0} \cap U_{\iota_1} \cap U_{\iota_2}. \quad (\star)$$

La donnée de toutes les paires $(U_\iota \cap U_{\iota'}, f_{\iota, \iota'} : U_{\iota, \iota'} \rightarrow \mathbb{C})$ de manière à ce que les conditions (\star) soient remplies est appelée *donnée de Cousin*, ou encore *1-cocycle au sens de Čech* (subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_\iota$).

- a) Montrer que les conditions (\star) imposent nécessairement

$$f_{\iota, \iota} \equiv 0 \quad \text{dans} \quad U_\iota \quad \text{et} \quad f_{\iota, \iota'} \equiv -f_{\iota', \iota} \quad \text{dans} \quad U_\iota \cap U_{\iota'}$$

pour toute paire d'indices (ι, ι') .

- b) On admet³¹ à partir de maintenant le *lemme de partitionnement de l'unité* : il existe une famille dénombrable de fonctions ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, de classe C^∞ dans U , à valeurs dans $[0, 1]$, telles que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe un indice $\iota(k)$ tel que le

30. Il s'agit ici du *premier problème* de Cousin. Avec son compagnon « multiplicatif » (dit *second problème* de Cousin), tout aussi important dans la géométrie complexe et/ou algébrique modernes que le premier, ce problème a été introduit par le mathématicien français Pierre Cousin en 1895.

31. Pour une preuve de ce résultat, par ailleurs utilisé dans le cours pour construire des fonctions plateau (preuve de (2) \implies (3) dans le Théorème 3.10 ou preuve du Théorème 3.12), on pourra se reporter à [Ydistrib], section 1.3, Lemme 1.5.

support de ψ_k soit un compact inclus dans $U_{\iota(k)}$, de telle manière à ce que l'on ait le partitionnement de l'unité

$$1 \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k,$$

étant entendu que, pour chaque compact $K \subset U$, il n'y a au plus qu'un nombre fini de fonctions ψ_k non identiquement nulles sur K . Vérifier que la fonction h_ι définie, pour un indice ι donné, par

$$\Phi_\iota := \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k f_{\iota(k), \iota}$$

est une fonction C^∞ dans U_ι et que l'on a, quelque soient les deux indices ι et ι' ,

$$\Phi_{\iota'} - \Phi_\iota \equiv f_{\iota, \iota'} \quad \text{dans } U_\iota \cap U_{\iota'} \quad (**)$$

(exploiter pour cela les relations $(*)$).

c) Dédire du **b)** et du fait que les $f_{\iota, \iota'}$ sont holomorphes dans leurs domaines de définition qu'il existe une fonction $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^∞ sur U , telle que

$$\forall \iota, \forall z \in U_\iota, \quad \Psi(z) = \frac{\partial \Phi_\iota}{\partial \bar{z}}(z).$$

d) Dédire du **c)** et du théorème de résolution du $\bar{\partial}$ (Théorème 3.12) qu'il existe une fonction $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^∞ sur U , telle que

$$\forall \iota, \forall z \in U_\iota, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial \Phi_\iota}{\partial \bar{z}}.$$

e) En combinant le résultat établi au **d)** et les relations $(**)$ obtenues au **b)**, montrer qu'il existe, pour chaque indice ι , une fonction $h_\iota \in \mathcal{H}(U_\iota)$, de manière à ce que

$$\forall \iota, \iota', \quad h_{\iota'} - h_\iota \equiv f_{\iota, \iota'} \quad \text{dans } U_\iota \cap U_{\iota'}.$$

EXERCICE 3.58 (théorème de Mittag-Leffler). Soit U un ouvert de \mathbb{C} et $\Lambda \subset U$ un sous-ensemble de U sans point d'accumulation dans U . Soit, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, une fonction f_λ méromorphe au voisinage de λ dans U . En adaptant la preuve du Théorème 3.13, montrer qu'il existe une fonction f méromorphe dans U , holomorphe dans $U \setminus \Lambda$, telle que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $f - f_\lambda$ soit holomorphe au voisinage de λ .

Fonctions harmoniques dans le plan

4.1. Harmonicité et sous-harmonicité

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , telle que

$$(4.1) \quad \forall t_0 \in I, \forall r > 0, \quad [t_0 - r, t_0 + r] \subset I \implies f(t_0) \leq \frac{1}{2}(f(t_0 - r) + f(t_0 + r))$$

alors on sait¹ que la fonction f est automatiquement convexe (il est d'ailleurs équivalent de dire que f est convexe dans I et que f est continue sur I et vérifie (4.1)). Si maintenant $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , telle que

$$(4.2) \quad \forall t_0 \in I, \forall r > 0, \quad [t_0 - r, t_0 + r] \subset I \implies f(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0 - r) + f(t_0 + r)),$$

alors f et $-f$ sont toutes deux convexes, ce qui implique que f est affine, ou encore de classe C^∞ et vérifiant $(d^2/dt^2)[f] \equiv 0$ dans I . Notons que l'on peut interpréter la condition (4.2) en disant que f vérifie, comme fonction de I dans \mathbb{R} , la formule de la moyenne (ici en dimension 1). Ce sont ces concepts que l'on va étendre maintenant au cas de la dimension 2.

4.1.1. Fonctions harmoniques réelles, fonctions sous-harmoniques.

Pour formuler l'analogie de la *propriété de la sous-moyenne* (4.1) ou de la *formule de la moyenne* (4.2) en dimension 2, on pense naturellement, afin de ne pas avoir à privilégier de direction particulière (et donc d'introduire un concept qui s'avère isotrope), à remplacer les segments de \mathbb{R} par les disques du plan.

DÉFINITION 4.1 (fonctions harmoniques réelles et sous-harmoniques). Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *harmonique réelle* dans U si et seulement si elle est continue dans U et vérifie dans U la *formule de la moyenne* :

$$(4.3) \quad \forall z_0 \in U, \forall r > 0, \quad \overline{D(z_0, r)} \subset U \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r},$$

où $d\sigma_r$ représente la mesure de longueur sur le cercle de centre 0 et de rayon r . Une fonction $f : U \subset [-\infty, +\infty[$ est dite *sous-harmonique* dans U si et seulement si elle est semi-continue supérieurement (*i.e.* $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ est un ouvert de U pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$) et vérifie dans U la *propriété de la sous-moyenne* :

$$(4.4) \quad \forall z_0 \in U, \forall r > 0, \quad \overline{D(z_0, r)} \subset U \implies f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r},$$

1. Voir les cours d'Analyse de Licence 2.

REMARQUE 4.1. L'intégrale dans le membre de droite de (4.4) a bien un sens car toute fonction $f : U \rightarrow [-\infty, \infty[$ semi-continue supérieurement est nécessairement bornée supérieurement (avec borne atteinte d'ailleurs) sur tout compact² de l'ouvert U . La restriction de f au cercle $\{|z - z_0| = r\}$ s'écrit sur ce cercle comme différence de deux fonctions positives $f_{z_0,r}^+ - f_{z_0,r}^-$, la fonction $f_{z_0,r}^+$ étant bornée sur ce cercle. On peut donc définir

$$\int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r} = \int_{|\zeta|=r} f_{z_0,r}^+(\zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r} - \int_{|\zeta|=r} f_{z_0,r}^-(\zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r} \in [-\infty, \infty[,$$

puisque ce calcul ne fait pas surgir l'indétermination $\infty - \infty$.

La définition des fonctions harmoniques réelles dans un ouvert comme fonctions continues obéissant dans cet ouvert au jeu (4.3) des formules de la moyenne implique immédiatement la proposition suivante, pendant dans le cadre harmonique réel de la Proposition 2.7 dans le cadre holomorphe (mis à part le fait que, cette fois, nous ne disposons plus avec le \mathbb{R} -espace $\text{Harm}(U, \mathbb{R})$ d'une sous-algèbre de $C(U, \mathbb{R})$, car le produit de deux fonctions harmoniques n'a aucune raison d'être en général harmonique).

PROPOSITION 4.1. *Le \mathbb{R} -sous-espace $\text{Harm}(U, \mathbb{R}) \subset C(U, \mathbb{R})$ des fonctions harmoniques réelles dans U est un sous-espace fermé de $C(U, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

DÉMONSTRATION. La preuve est immédiate, car si $(f_k)_{k \geq 0}$ est une suite de fonctions continues de U dans \mathbb{R} , convergeant uniformément sur tout compact de U (en particulier les points et les cercles) vers une fonction f , cette fonction f vérifie le jeu de relations (4.3) dès que toutes les fonctions f_k , $k \geq 0$, le vérifient. \square

REMARQUE 4.2 (fonctions harmoniques complexes). On peut naturellement définir le sous-espace $\text{Harm}(U, \mathbb{C}) \subset C(U, \mathbb{C})$ des *fonctions harmoniques complexes* comme le complexifié de $\text{Harm}(U, \mathbb{R})$, c'est-à-dire le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions de la forme $h_1 + ih_2$, où h_1 et h_2 sont harmoniques réelles dans U . La Proposition 4.1 reste valable avec \mathbb{R} remplacé par \mathbb{C} .

On remarque que les fonctions harmoniques réelles (*resp.* sous-harmoniques) satisfont à des versions « volumiques » des propriétés (4.3) (*resp.* (4.4)).

PROPOSITION 4.2 (versions volumiques de la formule de la moyenne ou de la propriété de sous-moyenne). *Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique réelle dans un ouvert U de \mathbb{C} , on a*

$$(4.5) \quad \forall z_0 \in U, \forall r > 0, \\ \overline{D(z_0, r)} \subset U \implies f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D(0, r)}} f(z_0 + \zeta) d\xi d\eta.$$

². On laisse ce point en exercice; on peut utiliser (par exemple) la propriété de Bolzano-Weierstraß.

Si $f : U \rightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction sous-harmonique dans un ouvert U de \mathbb{C} , on a

$$(4.6) \quad \forall z_0 \in U, \forall r > 0, \\ \overline{D(z_0, r)} \subset U \implies f(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\overline{D(0, r)}} f(z_0 + \zeta) d\xi d\eta,$$

la même remarque 4.1 valant encore pour justifier la définition de l'intégrale au second membre de (4.6).

DÉMONSTRATION. Il suffit, si $\overline{D(z_0, r)} \subset U$, d'intégrer par rapport à ρ sur $[0, r]$ les égalités ou inégalités :

$$\rho f(z_0) \begin{cases} = \\ \leq \end{cases} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) \rho d\theta \quad \forall \rho \in [0, r],$$

et d'utiliser dans les intégrales doubles le changement de variables consistant à passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. \square

Les fonctions harmoniques réelles dans un ouvert U du plan constituent donc le pendant des fonctions affines réelles sur un intervalle I de \mathbb{R} , tandis que les fonctions sous-harmoniques dans un ouvert U du plan, à valeurs dans $[-\infty, \infty[$, constituent le pendant des fonctions convexes sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans $[-\infty, \infty[$. Comme le sont les fonctions affines dans le cadre de la dimension un (la droite est toujours le plus court chemin d'un point à un autre), les fonctions harmoniques réelles (en dimension deux cette fois) sont intimement liées au *principe de moindre action* que nous avons déjà évoqué à propos du concept d'*holomorphicité* (cf. la remarque 2.1), à la différence que l'on reste ici dans un cadre réel : en effet, le jeu des formules de la moyenne (4.3) est un jeu de formules réelles, tandis que le jeu des formules (2.12) est un jeu de formules complexes du fait de la présence du facteur i dans $d\zeta = d\xi + id\eta$.

EXEMPLE 4.1 (parties réelles et imaginaires de fonctions holomorphes). Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe dans un ouvert U du plan, f se plie à la formule de la moyenne (4.3) (cf. la Proposition 2.4). En prenant les parties réelles et imaginaires dans la formule énoncée dans (4.3), on voit que les fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ vérifient aussi cette formule. Ainsi, toute fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ se présentant dans cet ouvert comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est harmonique réelle.

EXEMPLE 4.2 (logarithme du module d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas). Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et non identiquement nulle dans un ouvert connexe U du plan, la fonction $z \in U \setminus f^{-1}(0) \mapsto \log |f(z)|$ est harmonique dans l'ouvert $U \setminus f^{-1}(0)$. En particulier, la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \log |z|$ est harmonique dans \mathbb{C}^* . En effet, si $\overline{D(z_0, r)} \subset U \setminus f^{-1}(0)$, il existe (voir la Proposition 1.11 adaptée au cadre holomorphe) une fonction $g_{z_0, r}$, holomorphe dans l'ouvert simplement connexe $D(z_0, r)$, continue dans $\overline{D(z_0, r)}$, et telle que $f \equiv \exp g_{z_0, r}$ dans $\overline{D(z_0, r)}$. On peut donc écrire, dans $\overline{D(z_0, r)}$, $\log |f| \equiv \log |\exp g_{z_0, r}| \equiv \operatorname{Re} g_{z_0, r}$. La fonction $g_{z_0, r}$ vérifie (puisque $g_{z_0, r}$ est holomorphe dans $D(z_0, r)$ et continue dans $\overline{D(z_0, r)}$) la formule de la moyenne

$$g_{z_0, r}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{z_0, r}(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

et il en est de même, en prenant les parties réelles des deux membres, pour la fonction $\operatorname{Re} g_{z_0, r} = \log |f|$. Nous avons bien prouvé ainsi que la fonction réelle $\log |f|$, continue sur $U \setminus f^{-1}(0)$, satisfaisait la propriété de la moyenne (4.3) dans cet ouvert. Elle est donc bien harmonique dans $U \setminus f^{-1}(0)$. On remarque d'ailleurs que, dans $U \setminus f^{-1}(0)$,

$$\partial\bar{\partial}[\log |f|] = \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}[\log f \bar{f}] = \frac{1}{2}\partial\left(\frac{\bar{d}f}{f}\right) \equiv 0.$$

On a donc, compte-tenu de (1.32), $\Delta[\log |f|] \equiv 0$ dans $U \setminus f^{-1}(0)$. Cet exemple sera poursuivi avec l'exemple 4.3, puis avec l'exercice 4.7, **a**).

4.1.2. Harmonicité réelle, sous-harmonicité et laplacien. Si $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique réelle de la forme $h = \operatorname{Re} f$, où $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (cf. l'exemple 4.1), alors h est nécessairement une fonction de classe C^∞ vérifiant l'équation de Laplace $\Delta[h] \equiv 0$, où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

désigne l'opérateur de Laplace ou laplacien (cf. (1.20)). Cette remarque, que conforte aussi la remarque finale dans l'exemple 4.2, suggère naturellement la proposition suivante, qui nous permettra d'enrichir le vivier des exemples de fonctions harmoniques réelles ou sous-harmoniques.

PROPOSITION 4.3 (laplacien et harmonicité). *Soit U un ouvert du plan complexe et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 dans U telle que $\Delta[f] \geq 0$ dans l'ouvert U . Alors f est sous-harmonique dans U . Si $\Delta[f] \equiv 0$ dans U , f est harmonique dans l'ouvert U . Si f est une fonction harmonique réelle et de classe C^2 dans un ouvert U , alors $\Delta[f] \equiv 0$ dans U .*

DÉMONSTRATION. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 dans U telle que $\Delta[f] \geq 0$ sur U . Soit $\overline{D}(z_0, r)$ un disque fermé inclus dans U , avec $z_0 = x_0 + iy_0$. Il résulte de la formule de Green (formule (1.57) du Théorème 1.5, appliquée ici avec $G = f$ et $F \equiv 1$ dans le compact $K = \overline{D}(z_0, \rho)$, $0 < \rho \leq r$) que l'on a

$$(4.7) \quad \forall \rho \in]0, r], \quad \int_{|\zeta|=\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{n}_{\text{ext}}}(z_0 + \zeta) d\sigma_\rho(\zeta) = \iint_{\overline{D}(z_0, \rho)} \Delta[f](\zeta) d\xi d\eta \geq 0.$$

La fonction

$$(4.8) \quad \rho \in [0, r] \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

est une fonction continue (comme intégrale dépendant du paramètre ρ). Comme f est C^2 , donc au moins C^1 , cette fonction est dérivable sur $]0, r[$, de dérivée

$$(4.9) \quad \rho \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{\nabla} f(z_0 + \rho e^{i\theta}), (\cos \theta, \sin \theta) \right\rangle d\theta = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{\partial f}{\partial \bar{n}_{\text{ext}}}(z_0 + \zeta) d\sigma_\rho(\zeta)$$

(en appliquant cette fois le théorème élémentaire de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre réel). D'après l'inégalité (4.7), la fonction (4.8) est croissante sur $]0, r[$. Du fait que cette fonction est aussi continue sur $[0, r]$, on en déduit que sa valeur en $\rho = 0$ est majorée par sa valeur en $\rho = r$, soit

$$f(z_0) \leq \int_{|\zeta|=r} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_r}{2\pi r}.$$

La fonction f vérifie donc la propriété de la sous-moyenne (4.2) dans U . Elle est donc sous-harmonique dans cet ouvert. Si $\Delta[f] \equiv 0$ dans U , ceci s'applique à f et $-f$, et par conséquent f vérifie la formule de la moyenne dans U et est donc harmonique.

Pour la dernière assertion, il suffit de remarquer, si $\overline{D(z_0, r)} \subset U$, que, du fait que la fonction (4.8) est constante, sa dérivée (4.9) est identiquement nulle sur $]0, r[$, et l'on a donc

$$\forall \rho \in]0, r[, \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{|\zeta| \leq \rho} \Delta[f](z_0 + \zeta) d\xi d\eta = 0.$$

En faisant tendre ρ vers 0 et en utilisant la continuité de $\Delta[f]$ en z_0 , on en déduit $\Delta[f](z_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in U$, on a bien $\Delta[f] \equiv 0$ dans U lorsque f est une fonction harmonique réelle de classe C^2 dans cet ouvert. \square

EXEMPLE 4.3 (sous-harmonicité de $\log \|f\|$). Cet exemple complète l'exemple 4.2 (voir aussi, pour un prolongement de cet exemple, l'exercice 4.7, **b**). Soient f_1, \dots, f_M M fonctions holomorphes sans zéros communs dans un ouvert U du plan complexe. La fonction

$$z \in U \mapsto \log \|f(z)\|^2 := \log (|f_1(z)|^2 + \dots + |f_M(z)|^2)$$

est sous-harmonique dans U . Elle est en effet C^∞ puisque $|f_1|^2 + \dots + |f_M|^2$ ne s'annule pas dans U . D'autre part, on a dans U

$$\bar{\partial} [\log \|f\|^2] = \frac{\sum_{j=1}^M f_j d\bar{f}_j}{\sum_{j=1}^M |f_j|^2}.$$

Il en résulte

$$dd^c [\log \|f\|^2] = \frac{1}{\|f\|^4} \left(\sum_{j=1}^M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^M (|f_j|^2 |f'_i|^2 + |f'_j|^2 |f_i|^2 - 2\operatorname{Re} [\bar{f}_j f_i f'_j \overline{f'_i}]) \right) \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2\pi}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique la positivité du facteur entre parenthèses. Du fait de la formule (1.32), on en conclut $\Delta[\log \|f\|^2] \geq 0$ dans U , ce qui prouve bien la sous-harmonicité de cette fonction d'après la Proposition 4.3.

4.1.3. Principes du maximum pour les fonctions sous-harmoniques continues. La première propriété importante des fonctions sous-harmoniques continues (et par conséquent, des fonctions harmoniques réelles) est qu'elles obéissent au principe du maximum. En voici d'abord la version locale :

PROPOSITION 4.4 (principe du maximum local pour les fonctions sous-harmoniques continues). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-harmonique réelle continue dans un ouvert U de \mathbb{C} . Si f admet un maximum local en un point z_0 de U , f est constante au voisinage de ce point.*

DÉMONSTRATION. Supposons que dans un disque $D(z_0, r) \subset U$, on ait partout l'inégalité $f \leq f(z_0)$. Pour tout $\rho \in [0, r[$, on a, puisque f est sous-harmonique dans l'ouvert U ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \rho e^{i\theta}) - f(z_0)) d\theta \geq 0.$$

Or, pour tout chaque tel $\rho \in [0, r[$, la fonction continue

$$\theta \in [0, 2\pi] \mapsto f(z_0 + \rho e^{i\theta}) - f(z_0)$$

est par hypothèses partout négative. L'intégrale sur $[0, 2\pi]$ d'une fonction continue négative ne peut être positive que si cette fonction est identiquement nulle. On voit donc ainsi que f est constante sur $D(z_0, r)$, donc au voisinage de z_0 . \square

La version locale induit la version globale suivante :

PROPOSITION 4.5 (principe du maximum global pour les fonctions sous-harmoniques continues). *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-harmonique continue dans un ouvert connexe U de \mathbb{C} , bornée et atteignant son maximum M en au moins un point z_0 de U . Alors f est constante dans U . Si en particulier U est de plus borné et que f se prolonge en une fonction continue sur \bar{U} et non constante sur U , on a $f(z) < \sup_{\partial U} f$ pour tout $z \in U$.*

DÉMONSTRATION. Pour la première assertion, on remarque que $f^{-1}(M)$ est un sous-ensemble non vide fermé de U (car f est supposée continue) qui est aussi ouvert dans U (d'après la Proposition 4.4). Comme U est connexe, on a $f^{-1}(M) = U$, et f est donc constante dans U . La seconde assertion découle immédiatement de la première. \square

4.1.4. Exercices.

EXERCICE 4.1 (formule de la divergence). Soit f une fonction réelle de classe C^2 dans un ouvert U du plan, telle que, pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ inclus dans U , on ait

$$\int_{|\zeta|=r} \frac{\partial f}{\partial \nu_{\text{ext}}}(z_0 + \zeta) d\sigma_r(\zeta) = 0$$

où σ_r désigne la mesure de longueur sur le cercle $\{|\zeta| = r\}$. Montrer que f est harmonique dans U .

EXERCICE 4.2. Soit U ou ouvert borné du plan tel que $\bar{U} = K$ soit un compact à bord orienté, comme dans l'énoncé du théorème de Green-Riemann. Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage de K , de classe C^2 et telle que $\Delta[f] \equiv 0$ dans U . Vérifier la formule de représentation :

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(\zeta) \log |\zeta - z| d\sigma_{\partial K}(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_{\text{ext}}} [\log |\zeta - z|] d\sigma_{\partial K}(\zeta),$$

où $d\sigma_{\partial K}$ représente la mesure linéique sur le bord de K . Que devient cette formule de représentation lorsque f est de classe C^2 dans U , mais ne vérifie plus $\Delta[f] \equiv 0$ dans U .

EXERCICE 4.3 (principe du maximum pour les fonctions harmoniques). Montrer que toute fonction réelle harmonique dans \mathbb{C} et bornée supérieurement est constante.

EXERCICE 4.4 (convexité et sous-harmonicité). Soit $f : [-\infty, \infty[$ une fonction sous-harmonique dans un ouvert U du plan, et $\Phi : [-\infty, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante (on convient donc de poser $\Phi(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t)$).

a) Montrer que $\Phi \circ f : U \rightarrow [-\infty, \infty[$ est semi continue supérieurement dans U .

b) Montrer que, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\alpha(t_0)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(t) \geq \Phi(t_0) + \alpha(t_0)(t - t_0).$$

Ceci reste-t'il vrai si $t_0 = -\infty$? Quel choix de $\alpha(-\infty)$ peut-on faire dans ce cas?

c) En déduire, si $\overline{D(z_0, r)} \subset U$, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi[f(z_0 + re^{i\theta})] d\theta \geq \Phi(t_0) + \alpha(t_0) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - t_0 \right).$$

d) En choisissant $t_0 \in [-\infty, \infty[$ convenable dans l'inégalité établie au c), montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi[f(z_0 + re^{i\theta})] d\theta \geq \Phi(f(z_0)).$$

En déduire que $\Phi \circ f$ est sous-harmonique dans U .

4.2. Autour du problème de Dirichlet

Étant donné un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et la donnée de deux nombres réels $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$, il existe une unique fonction affine $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h(a) = \varphi(a)$ et $h(b) = \varphi(b)$. En ayant en tête que, dans le cadre de la dimension deux, ce sont les fonctions harmoniques qu'il convient de substituer aux fonctions affines (cf. le préambule de la section 4.1), nous allons tenter dans cette section de transposer au plan le résultat que nous venons d'énoncer en dimension un (cadre où il s'avère banal).

4.2.1. Le théorème de Dirichlet pour un disque. Compte-tenu du rôle tenu par les disques dans la formule de la moyenne (4.3), il est naturel de penser faire tenir aux disques fermés (et non plus aux triangles pleins comme nous l'avons fait pour développer la théorie des fonctions holomorphes³) le rôle tenu par les segments en dimension 1. Cela nous conduit à énoncer le très important théorème de Dirichlet (dans le contexte particulier des disques fermés).

THEORÈME 4.1 (théorème de Dirichlet pour les disques). *Soit $\overline{D(z_0, R)}$ un disque fermé du plan complexe et $\varphi : \{|z - z_0| = R\} = \partial\overline{D(z_0, R)} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur le cercle de centre z_0 et de rayon R . Il existe une unique fonction réelle $h = P_{\overline{D(z_0, R)}}[\varphi]$, harmonique réelle dans $D(z_0, R)$, continue dans $\overline{D(z_0, R)}$, et telle que*

$$(4.10) \quad (|z - z_0| = R) \implies (P_{\overline{D(z_0, R)}}[\varphi](z) = \varphi(z)).$$

Cette fonction harmonique réelle est C^∞ dans $D(z_0, R)$, et donnée explicitement par la formule intégrale de Poisson⁴ :

$$(4.11) \quad \forall z \in D(z_0, R), \quad P_{\overline{D(z_0, R)}}[\varphi](z) = \int_{|\zeta|=R} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + \zeta - z|^2} \varphi(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_R(\zeta)}{2\pi R}.$$

REMARQUE 4.3. Si nous revenons au cadre d'un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en dimension 1, son bord est $\{a, b\}$, et la donnée de deux nombres réels $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ correspond donc à la donnée d'une fonction sur le bord de $[a, b]$. Il existe alors une unique fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , affine sur $]a, b[$, se prolongeant par continuité à

3. cf. le théorème de Morera (Théorème 2.3) par exemple.

4. Mathématicien français (1781-1840), Siméon Denis Poisson a marqué de son empreinte des domaines très diversifiés au sein du monde mathématique : analyse complexe et harmonique, théorie du potentiel (il a à l'évidence inspiré les idées de Green), théorie des probabilités (en 1837). L'autre formule célèbre auquel il a donné son nom est celle qui exprime que le spectre d'un réseau de \mathbb{R}^n est encore un réseau de $(\mathbb{R}^n)^*$ (voir [Yfourier] ou aussi [Ydistrib]).

$[a, b]$, le prolongement au bord correspondant au prolongement requis ($\varphi(a)$ en a , $\varphi(b)$ en b). Ceci illustre pourquoi le théorème de Dirichlet pour un disque constitue le pendant de ce résultat en dimension deux.

DÉMONSTRATION. Il est clair qu'il suffit pour prouver ce résultat de se ramener au cas où $z_0 = 0$ et $R = 1$ (on utilise ensuite une translation composée avec une homothétie). Nous prendrons donc $z_0 = 0$ et $R = 1$ dans la suite.

Prouvons d'abord l'unicité de h . Si nous disposons de deux telles fonctions h_1 et h_2 , leur différence $h_1 - h_2$ serait harmonique réelle dans $D(0, 1)$, se prolongerait continuellement à $\overline{D(0, 1)}$, le prolongement étant nul au bord. On en déduirait $h_1 \equiv h_2$ dans $\overline{D(0, 1)}$ en invoquant la seconde assertion du principe du maximum global (Proposition 4.5).

Vérifions maintenant que la fonction candidate proposée (4.11) est bien solution du problème. En remarquant que, pour tout $z \in D(0, 1)$, pour tout ζ avec $|\zeta| = 1$, on a l'identité

$$(4.12) \quad \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right),$$

et en utilisant le théorème de différentiation des intégrales à paramètres, on constate que

$$z \in D(0, 1) \mapsto P_{\overline{D(0, 1)}}[\varphi](z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} + \frac{\bar{z}}{e^{-i\theta} - \bar{z}} \right) \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

est de classe C^∞ dans $D(0, 1)$ et telle que

$$\Delta[P_{\overline{D(0, 1)}}[\varphi]](z) = 0 \quad \forall z \in D(0, 1).$$

En effet, toute fonction rationnelle R de z (*resp.* conjuguée \bar{R} de fonction rationnelle de \bar{z}) satisfait $\Delta[R] \equiv 0$ hors de l'ensemble des pôles de R (*resp.* $\Delta[\bar{R}] \equiv 0$ hors de l'ensemble des conjugués des pôles de R). Reste à prouver que

$$(4.13) \quad \lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ z \in D(0, 1)}} P_{\overline{D(0, 1)}}[\varphi](z) = \varphi(e^{i\theta_0}) \quad \forall \theta_0 \in [0, 2\pi].$$

On remarque pour cela que, pour tout $z \in D(0, 1)$,

$$(4.14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} + \frac{\bar{z}}{e^{-i\theta} - \bar{z}} \right) d\theta = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - 1/\bar{z}} \right) = 1$$

d'après la formule de Cauchy (notons que $1/\bar{z}$ est à l'extérieur du disque unité fermé). On a donc, si $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ et $z \in D(0, 1)$, en utilisant l'identité (4.14) et la positivité de (4.12),

$$(4.15) \quad |P_{\overline{D(0, 1)}}[\varphi](z) - \varphi(e^{i\theta_0})| = |P_{\overline{D(0, 1)}}[\varphi - \varphi(e^{i\theta_0})](z)| \leq P_{\overline{D(0, 1)}}[|\varphi - \varphi(e^{i\theta_0})|](z).$$

On choisit⁵ maintenant, étant donné $\epsilon > 0$ fixé η assez petit pour que

$$\begin{aligned}
P_{\overline{D(0,1)}}[|\varphi - \varphi(e^{i\theta_0})|](z) &= \int_{|\zeta|=1} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| \frac{d\sigma_1(\zeta)}{2\pi} = \\
&\int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| < \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| \frac{d\sigma_1(\zeta)}{2\pi} \\
&+ \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| \frac{d\sigma_1(\zeta)}{2\pi} \\
(4.16) \quad &\leq \max_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| < \eta}} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| + \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| \frac{d\sigma_1(\zeta)}{2\pi} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} |\varphi(\zeta) - \varphi(e^{i\theta_0})| \frac{d\sigma_1(\zeta)}{2\pi} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\sup_{|\zeta|=1} |\varphi|}{\pi} \int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\sigma_1(\zeta)
\end{aligned}$$

Or, si η est maintenant fixé (fonction bien sûr de ϵ), on constate que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta_0} \\ z \in D(0,1)}} \left(\int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} \right) d\sigma_1(\zeta) = 0.$$

Pour $z \in D(0,1)$, suffisamment proche de $e^{i\theta_0}$, on est ainsi assuré que

$$\frac{\sup_{|\zeta|=1} |\varphi|}{\pi} \times \left(\int_{\substack{|\zeta|=1 \\ |\zeta-e^{i\theta_0}| \geq \eta}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} d\sigma_1(\zeta) \right) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En reportant dans (4.16), puis dans (4.15), on en déduit que pour de tels z ,

$$|P_{\overline{D(0,1)}}[\varphi](z) - \varphi(e^{i\theta_0})| \leq \epsilon.$$

On a donc bien prouvé (4.13) et conclu ainsi la preuve du théorème de Dirichlet pour un disque. \square

4.2.2. La régularité des fonctions harmoniques réelles. Le théorème de Dirichlet pour les disques (Théorème 4.1) nous permet de montrer, comme cela se produisait pour les fonctions holomorphes⁶, que les fonctions harmoniques réelles dans un ouvert U du plan, définies comme les fonctions continues de U dans \mathbb{R}

5. On pourra avantageusement reprendre tout le raisonnement qui suit à la lumière de l'analyse de Fourier, cf. la sous-section 4.2.6, partant cette fois des formules (4.31) (surtout si l'on est familier avec l'opération de convolution 2π -périodique, voir [Yint], section 4.8).

6. Définies comme les fonctions continues $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telles que la forme $f(\zeta) d\zeta$ passe avec succès le test de Morera (cf. le Théorème 2.3).

obéissant aux conditions intégrales (4.3), sont en fait bien plus régulières que simplement continues. Un corollaire majeur du théorème de Dirichlet pour les disques est en effet le suivant ⁷ :

COROLLAIRE 4.1 (régularité des fonctions harmoniques réelles). *Les fonctions harmoniques réelles dans un ouvert U du plan sont les fonctions f de classe C^∞ de U dans \mathbb{R} , telles que $\Delta[f] \equiv 0$ dans U .*

DÉMONSTRATION. On sait déjà (Proposition 4.3) que toute fonction f de classe C^∞ de U dans \mathbb{R} , vérifiant $\Delta[f] \equiv 0$ dans U , est harmonique réelle dans U . Si f est une fonction harmonique réelle dans U et si $\overline{D(z_0, r)} \subset U$, il résulte du théorème de Dirichlet pour les disques (Théorème 4.1) que

$$\forall z \in D(z_0, r), \quad f(z) = P_{\overline{D(z_0, r)}}[f]_{\{|\zeta - z_0| = r\}}(z).$$

La fonction f est donc bien C^∞ et vérifiant $\Delta[f] \equiv 0$ dans $D(z_0, r)$. Ceci étant vrai pour tout disque fermé inclus dans U , on en déduit bien que f est C^∞ dans U et vérifie $\Delta[f] \equiv 0$ dans cet ouvert. \square

REMARQUE 4.4. On aurait donc pu définir les fonctions harmoniques réelles dans un ouvert U comme les fonctions de classe C^∞ de U dans \mathbb{R} appartenant au noyau du laplacien. Cependant, cette définition ne rend pas compte de l'important fait suivant : le test d'harmonicité se fait (sur les fonctions continues) par un jeu de conditions de nature intégrale, en l'occurrence le jeu des formules de la moyenne (4.3). Le même phénomène se produit avec les fonctions holomorphes : le test d'holomorphie (sur les fonctions continues) se fait *via* le test de Morera (Théorème 2.3), qui, lui-aussi, se traduit par un jeu de formules intégrales (le jeu (2.12)).

REMARQUE 4.5. De manière analogue à ce que nous avons signalé à propos du théorème de Morera (Remarque 2.3), il existe, ce qui est vraiment surprenant, des critères d'harmonicité bien moins contraignants que le jeu des formules de la moyenne (4.3). Par exemple, si $U = D(0, R)$ ($0 < R < +\infty$), et si $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ sont deux nombres strictement positifs tels que $r_1 + r_2 < R$ et que r_1/r_2 ne soit pas quotient de deux zéros distincts de la fonction entière $1 - J_0$ (voir l'exercice 1.3 pour la définition de la fonction de Bessel J_0), alors, toute fonction réelle continue dans $D(0, R)$ qui vérifie, pour $j = 1$ et $j = 2$,

$$\forall z_0 \in D(0, R - r_j), \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_j e^{i\theta}) d\theta,$$

est harmonique réelle dans $D(0, R)$ (donc C^∞ et de laplacien identiquement nul dans ce disque). On doit ce résultat à Jean Delsarte ⁸ (1960, lorsque $R = \infty$) et à des travaux plus récents (C. A. Berenstein, R. Gay, 1986) lorsque $R < +\infty$. Pour des références et d'autres résultats dans cette direction, on pourra consulter le riche *survey* de Larry Zalcman [**Zalc**] déjà mentionné dans la remarque 2.3. L'exercice 4.5 fournit aussi un autre exemple de résultat dans ce sens ; il s'agit d'un théorème de O. Kellogg ⁹ : si f est une fonction continue dans $D(0, R)$, satisfaisant

7. Il s'agit là du pendant du Théorème 2.2, cette fois dans le cadre harmonique, et non plus holomorphe.

8. Mathématicien français, de l'école de Nancy, Jean Delsarte (1903-1968) fut l'un des fondateurs du groupe Bourbaki.

9. Mathématicien américain, Oliver Dimon Kellogg (1878-1932) consacra une grande partie de ses travaux au problème de Dirichlet.

en chaque point z_0 de $D(0, R)$ la formule de la moyenne (4.3) pour seulement un rayon $r(z_0) \in]0, R - |z_0|[$ (dépendant du point z_0), alors f est harmonique dans $D(0, R)$.

4.2.3. La formule intégrale de Poisson dans un disque. Un autre corollaire du théorème de Dirichlet pour les disques (Théorème 4.1) est que les fonctions harmoniques obéissent, outre aux formules de la moyenne « surfacique » (4.3) ou « volumique » (4.5), à la *formule intégrale de Poisson*.

COROLLAIRE 4.2 (formule intégrale de Poisson). *Soit f une fonction harmonique réelle dans un ouvert U du plan et $\overline{D(z_0, R)}$ un disque fermé inclus dans U . Alors*

$$(4.17) \quad \forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = \int_{|\zeta|=R} \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + \zeta - z|^2} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_R(\zeta)}{2\pi R}.$$

Comme les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques réelles, la formule intégrale de Poisson (4.17) est aussi vérifiée pour toute fonction f holomorphe dans U .

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du théorème de Dirichlet (Théorème 4.1). D'après la clause d'unicité dans ce théorème, la fonction f (harmonique dans $D(z_0, R)$ et continue dans $\overline{D(z_0, R)}$) satisfait

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = P_{\overline{D(z_0, R)}} [f]_{\{|\zeta - z_0|=R\}}(z).$$

C'est ce que l'on voulait, compte-tenu de (4.11). □

4.2.4. La relation entre harmonicité réelle et holomorphicité. Nous sommes maintenant en mesure de clarifier l'intime relation entre harmonicité réelle et holomorphicité, relation que nous n'avions effleuré que dans un sens dans l'exemple 4.1, lorsque nous avons remarqué que partie réelle et partie imaginaire d'une fonction holomorphe dans un ouvert U sont toutes deux des fonctions harmoniques réelles dans ce même ouvert.

PROPOSITION 4.6 (conjuguée harmonique d'une fonction harmonique réelle). *Soit U un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et h une fonction harmonique réelle dans U . Il existe une autre fonction réelle $\tilde{h} : U \rightarrow \mathbb{R}$, elle aussi harmonique dans U , telle que $f = h + i\tilde{h}$ soit une fonction holomorphe dans U . Deux telles fonctions harmoniques réelles \tilde{h}_1 et \tilde{h}_2 diffèrent d'une constante réelle dans U . Une telle fonction \tilde{h} est appelée *conjuguée harmonique de h* dans l'ouvert simplement connexe U .*

DÉMONSTRATION. Soit h une fonction harmonique réelle dans U . Comme h est de classe C^∞ et que $\Delta[h] \equiv 0$ dans U (d'après le Corollaire 4.1), on a, compte tenu du scindage (1.20) de l'opérateur de Laplace, que la forme différentielle ∂h est une 1-forme abélienne dans U , *i.e.* une $(1, 0)$ -forme localement exacte dans U . Fixons un point z_0 de U . Comme U est supposé simplement connexe, la fonction

$$(4.18) \quad F : z \in U \longmapsto 2 \int_{\gamma_{z_0, z}} \partial h(\zeta),$$

où $\gamma_{z_0, z}$ désigne un chemin continu arbitraire $\gamma_{z_0, z} : [0, 1] \rightarrow U$ d'origine z_0 et d'extrémité z , est bien définie (l'intégrale (4.18) ne dépend pas en effet du choix

du chemin $\gamma_{z_0, z}$ d'après la Proposition 1.12, volet 1). De plus, la fonction F est holomorphe dans U et vérifie $dF(z) = \partial h(z)$, soit

$$(4.19) \quad \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 2 \frac{\partial h}{\partial z} \quad \& \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \quad \text{dans } U,$$

ou encore, en conjuguant les relations (4.19) et en utilisant le fait que h est à valeurs réelles,

$$(4.20) \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \equiv 2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \quad \& \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} \equiv 0 \quad \text{dans } U.$$

En combinant (4.19) et (4.20), on trouve

$$d[\operatorname{Re} F] \equiv dh \quad \text{dans } U.$$

Comme U est connexe, la fonction $h - \operatorname{Re} F$ est constante (réelle, valant c) dans U . Si l'on pose $\tilde{h} \equiv \operatorname{Im} F$, on constate que la fonction $h + i\tilde{h} = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F + c = F + c$ est holomorphe dans U . Nous avons donc bien exhibé une conjuguée harmonique \tilde{h} de h dans l'ouvert U .

Reste à prouver l'unicité (aux constantes réelles additives près) d'une telle conjuguée harmonique : si \tilde{h}_1 et \tilde{h}_2 sont deux conjuguées harmoniques de h dans U , la fonction $i(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)$ est une fonction holomorphe dans U et prenant ses valeurs dans $i\mathbb{R}$. Puisque cette fonction obéit aux conditions de Cauchy-Riemann (2.5), on en déduit $d(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2) \equiv 0$ dans U , soit, puisque U est connexe, que $\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$ est constante (réelle) dans U . \square

4.2.5. Mesure harmonique, fonction de Green et problème de Dirichlet. Soit \bar{D} un disque fermé du plan complexe, de rayon strictement positif. Avec la construction (cf. le Théorème 4.1) de l'application

$$\varphi \in C(\partial \bar{D}, \mathbb{R}) \longmapsto P_{\bar{D}}[\varphi] \in C(\bar{D}, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Harm}(D, \mathbb{R})$$

(ici $\operatorname{Harm}(D, \mathbb{R})$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions harmoniques réelles dans le disque ouvert D), nous avons réalisé un opérateur linéaire continu de $(C(\partial \bar{D}, \mathbb{R}), \sup_{\partial D} | \cdot |)$ dans le sous-espace fermé $(C(\bar{D}, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Harm}(D, \mathbb{R}), \sup_{\bar{D}} | \cdot |)$ de $(C(\bar{D}, \mathbb{R}), \sup_{\bar{D}} | \cdot |)$ constitué des fonctions continues de \bar{D} dans \mathbb{R} dont la restriction à D est harmonique réelle. On a en effet

$$\sup_{\bar{D}} |P_{\bar{D}}[\varphi]| \leq \sup_{\partial \bar{D}} |\varphi|$$

d'après le principe du maximum global pour les fonctions harmoniques réelles (Proposition 4.5, volet 2, appliquée ici dans D aux deux fonctions harmoniques $\pm P_{\bar{D}}[\varphi]$). Pour chaque $z \in D$, l'application

$$\varphi \in C(\partial \bar{D}, \mathbb{R}) \xrightarrow{T_D^z} \langle T_D^z, \varphi \rangle := P_{\bar{D}}[\varphi](z) \in \mathbb{R}$$

est donc une forme linéaire continue sur $C(\partial \bar{D}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire un élément du dual topologique du \mathbb{R} -espace de Banach $(C(\partial \bar{D}, \mathbb{R}), \sup_{\partial \bar{D}} | \cdot |)$. De plus, cette forme linéaire T_D^z est positive au sens suivant :

$$(4.21) \quad \forall \varphi \in C(\partial \bar{D}, [0, \infty]), \quad \langle T_D^z, \varphi \rangle \geq 0.$$

D'après le théorème de représentation de F. Riesz¹⁰, on peut affirmer que cette forme linéaire continue T_D^z se représente (de manière unique) par une mesure borélienne positive μ_D^z , de masse totale finie et de support le cercle $\partial\bar{D}$, cette représentation ayant lieu au sens suivant :

$$(4.22) \quad \forall \varphi \in C(\partial\bar{D}, \mathbb{R}), \quad \langle T_D^z, \varphi \rangle := P_{\bar{D}}[\varphi](z) = \int_{\partial\bar{D}} \varphi d\mu_D^z.$$

DÉFINITION 4.2 (mesure harmonique). Soit \bar{D} un disque fermé du plan complexe (de rayon strictement positif) et z un point du disque ouvert D . L'unique mesure borélienne positive μ_D^z , de support inclus dans $\partial\bar{D}$, telle que

$$(4.23) \quad P_{\bar{D}}[\varphi](z) = \int_{\partial\bar{D}} \varphi(\zeta) d\mu_D^z \quad \forall \varphi \in C(\partial\bar{D}, \mathbb{R})$$

est dite *mesure harmonique de l'ouvert relativement compact D au point $z \in D$* .

REMARQUE 4.6 (mesure harmonique et mouvement brownien). Cette mesure harmonique a une interprétation dans le langage probabiliste, interprétation très importante du point de vue de la physique. Soit z_0 un point de D et $((X_t, Y_t))_{t \geq 0}$ le processus stochastique (défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P)) dit *processus brownien 2-dimensionnel initié en z_0* : $X_0 + iY_0$ désigne la variable aléatoire constante égale à z_0 et les deux processus gaussiens $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont deux processus browniens 1-dimensionnels indépendants, *i.e* pour tout $t_2 > t_1 \geq 0$, les variables aléatoires réelles $X_{t_2} - X_{t_1}$ et $Y_{t_2} - Y_{t_1}$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance $t_2 - t_1$, telles que $X_{t_2} - X_{t_1}$ soit indépendante de $(X_u)_{0 \leq u \leq t_1}$ et $Y_{t_2} - Y_{t_1}$ indépendante de $(Y_u)_{0 \leq u \leq t_1}$, le processus $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ étant de plus supposé presque sûrement continu. Si A est sous-ensemble mesurable de $\partial\bar{D}$, $\mu_D^{z_0}(A)$ représente la probabilité avec laquelle le processus brownien 2-dimensionnel initié en z_0 rencontre pour la première fois le bord de D en un point de A .

Si U désigne un ouvert borné du plan complexe (mais non plus nécessairement un disque), on peut naturellement se demander s'il existe un opérateur linéaire continu $P_{\bar{U}}$ du \mathbb{R} -espace de Banach $(C(\partial\bar{U}, \mathbb{R}), \sup_{\partial\bar{U}} | \cdot |)$ dans le \mathbb{R} -espace de Banach $(C(\bar{U}, \mathbb{R}), \sup_{\bar{U}} | \cdot |)$ tel que :

- pour toute fonction $\varphi \in C(\partial\bar{U}, \mathbb{R})$, la fonction $P_{\bar{U}}[\varphi]$ est harmonique dans l'ouvert U ;
- pour toute fonction $\varphi \in C(\partial\bar{U}, \mathbb{R})$, la restriction au bord de \bar{U} de la fonction $P_{\bar{U}}[\varphi]$ coïncide avec la fonction φ .

Si tel est le cas, on dit que U est un ouvert dans lequel on peut résoudre le *problème de Dirichlet*. Il résulte du Théorème 4.1 que *tout disque ouvert du plan est un ouvert dans lequel on peut résoudre le problème de Dirichlet*.

DÉFINITION 4.3 (fonction de Green). On dit qu'un ouvert borné U du plan admet une *fonction de Green* si et seulement si, pour tout $z \in U$, il existe une fonction réelle $h_{U,z}$, harmonique dans U et de classe C^1 au voisinage de \bar{U} , nécessairement

10. Se référer à la preuve du Théorème 3.10, où ce théorème de représentation, faisant le pont entre les points de vue ensembliste et fonctionnel de la théorie de l'intégration, a été rappelé, voir par exemple [Rud] ou la section 1.2 de [Ydistrib].

unique d'après le principe du maximum global pour les fonctions harmoniques réelles (Proposition 4.5), telle que

$$\forall \zeta \in \partial\bar{U}, \quad h_{U,z}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \log |z - \zeta|.$$

La fonction de Green de U est alors définie comme la fonction de $\bar{U} \times U$ dans \mathbb{R} donnée par

$$G_U(\zeta, z) := \frac{1}{2\pi} \log |z - \zeta| + h_{U,z}(\zeta) \quad \forall z \in D(0, 1), \quad \forall \zeta \in \overline{D(0, 1)}.$$

La fonction $\zeta \in \bar{U} \mapsto G(\zeta, z)$ (pour $z \in U$) est appelée naturellement *fonction de Green*¹¹ de U avec pôle en z .

EXEMPLE 4.4 (fonction de Green d'un disque). Tout disque $D(z_0, R)$ admet une fonction de Green. Il suffit de prouver ceci pour le disque $D(0, 1)$, cas auquel on se ramène par translation et homothétie. On doit poser dans ce cas, du fait du Théorème 4.1,

$$\begin{aligned} h_{D(0,1),z}(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \mathbf{P}_{\overline{D(0,1)}}[\log |z - \zeta|] = -\int_{|w|=1} \frac{1 - |\zeta|^2}{|w - \zeta|^2} \frac{\log |z - w|}{2\pi} \frac{d\sigma_1(w)}{2\pi} \\ &= -\int_{|w|=1} \frac{1 - |\zeta|^2}{|w - \zeta|^2} \frac{\log |z\bar{w} - 1|}{2\pi} \frac{d\sigma_1(w)}{2\pi} = -\int_{|w|=1} \frac{1 - |\zeta|^2}{|w - \zeta|^2} \frac{\log |\bar{z}w - 1|}{2\pi} \frac{d\sigma_1(w)}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log |\bar{z}\zeta - 1|, \end{aligned}$$

la dernière égalité dans ces calculs étant justifiée par le fait que la fonction

$$\zeta \in D(0, 1) \mapsto -\frac{1}{2\pi} \log |\bar{z}\zeta - 1|$$

est harmonique dans le disque $D(0, 1/|z|)$ (cf. l'exemple 4.2). La fonction $h_{D(0,1),z}$ est harmonique dans $D(0, 1/|z|)$, donc C^∞ au voisinage de $\overline{D(0, 1)}$; elle satisfait aux propriétés requises dans la Définition 4.3 et la fonction de Green du disque unité $D(0, 1)$ est alors

$$(4.24) \quad G_{D(0,1)}(\zeta, z) = \frac{\log |z - \zeta|}{2\pi} - \frac{\log |1 - \bar{z}\zeta|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \zeta \bar{z}} \right|.$$

On constate¹² que $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$ pour tout z, ζ dans $D(0, 1)$.

REMARQUE 4.7. Tous les ouverts bornés du plan n'ont pas nécessairement de fonction de Green. Le disque épointé $D(0, 1) \setminus \{0\}$ ne saurait par exemple en avoir une (voir l'exercice 4.18). Le même exemple $D(0, 1) \setminus \{0\}$ est en fait un exemple d'ouvert borné de \mathbb{C} pour lequel le problème de Dirichlet n'est pas solvable (cf. le

11. Nous avons défini la fonction de Green de U de manière à ce que la fonction de Green de U avec pôle en z vaille $-\infty$ en z (valeur tolérée pour les fonctions sous-harmoniques). En prenant $-G_U$ à la place de G_U (comme par exemple dans [BG]), on ferait le choix de la valeur $+\infty$ au pôle z . Les deux conventions se justifient. J'ai privilégié ici celle adoptée dans [Charp], section III.3, par souci de cohérence entre les deux cours. Les spécialistes de théorie du potentiel, plus habitués à manier le concept de *fonction surharmonique* (à valeurs dans $] -\infty, +\infty[$) que celui de fonction *sous-harmonique* (comme on le fait par contre en analyse complexe du fait du rôle important dévolu aux fonctions $\log |f|$ avec f holomorphe) auront plutôt tendance à privilégier l'autre convention.

12. Ceci est un fait général : dès qu'un ouvert borné du plan possède une fonction de Green, celle-ci est automatiquement symétrique. Nous ne le démontrons pas ici et renvoyons par exemple à [BG], section 4.7.

même exercice 4.18). On admettra ici que ce type d'exemple est essentiellement le seul type d'exemple pathologique au regard de la solvabilité du problème de Dirichlet : en effet *pour tout ouvert U borné de \mathbb{C} dont aucune composante de la frontière n'est réduite à un point, le problème de Dirichlet est soluble* (pour une preuve de ce résultat important admis ici, voir par exemple [BG], section 4.7).

Lorsque U est un ouvert borné tel que $\overline{U} = K$ soit un compact à bord orienté, comme dans les hypothèses du théorème de Green-Riemann (Théorème 1.3), tel que le problème de Dirichlet soit soluble¹³, on peut expliciter la solution du problème de Dirichlet. On a en effet la proposition suivante.

PROPOSITION 4.7 (solvabilité du problème de Dirichlet et fonction de Green). *Soit U un ouvert borné du plan tel que $K = \overline{U}$ satisfasse aux conditions imposées dans le Théorème 1.3 de Green-Riemann et que le problème de Dirichlet soit soluble dans U (cette seconde hypothèse est de fait redondante, cf. la remarque 4.7). Alors, pour toute fonction $\varphi \in C(\partial K, \mathbb{R})$,*

$$(4.25) \quad \forall z \in U, \quad P_K[\varphi](z) = \int_{\partial K} \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta) \varphi(\zeta) d\sigma_{\partial K}(\zeta).$$

La fonction

$$(\zeta, z) \in \partial U \times U \mapsto \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta)$$

est appelée *noyau de Poisson de l'ouvert borné U* . Pour tout $z \in U$, la mesure borélienne (portée par ∂K et à densité par rapport à $\sigma_{\partial K}$) :

$$\mu_U^z = \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta) d\sigma_{\partial K}(\zeta)$$

est appelée (comme dans la Définition 4.2) *mesure harmonique de l'ouvert U au point $z \in U$* , la remarque 4.6 restant valable à propos de son interprétation probabiliste en termes du mouvement brownien initié en z . Si enfin f est une fonction harmonique réelle dans U et se prolongeant continuellement à $K = \overline{U}$, la formule de représentation intégrale (pour les fonctions harmoniques réelles)

$$(4.26) \quad \forall z \in U, \quad f(z) = \int_{\partial K} \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta) f(\zeta) d\sigma_{\partial K}(\zeta)$$

est dite *formule de Poisson (dans l'ouvert U)*.

DÉMONSTRATION. On fixe z dans U , $\epsilon > 0$ tel que $\overline{D(z, \epsilon)} \subset U$, et on note $K_{z, \epsilon}$ le compact $K_{z, \epsilon} := K \setminus D(z, \epsilon)$; il est clair que ce compact satisfait, comme K , aux hypothèses d'application du théorème de Green-Riemann, que nous allons utiliser ici sous la forme de la formule de Green, version symétrique (Théorème 1.5, formule (1.58)). On remarque dans un premier temps que cette formule de Green (version symétrique) reste valable lorsque F et G sont deux fonctions de classe C^2 dans U et de classe C^1 au voisinage de $K_{z, \epsilon}$, pourvu que ΔF et ΔG soient intégrables dans K : en effet, l'expression de l'intégrale au bord

$$\int_{\partial K} \langle F \vec{\nabla} G - G \vec{\nabla} F, \vec{n}_{\text{ext}} \rangle d\sigma_{\partial K}$$

13. Cette hypothèse concernant la solvabilité du problème de Dirichlet est en fait ici redondante, en vertu du résultat admis à la remarque 4.7, puisqu'il est exclu dans ce cas que la frontière de K (C^2 par morceaux, voire éventuellement C^1 par morceaux, cf. la remarque 1.7) puisse avoir une composante connexe réduite à un point.

ne fait intervenir que des différentiations partielles d'ordre un. On peut donc étendre la formule (1.58) à cette situation un peu plus générale (F et G de classe C^2 dans U , donc dans l'intérieur de $K_{z,\epsilon}$, et de classe C^1 au voisinage de K , donc de $K_{z,\epsilon}$, avec ΔF et ΔG intégrables dans U) en approchant $K_{z,\epsilon}$ par une suite $(K_{\epsilon,z,\eta_k})_{k \geq 1}$ de compacts « rentrants ». L'intégrale double sur K_{z,ϵ,η_k} au second membre de (1.58) tend, lorsque k tend vers l'infini, vers l'intégrale double sur K d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. On peut donc appliquer, si φ désigne une fonction continue de ∂K dans \mathbb{R} , la formule (1.58) avec $F = F_z = G_U(\cdot, z)$ et $G = P_K[\varphi]$ car ces deux fonctions sont harmoniques à l'intérieur de $K_{z,\epsilon}$ et toutes les deux de classe C^1 au voisinage de ce compact. Comme la fonction F_z est nulle sur ∂K par construction même de la fonction harmonique $h_{U,z}$ (cf. la définition 4.3), la formule (1.58) donne dans ce cas

$$(4.27) \quad \begin{aligned} & \int_{\partial K} \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta) \varphi(\zeta) d\sigma_{\partial K}(\zeta) \\ &= \int_{|\zeta|=\epsilon} \left(\frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} P_K[\varphi] - G_U(\cdot, z) \frac{\partial(P_K[\varphi])}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}} \right)(z + \zeta) d\sigma_\epsilon(\zeta). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_{|\zeta|=\epsilon} G_U(z + \zeta, z) \frac{\partial(P_K[\varphi])}{\partial \zeta}(z + \zeta) d\sigma_1(\zeta) \\ &= \int_{|\zeta|=\epsilon} \left(\frac{\log \epsilon}{2\pi} + h_{U,z}(z + \zeta) \right) \frac{\partial(P_K[\varphi])}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(z + \zeta) d\sigma_1(\zeta). \end{aligned}$$

Comme les fonctions

$$\zeta \mapsto h_{U,z}(z + \zeta) \quad \text{et} \quad \zeta \mapsto \frac{\partial(P_K[\varphi])}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(z + \zeta)$$

sont continues, donc bornées, au voisinage de 0, et que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(\epsilon \log \epsilon) = 0$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|\zeta|=\epsilon} G_U(z + \zeta, z) \frac{\partial(P_K[\varphi])}{\partial \zeta}(z + \zeta) d\sigma_1(\zeta) \right) = 0.$$

Comme d'autre part

$$|\zeta| = \epsilon \implies \frac{\partial \log |\zeta|}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(\zeta) = 1/\epsilon,$$

et d'autre part que les fonctions $P_K[\varphi]$ et $h_{U,z}$ sont continues au voisinage de z , on a aussi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|\zeta|=\epsilon} \frac{\partial G_U(\cdot, z)}{\partial \vec{n}_{\text{ext}}}(z + \zeta) P_K[\varphi](z + \zeta) d\sigma_1(\zeta) \right) = P_K[\varphi](z).$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans (4.27), on obtient bien le résultat voulu. \square

En guise de conclusion à cette sous-section, signalons que la solvabilité (en général, cf. la Remarque 4.7) du problème de Dirichlet soulève de très nombreuses questions (souvent concrètes) en analyse spectrale et en analyse harmonique, en particulier en relation avec ce que l'on appelle communément les « problèmes inverses ». En voici une célèbre, avec la célèbre question posée par Mark Kac en 1966 : peut-on reconnaître la forme d'un tambour (une membrane plane tendue au bord d'un compact K tel que le problème de Dirichlet soit soluble dans l'intérieur de K) en l'écoutant (c'est-à-dire en écoutant sa membrane vibrer ¹⁴) ? La réponse est non en

14. Voir pour cette question l'article original de Mark Kac [Kac].

général (comme l'ont prouvé Carolyn Gordon, David Webb, Scott Wolpert en 1992). De nombreuses autres questions pratiques en imagerie médicale (tomographie, IRM, *etc.*) font intervenir la résolution du problème de Dirichlet : il est très important en effet de savoir (on comprend aisément pourquoi si l'on pense à l'imagerie médicale) détecter le contenu d'un objet en ne disposant que d'informations au bord.

4.2.6. Analyse de Fourier et formule de Poisson du disque $D(0, 1)$. Le noyau de Poisson du disque $D(0, 1)$

$$(\zeta, z) \in \{|\zeta| = 1\} \times D(0, 1) \mapsto \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

(voir la sous-section (4.2.1)) a une expression particulièrement agréable en coordonnées polaires : si $\zeta = e^{i\tau}$ et $z = re^{i\theta}$ (avec $0 \leq r < 1$ et $\tau, \theta \in \mathbb{R}$), on constate que

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\theta - \tau)}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(\theta - \tau)} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos(k(\theta - \tau)) \right). \end{aligned}$$

Toute fonction $\varphi \in C(|\zeta| = 1, \mathbb{R})$ peut être comprise comme une fonction continue 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , c'est-à-dire comme une fonction continue du groupe quotient $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ dans \mathbb{R} . On rappelle que, sur ce groupe \mathbb{T} , on définit l'opération de convolution 2π -périodique entre éléments de $L^1(\mathbb{T}, d\tau)$ par

$$(\dot{\varphi}_1 *_{\mathbb{T}} \dot{\varphi}_2)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_1(\theta - \tau) \varphi_2(\tau) d\tau,$$

les (classes de) fonctions $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ étant entendues ici comme des classes de fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} , intégrables sur $[0, 2\pi]$ (voir par exemple [Yint], section 4.8). Cette opération est une opération interne pour $L^1(\mathbb{T}, d\tau)$. Exploitant ces notations, on peut, si $\tau \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\tau)$ est une fonction réelle continue 2π -périodique sur \mathbb{R} , *i.e.* une fonction continue de \mathbb{T} dans \mathbb{R} , représenter $P_{D(0,1)}[\varphi]$ comme suit :

$$(4.29) \quad \begin{aligned} P_{D(0,1)}[\varphi](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\tau) \varphi(\theta - \tau) d\tau \\ &= (P_r *_{\mathbb{T}} \varphi)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\varphi) r^{|k|} e^{ik\theta} \quad \forall r \in [0, 1[, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(le développement en série au membre de droite de (4.29) étant normalement convergent sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$), où

$$(4.30) \quad \forall r \in [0, 1[, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad P_r(\tau) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\tau}|^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\tau},$$

et

$$\varphi = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k(\varphi) e^{ik(\cdot)}$$

représente le développement de φ en série de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$ ($c_k(\varphi)$ désignant le coefficient de Fourier d'indice $k \in \mathbb{Z}$ de φ). La dernière égalité dans (4.29) correspond donc à l'application de la formule de Plancherel (voir par exemple [Yfourier]).

Cette manière d'exprimer l'action de l'opérateur $P_{\overline{D(0,1)}} : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\overline{D(0,1)}, \mathbb{R})$ suggère la définition suivante.

DÉFINITION 4.4 (transformée de Poisson). La *transformée de Poisson* d'une forme linéaire continue $L : (C(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \text{sup}_{\mathbb{T}} | \cdot |) \rightarrow \mathbb{C}$, c'est-à-dire, d'après le théorème de représentation de F. Riesz¹⁵, d'une mesure de Radon complexe μ_L (de masse totale finie) se décomposant comme combinaison linéaire $\mu_L = \mu_L^+ - \mu_L^- + i(\nu_L^+ - \nu_L^-)$ de quatre mesures boréliennes positives, avec $\int_{\mathbb{T}} d|\mu_L| = \|L\| < +\infty$, est la fonction harmonique complexe (dans $D(0,1)$) $P_{\overline{D(0,1)}}[L] = P_{\overline{D(0,1)}}[\mu_L]$ définie par

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \forall r \in [0, 1[, \forall \theta \in \mathbb{T}, \quad P_{\overline{D(0,1)}}[L](re^{i\theta}) &= P_{\overline{D(0,1)}}[\mu_L](re^{i\theta}) \\ &= \langle L, P_r(\theta - \cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \tau) d\mu_L(\tau) = (P_r *_{\mathbb{T}} \mu_L)(\theta). \end{aligned}$$

Pour chaque $r \in [0, 1[$, le développement en série de Fourier de

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto P_{\overline{D(0,1)}}[L](re^{i\theta})$$

est le développement normalement convergent

$$P_{\overline{D(0,1)}}[L](re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} c_k(\mu_L) e^{ik\theta},$$

où les

$$c_k(\mu_L) := \frac{1}{2\pi} \langle L, e^{ik(\cdot)} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\tau} d\mu_L(\tau), \quad k \in \mathbb{Z},$$

sont les coefficients de Fourier de la mesure complexe μ_L .

EXEMPLE 4.5 (valeurs au bord des fonctions holomorphes). Si $\dot{\varphi} \in L^1(\mathbb{T}, d\dot{\tau})$ est une classe de fonction intégrable sur \mathbb{T} telle que $c_k(\dot{\varphi}) = 0$ pour tout $k < 0$, la transformée de Poisson de la mesure à densité $\dot{\varphi}(\tau)d\dot{\tau}$ s'exprime comme

$$\forall z = re^{i\theta} \in D(0,1), \quad P_{\overline{D(0,1)}}[\dot{\varphi} d\dot{\tau}](z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\dot{\varphi}) r^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\dot{\varphi}) z^k,$$

et est donc une fonction holomorphe dans $D(0,1)$. Ainsi, les fonctions intégrables sur le cercle unité dont les coefficients de Fourier c_k sont nuls pour $k < 0$ peuvent être interprétées comme « valeurs au bord » de $D(0,1)$ de fonctions holomorphes dans ce disque ouvert : on peut en effet démontrer (on laisse ceci en exercice, il faut utiliser la continuité de la translation dans $L^1(\mathbb{T}, d\dot{\tau})$ et s'inspirer¹⁶ du découpage introduit dans la preuve du Théorème 4.1) que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \|P_r *_{\mathbb{T}} \dot{\varphi} - \dot{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{T}, d\dot{\theta})} = 0.$$

Si de plus $\dot{\varphi} \in L^p(\mathbb{T}, d\dot{\tau})$ avec $p \in [1, \infty[$, on a aussi

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \|P_r *_{\mathbb{T}} \dot{\varphi} - \dot{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{T}, d\dot{\theta})} = 0.$$

15. Ce théorème a été déjà utilisé deux fois dans ce cours : pour la démonstration du théorème de Runge (Théorème 3.10) et pour la définition de la mesure harmonique (Définition 4.2). Pour un énoncé, voir [Rud] (on y trouvera aussi une démonstration) ou la section 1.2 de [Ydistrib].

16. Voir par exemple les Propositions 4.10 et 4.13 dans [Yint], il s'agit ici d'un cas particulier de la Proposition 4.13 de [Yint].

Attention, cependant : ceci est faux pour $p = \infty$. On réalise en fait avec la suite $(P_{r_k})_{k \geq 0}$ (lorsque $(r_k)_{k \geq 0}$ est une suite de réels de $]0, 1[$ tendant en croissant vers 1) une *approximation de la masse de Dirac périodisée* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\cdot - 2k\pi)$ (considérée comme mesure sur le groupe \mathbb{T}).

On a de plus la proposition suivante :

PROPOSITION 4.8. *Soit L une forme linéaire continue sur $(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \sup_{\mathbb{T}} | \cdot |)$ et μ_L la mesure de Radon complexe (de masse totale finie) sur \mathbb{T} représentant L (suivant le théorème de représentation de F. Riesz). On a*

$$(4.32) \quad \sup_{r \in [0, 1[} \left(\int_0^{2\pi} |P_{\frac{\cdot}{D(0,1)}}[L](re^{i\theta})| d\theta \right) \leq \|L\| = \int_{\mathbb{T}} d|\mu_L| < +\infty.$$

Réciproquement, si h est une fonction harmonique complexe dans $D(0, 1)$ telle que

$$\sup_{r \in [0, 1[} \left(\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})| d\theta \right) = M(h) < +\infty,$$

il existe une unique forme linéaire continue sur $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ (i.e. une unique mesure de Radon complexe de masse totale finie μ_L sur \mathbb{T}) telle que

$$(4.33) \quad h \equiv P_{\frac{\cdot}{D(0,1)}}[L] \equiv P_{\frac{\cdot}{D(0,1)}}[\mu_L]$$

dans le disque ouvert $D(0, 1)$.

DÉMONSTRATION. Pour la première assertion, on utilise la positivité, la parité, de P_r , et le fait que P_r soit d'intégrale 1 sur \mathbb{T} pour tout $r \in [0, 1[$, puis le théorème de Fubini-Tonelli : pour tout $r \in [0, 1[$, on a donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - \tau) d\mu(\tau) \right| d\dot{\theta} \\ & \leq \int \int_{\mathbb{T}^2} P_r(\theta - \tau) d\dot{\theta} \otimes d|\mu|(\tau) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} P_r(\theta - \tau) d\dot{\theta} \right) d|\mu|(\tau) = \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(\tau), \end{aligned}$$

ce qui donne (4.32). Pour la seconde assertion, on remarque (en utilisant le théorème de représentation de F. Riesz) que, pour tout entier $k > 1$, il existe une unique mesure de Radon complexe $\mu_{h,k}$ sur \mathbb{T} telle que

$$(4.34) \quad \forall z \in D(0, 1), \quad h((1 - 1/k)z) = P_{\frac{\cdot}{D(0,1)}}[\mu_{h,k}](z)$$

et

$$\int_{\mathbb{T}} d|\mu_{h,k}| \leq M(h).$$

Il résulte du théorème de Banach-Alaoglu¹⁷ que l'on peut extraire de la suite de mesures de Radon complexes $(\mu_{h,k})_{k > 1}$ une sous-suite faiblement convergente vers une mesure de Radon complexe μ_L sur \mathbb{T} , telle que l'on ait aussi $\int_{\mathbb{T}} d|\mu_L| \leq M(h)$. En faisant tendre ν vers l'infini dans (4.34) écrite pour $k = k(\nu)$, on obtient bien la formule de représentation (4.33). \square

17. Voir le cours d'Analyse fonctionnelle de M1 : la boule unité du dual du \mathbb{C} -espace de Banach $(C(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \sup_{\mathbb{T}} | \cdot |)$ est *faiblement compacte*, i.e. de toute suite bornée $(L_k)_{k > 1}$ de formes linéaires continues sur $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, on peut extraire une sous-suite $(L_{k(\nu)})_{\nu \geq 0}$ convergeant faiblement vers une forme linéaire continue L , soit

$$\forall \varphi \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \quad \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \langle L_{k(\nu)}, \varphi \rangle = \langle L, \varphi \rangle.$$

4.2.7. Exercices.

EXERCICE 4.5 (théorème de Kellogg). Soit f une fonction continue réelle dans le disque fermé $\overline{D(0, R)}$ du plan, telle que, pour tout z_0 dans le disque ouvert $D(0, R)$, il existe $r(z_0) \in]0, R - |z_0|[$ tel que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r(z_0) e^{i\theta}) d\theta.$$

a) Comment s'exprime l'unique fonction h harmonique dans $D(0, R)$, continue dans $\overline{D(0, R)}$, et telle que $h = f$ sur le cercle $\{|\zeta| = R\}$?

b) On note $w = f - h$ et $M := \max_{\overline{D(0, R)}} w$ et l'on suppose $M > 0$. On suppose que l'ensemble $E = \{w = M\} \cap D(0, R)$ est non vide. Montrer qu'il existe au moins un point z_0 de $D(0, R)$ tel que

$$R - |z_0| = d(E, \{|\zeta| = R\}) > 0.$$

c) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (w(z_0) - w(z_0 + r(z_0) e^{i\theta})) d\theta = 0$$

et en conclure que $w \equiv M$ dans $D(z_0, r(z_0))$. Pourquoi ceci contredit-il l'hypothèse faite sur E (E non vide) ?

d) Dédurre de la contradiction établie au **c)** que f est harmonique dans $D(0, R)$.

EXERCICE 4.6 (un critère de sous-harmonicité). Soit f une fonction à valeurs dans $[-\infty, \infty[$, définie dans un ouvert U du plan.

a) Rappeler ce que signifie le fait que f est sous-harmonique dans U .

b) Montrer que f est sous-harmonique dans U si et seulement si, pour tout ouvert U' relativement compact dans U , pour toute fonction $h : \overline{U'} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\overline{U'}$ et harmonique réelle dans U' , on a

$$\forall z \in U', f(z) - h(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U'} (f(\zeta) - h(\zeta)).$$

EXERCICE 4.7 (sous-harmonicité de $\log \|\cdot\|$). Cet exercice complète les exemples 4.2 et 4.3 de la section 4.1.

a) Utiliser le critère établi au **b)** de l'exercice 4.6 pour montrer que, si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} , la fonction $z \in U \mapsto \log |f(z)| \in [-\infty, \infty[$ est sous-harmonique dans U . Utiliser pour cela le fait suivant : si U' est un ouvert simplement connexe du plan, toute fonction harmonique réelle h dans U' s'exprime dans U' sous la forme $h = \operatorname{Re} H_{U'}$, où $H_{U'}$ est holomorphe dans U' (Proposition 4.6).

b) Avec l'argument utilisé au **a)**, montrer que, si f_1, \dots, f_M sont M fonctions holomorphes dans un ouvert U de \mathbb{C} , la fonction $z \in U \mapsto \log \sum_{j=1}^M |f_j|^2 \in [-\infty, \infty[$ est sous-harmonique dans U .

EXERCICE 4.8 (inégalité de Hardy¹⁸, sous-harmonicité de $|f|^p$ pour $p > 0$). Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0, 1)}$. Montrer, pour tout $p > 0$,

18. On doit au mathématicien britannique Godfrey Harold Hardy (1877-1947) de nombreux travaux en théorie des nombres en analyse de Fourier, en analyse diophantienne. Sa collaboration de plus de trente ans avec son compatriote John Littlewood (1885-1977) a été très riche du point de vue de l'analyse harmonique.

l'inégalité de Hardy :

$$\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} |f(\zeta)|^p d\xi d\eta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

EXERCICE 4.9 (principe de réflexion pour les fonctions harmoniques). Soit h une fonction harmonique dans $]a, b[+i]0, \delta[$, se prolongeant à $]a, b[+i]0, \delta[$ de manière continue, nulle sur le segment réel $]a, b[$. Montrer que la fonction définie dans l'ouvert $]a, b[+i] - \delta, \delta[$ par $\tilde{h}(z) = h(z)$ si $\text{Im } z \geq 0$ et $\tilde{h}(z) = -h(\bar{z})$ si $\text{Im } z \leq 0$ est harmonique dans $]a, b[\times i] - \delta, \delta[$ (utiliser la Proposition 4.6, puis le principe de réflexion de Schwarz pour les fonctions holomorphes, cf. la Proposition 2.3).

EXERCICE 4.10 (une version du théorème de Montel dans le cadre harmonique). Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions harmoniques réelles dans un ouvert U de \mathbb{C} . On suppose que, pour tout compact K de U , il existe une constante $M(K)$ telle que :

$$\sup_{k \geq 0} \left(\sup_{\zeta \in K} \left[|f_k(\zeta)| + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right| \right] \right) \leq M(K).$$

a) Montrer que si D est un disque tel que $\bar{D} \subset U$, on peut extraire de la suite $((f_k)|_D)_{k \geq 0}$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact vers une fonction harmonique réelle (utiliser la Proposition 4.6).

b) En utilisant le procédé diagonal (cf. la preuve du Théorème de Montel, Théorème 2.9), montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_k)_{k \geq 0}$ une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de U vers une fonction harmonique réelle.

EXERCICE 4.11 (formule de Poisson, fonctions sous-harmoniques). Soit f une fonction continue, positive dans $\overline{D(0, R)}$ et sous-harmonique dans $D(0, R)$. Soit $z_0 \in D(0, R)$ et $\rho \in]0, R - |z_0|[$.

a) Soit h la fonction harmonique dans $D(0, R)$, continue dans $\overline{D(0, R)}$, égale à f sur le bord de ce disque. Comparer

$$\int_{|\zeta|=\rho} f(z_0 + \zeta) \frac{d\sigma_\rho(\zeta)}{2\pi\rho}$$

et $h(z_0)$.

b) Utiliser ensuite la formule de Poisson pour déduire du a) :

$$\forall \rho \in [0, R], \quad \int_{|\zeta|=\rho} f(z_0 + \zeta) d\sigma_\rho(\zeta) \leq \left(1 + \frac{|z_0|}{R}\right) \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) d\sigma_R(\zeta).$$

EXERCICE 4.12 (sous-harmonicité, régularisation supérieure). Soit U un ouvert du plan et f une fonction localement intégrale dans U , à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$. On suppose que, pour tout $z_0 \in U$, pour tout $r \in]0, d(z_0, \partial U)[$,

$$f(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\zeta| \leq r} f(z_0 + \zeta) d\xi d\eta.$$

La fonction f est-elle sous-harmonique dans U ? Pour tout $z \in U$, on pose

$$f^*(z) = \limsup_{\zeta \rightarrow z} (f(\zeta)).$$

Même question que précédemment pour cette fois la fonction f^* .

EXERCICE 4.13 (formule de Poisson, holomorphie et harmonicité réelle).

a) Vérifier, pour $\zeta \in \{|\zeta| = 1\}$ et $z \in D(0, 1)$, la relation

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right).$$

En déduire que si h est une fonction harmonique réelle dans $D(0, 1)$, continue dans $\overline{D(0, 1)}$, l'unique fonction f (on dira au passage pourquoi elle est unique) holomorphe dans $D(0, 1)$, telle que $\operatorname{Im} f(0) = 0$ et que $\operatorname{Re} f = h$ dans $D(0, 1)$, est donnée par

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} h(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

b) Soit f une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$, nulle en 0, et telle que $|\operatorname{Re} f| \leq A$ dans $D(0, 1)$. Montrer que, si $0 < r < 1$, on a, pour tout $z \in D(0, r)$,

$$|\operatorname{Im} f(z)| \leq \frac{2A}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

EXERCICE 4.14 (inégalité de Harnack¹⁹). Soit f une fonction continue positive dans $\overline{D(z_0, R)}$, harmonique dans $D(z_0, R)$.

a) Établir, pour tout $z \in D(z_0, R)$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, l'inégalité :

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \leq \frac{R^2 - |z - z_0|^2}{|z_0 + Re^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|}.$$

b) En déduire l'*inégalité de Harnack* :

$$\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} f(z_0) \leq f(z) \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} f(z_0) \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

c) En utilisant l'inégalité de Harnack (on pourra se ramener au cas des fonctions harmoniques positives réelles), montrer que si f est une fonction harmonique de \mathbb{C} dans lui-même (*i.e.* de la forme $h_1 + ih_2$, où h_1 et h_2 sont harmoniques réelles dans \mathbb{C} tout entier), bornée en module, alors f est constante (comparer avec l'exercice 4.3).

EXERCICE 4.15 (inégalité de Carathéodory²⁰). Soit g une fonction holomorphe dans un voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$, avec $g = P + iQ$ (P et Q à valeurs réelles) dans ce disque.

a) Montrer que, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(Re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta} + z)}{Re^{i\theta} - z} d\theta + iQ(0) \\ &= g(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(Re^{i\theta}) \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta. \end{aligned}$$

19. Mathématicien allemand d'origine balte, Carl Gustav Axel Harnack (1851-1888) s'est intéressé à des questions d'analyse harmonique et de théorie du potentiel.

20. Mathématicien grec (mais formé en Allemagne), Constantin Carathéodory (1873-1950) est à l'origine de résultats majeurs en théorie de la mesure (construction « formelle » de la mesure de Lebesgue par exemple), en analyse complexe à une variable (représentations conformes, avec le prolongement continu au bord des représentations conformes), en calcul de variations, ainsi qu'en thermodynamique et en optique.

b) En déduire que, si l'on note $A_g(R) := \sup\{P(\zeta); |\zeta| = R\}$, on a

$$|z| \leq r < R \implies |g(z)| \leq |g(0)| + \frac{2r}{R-r}(A_g(R) - P(0))$$

(on appliquera la formule établie au a) à $A_g(R) - g$).

c) Montrer que, si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0, R)}$, ne s'annulant pas dans $D(0, R)$ et telle que $f(0) = 1$, alors, pour tout $r \in]0, R[$,

$$|z| \leq r \implies |f(z)| \geq (M_f(R))^{-\frac{2r}{R-r}}$$

où

$$M_f(R) := \sup_{[0, 2\pi]} |f(Re^{i\theta})|.$$

EXERCICE 4.16 (formule de Poisson). Pour tout $z \in D(0, 1)$, on définit une fonction $\phi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π périodique, comme suit : le point $e^{i\phi_z(\theta)}$ est l'intersection du cercle unité et de la demi-droite issue de z et dirigée par $z - e^{i\theta}$, avec la convention $0 \leq \phi_z(\theta) - \theta < 2\pi$.

a) Montrer que ϕ_z est différentiable (au sens réel) et que

$$\phi'_z(\theta) = \left| \frac{e^{i\phi_z(\theta)} - z}{e^{i\theta} - z} \right|.$$

b) Montrer que, si φ est une fonction continue sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$, alors, si $P_{\overline{D(0,1)}}[\varphi]$ désigne l'intégrale de Poisson de φ ,

$$P_{\overline{D(0,1)}}[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\phi_z(\theta)}) d\theta \quad \forall z \in D(0, 1).$$

EXERCICE 4.17 (le problème de Dirichlet dans un demi-plan). Soit φ une fonction continue sur \mathbb{R} et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)|}{1+t^2} dt < \infty.$$

a) Montrer, si Π désigne le demi-plan ouvert $\{\text{Im } \zeta > 0\}$, que la fonction

$$z \in \Pi \mapsto P_{\overline{\Pi}}[\varphi](z) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Im } z}{|z-t|^2} \varphi(t) dt$$

est bien définie dans Π et harmonique dans ce demi-plan ouvert (on décomposera en éléments simples la fraction rationnelle $1/((t-z)(t-\bar{z})) \in \mathbb{C}(t)$).

b) Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x_0 \\ z \in \Pi}} P_{\overline{\Pi}}[\varphi](z) = \varphi(x_0)$$

(on s'inspirera de la démonstration du Théorème 4.1 dans le cas du disque). En déduire que $P_{\overline{\Pi}}[\varphi]$ se prolonge en une fonction continue dans $\overline{\Pi}$ dont la restriction à l'axe réel coïncide avec φ .

EXERCICE 4.18 (un ouvert borné sans fonction de Green). On suppose que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'ouvert $U = D(0, 1) \setminus \{0\}$ du plan complexe et que l'on peut construire une fonction de Green $G_U : \overline{U} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, s'écrivant donc sous la forme

$$G_U(\zeta, z) = \frac{\log |z - \zeta|}{2\pi} + h_{U,z}(\zeta),$$

où, pour chaque $z \in U$, $h_{U,z}$ est de classe C^1 dans \bar{U} et harmonique dans U , avec $G_U(0, z) = 0$ et $G_U(\cdot, z) \equiv 0$ sur $\{|\zeta| = 1\}$. Pourquoi la fonction harmonique $\zeta \mapsto h_{U,z}(\zeta)$ a-t-elle une singularité éliminable en $\zeta = 0$? Montrer ensuite que la fonction $\zeta \in U \mapsto G_U(\zeta, z)$ est sous-harmonique dans $D(0, 1)$ et conclure à une contradiction avec le principe du maximum global pour les fonctions sous-harmoniques (Proposition 4.5). En déduire que U ne saurait posséder de fonction de Green. Le problème de Dirichlet est-il soluble dans U (remplacer l'hypothèse C^1 faite sur $h_{U,z}$ par une simple hypothèse de continuité)?

4.3. Formules de Jensen et Poisson-Jensen

Comme le lemme de Schwarz (Lemme 2.7, cf. aussi la remarque 2.10), une formule importante relie la croissance du module d'une fonction holomorphe (non identiquement nulle) dans un disque ouvert $D(0, R)$ (lorsque l'on s'approche du bord) à la suite des zéros de la fonction dans ce disque. Cette formule (due à Jensen²¹) est plus en relation avec le cadre des fonctions harmoniques réelles (ou sous-harmoniques) qu'avec celui des fonctions holomorphes. C'est la raison pour laquelle nous l'avons inséré dans ce chapitre. Elle se trouve d'ailleurs complétée par une formule impliquant, elle, la formule de représentation intégrale de Poisson, à savoir la *formule de Poisson-Jensen*.

4.3.1. La formule de Jensen et son interprétation.

THEORÈME 4.2 (formule de Jensen). *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, $R \in]0, \infty]$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ la liste des zéros de f dans cette couronne ouverte, rangés dans l'ordre des modules croissants (et répétés chaque fois avec leurs multiplicités), avec $R_1 = |\alpha_1|$. On suppose aussi que f présente une singularité au pôle non essentielle (elle peut être éliminable) à l'origine, i.e. $f(z) = \sum_{k \geq -\nu(0)} a_k(0)z^k$ dans un voisinage épointé de 0, avec $a_{-\nu(0)}(0) \neq 0$ et $\nu(0) \in \mathbb{Z}$ (développement en série de Laurent, cf. le Corollaire 3.1). Alors, pour tout $\epsilon \in]0, R_1[$,*

(4.35)

$$\begin{aligned} \forall r \in]0, R[, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta &= -\nu(0) \log r + \log |a_{-\nu(0)}(0)| + \int_\epsilon^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt \\ &= \log \left(|a_{-\nu(0)}(0)| r^{-\nu(0)} \prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|} \right), \end{aligned}$$

où $\nu_f(t)$ désigne, pour $t \in]0, R[$, le nombre de zéros de f , comptés avec leurs multiplicités, dans la couronne $\{0 < |z| \leq t\}$.

La preuve de la formule de Jensen repose sur le lemme suivant :

LEMME 4.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. La fonction*

$$I_\alpha := r \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - \alpha| d\theta$$

est une fonction continue sur $]0, +\infty[$, égale à $\log |\alpha|$ sur $]0, |\alpha|]$ et à $\log r$ si $r > |\alpha|$.

21. Mathématicien danois, Johan Ludwig Jensen (1859-1925), resta un mathématicien « amateur » durant toute sa carrière d'ingénieur à la division de Copenhague de la Bell Telephone Company, et s'intéressa aussi beaucoup à la fonction zéta de Riemann. On lui doit aussi une importante inégalité de convexité en théorie de l'intégration (voir [Yint], chapitre 2).

PREUVE DU LEMME 4.1. La fonction $z \mapsto \log |z - \alpha|$ est harmonique dans l'ouvert épointé $\mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ (cf. l'exemple 4.2). D'après la formule de la moyenne (4.3) (dans $D(0, r)$), on a $I_\alpha(r) = (\log |z - \alpha|)_{z=0} = \log |\alpha|$ lorsque $r \in]0, |\alpha|]$. Si $r > |\alpha|$, la fonction $z \mapsto \log |r - \alpha z|$ est harmonique dans $D(0, 1)$, et l'on a donc dans ce cas

$$\log r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |r - \alpha e^{i\theta}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |r - \alpha e^{-i\theta}| d\theta = I_\alpha(r).$$

Reste à prouver que l'intégrale définissant I_α est bien convergente si $r = |\alpha|$ et que la fonction I_α est continue en cette valeur, ce qui opérera le « raccord » voulu. Si $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_0}$ et $r = |\alpha|$, la fonction

$$\theta \mapsto |\log |re^{i\theta} - \alpha|| = |\log |r(e^{i\theta} - e^{i\theta_0})|| = |\log |\alpha| + \log |e^{i(\theta-\theta_0)} - 1||$$

est équivalente à $\theta \mapsto |\log |\theta - \theta_0||$ au voisinage de $\theta = \theta_0$. Cette fonction est intégrable au voisinage de $\theta = \theta_0$ (qui est le seul point de $[0, 2\pi]$ posant problème au niveau de l'intégrabilité). L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |\log |re^{i\theta} - \alpha|| d\theta$$

est donc bien convergente et la fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est bien définie pour $r = |\alpha|$, donc en fait pour tout $r \in]0, +\infty[$. Pour $|r - |\alpha|| < |\alpha|/2$ et $|\theta - \theta_0| \leq \eta \ll 1$, on a (par le théorème des obliques inégales)

$$|re^{i\theta} - \alpha| \geq r|\sin(\theta - \theta_0)| \geq \frac{r}{2}|\theta - \theta_0| \geq \frac{|\alpha|}{4}|\theta - \theta_0|.$$

Or $\theta \mapsto |\log |\theta - \theta_0||$ est intégrable sur $[\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta]$. Comme on peut majorer $(r, \theta) \mapsto |\log |re^{i\theta} - \alpha||$ par une constante sur

$$\left\{ (r, \theta) ; |r - |\alpha|| < |\alpha|/2, |\theta - \theta_0| > \eta \text{ modulo } 2\pi \right\},$$

on en déduit l'existence d'une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$, majorant sur $[0, 2\pi]$ les fonctions $\theta \mapsto |\log |re^{i\theta} - \alpha||$ pour tout r tel que $|r - |\alpha|| < |\alpha|/2$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \log |r_k e^{i\theta} - \alpha| d\theta = \int_0^{2\pi} \log |\alpha e^{i\theta} - \alpha| d\theta$$

si $(r_k)_{k \geq 0}$ est une suite tendant vers $|\alpha|$. La fonction $r \mapsto I_\alpha(r)$ est donc bien continue en $|\alpha|$. \square

PREUVE DE LA FORMULE (4.35) DE JENSEN. Pour prouver la seconde égalité dans (4.35), on utilise le procédé sommatoire d'Abel : les modules distincts des zéros forment une suite croissante $0 = R_0 < R_1 < R_2 < \dots$. Pour tout $k \geq 1$ et

pour tout $r \in [R_k, R_{k+1}[$, on a ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt &= \int_{\epsilon}^{R_1} \frac{\nu_f(t)}{t} dt + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{R_j}^{R_{j+1}} \frac{\nu_f(t)}{t} dt + \int_{R_k}^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \nu_f(R_j) (\log R_{j+1} - \log R_j) + \nu_f(R_k) (\log r - \log R_k) \\ &= \nu_f(r) \log r - \sum_{j=1}^k (\nu_f(R_j) - \nu_f(R_{j-1})) \log R_j \\ &= \nu_f(r) \log r - \sum_{j=1}^{\nu_f(r)} \log |\alpha_j| = \log \left(\prod_{j=1}^{\nu_f(r)} \frac{r}{|\alpha_j|} \right). \end{aligned}$$

On en déduit la seconde égalité dans (4.35).

Reste à prouver la première égalité. Dans le disque épointé $D(0, |\alpha_1|) \setminus \{0\}$, la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = z^{-\nu(0)} g(z)$, où g se prolonge en une fonction holomorphe ne s'annulant pas dans $D(0, R_1)$, valant $a_{-\nu(0)}(0)$ en $z = 0$. La fonction $\log |g|$ est donc harmonique dans $D(0, R_1)$ et vérifie par conséquent en 0 la formule de la moyenne. Pour tout $r \in]R_0, R_1[$, on a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = -\nu(0) \log r + \log |a_{-\nu(0)}(0)|,$$

et la première égalité dans (4.35) est bien prouvée dans ce cas ($r \in]R_0, R_1[$). En utilisant le Lemme 4.1, on constate aussi que cette première égalité dans (4.35) est valable au voisinage de $]R_0, R_1[$ (on met en facteur dans f tous les $z - \alpha_j$, où α_j est un zéro de f de module R_1). On va maintenant supposer (hypothèse de récurrence) que cette première égalité est valable au voisinage de $]R_0, R_k[$, pour $k \geq 1$. En répétant l'argument que nous venons d'utiliser (lorsque $k = 1$) et qui était basé sur le Lemme 4.1, on montre que la première égalité dans (4.35) est valable au voisinage de $]0, R_{k+1}[$. La formule de Jensen (4.35) est ainsi prouvée par récurrence sur k . \square

COROLLAIRE 4.3 (le cas algébrique). *Soit $P(X) = a_0 X^d + \dots + a_d$ un polynôme à coefficients complexes de degré exactement $d > 0$, tel que $P(0) = a_d \neq 0$. On a*

$$(4.36) \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \right] = |a_0| \prod_{j=1}^d \max(|\xi_j|, 1),$$

DÉMONSTRATION. Soit $\xi_1, \dots, \xi_{d'}$ les racines de P (comptées avec leurs multiplicités) incluses dans $\overline{D}(0, 1)$. On utilise la formule (4.35) sous forme exponentiée.

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta \right] &= |P(0)| \prod_{j=1}^{d'} \frac{1}{|\xi_j|} = |a_d| \prod_{j=1}^{d'} \frac{1}{|\xi_j|} \\ &= |a_0| \prod_{j>d'} |\xi_j| = |a_0| \prod_{j=1}^d \max(|\xi_j|, 1) \end{aligned}$$

car $\prod_{j=1}^d |\xi_j| = |a_d|/|a_0|$. \square

REMARQUE 4.8 (la mesure de Mahler). Dans le cas particulier où $P \in \mathbb{Z}[X]$ (avec toujours $\deg P = d > 0$ et $P(0) = a_d \neq 0$), il résulte de la formule (4.36) que le nombre

$$h(P) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{i\theta})| d\theta$$

(dit *mesure de Mahler* de $P \in \mathbb{Z}[X]$) est positif ou nul. De plus, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ se factorise en $P = P_1 \times P_2$ avec P_1 et P_2 dans $\mathbb{Z}[X]$, on observe qu'alors on a $h(P) = h(P_1) + h(P_2) \geq \max(h(P_1), h(P_2))$. La mesure de Mahler mesure la contribution aux places infinies à la « taille logarithmique » d'un polynôme. La formule

$$h(P) - \log |a_0| - \sum_{j=1}^d \log \max(|\xi_j|, 1) = 0$$

(déduite de (4.36)) s'interprète dans ce cadre comme un avatar de la *formule du produit* : le produit de toutes les valeurs absolues (archimédiennes ou non) d'un nombre rationnel non nul est égal à 1. Ceci explique que la mesure de Mahler (et avec elle la formule de Jensen) joue un rôle important en géométrie arithmétique.

4.3.2. La formule de Poisson-Jensen. La formule de Poisson-Jensen fournit une intéressante formule de représentation pour le logarithme du module d'une fonction holomorphe. Elle s'inscrit dans l'esprit de la formule de Jensen (4.35), mais c'est la formule de représentation intégrale de Poisson (Corollaire 4.2, formule (4.17)) qui se substitue cette fois à la simple formule de la moyenne (4.3).

THEOREME 4.3 (formule de Poisson-Jensen). *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$, $R \in]0, \infty]$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ la liste des zéros de f dans cette couronne ouverte, rangés dans l'ordre des modules croissants (et répétés chaque fois avec leurs multiplicités). On suppose aussi que f présente une singularité au pôle non essentielle (elle peut être éliminable) à l'origine, i.e. $f(z) = \sum_{k \geq -\nu(0)} a_k(0)z^k$ dans un voisinage épointé de 0, avec $a_{-\nu(0)}(0) \neq 0$ et $\nu(0) \in \mathbb{Z}$ (développement en série de Laurent, cf. le Corollaire 3.1). Alors*

$$(4.37) \quad \begin{aligned} &\forall r \in]0, R[, \quad \forall z \in D(0, r) \setminus \{0\}, \\ &(f(z) \neq 0) \implies \log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &\quad - \nu(0) \log \frac{|z|}{r} + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log \frac{|r(z - \alpha_j)|}{|r^2 - \bar{\alpha}_j z|}, \end{aligned}$$

où $\nu_f(t^-)$ désigne, pour $t \in]0, R[$, le nombre de zéros de f , comptés avec leurs multiplicités, dans la couronne $\{0 < |z| < t\}$.

DÉMONSTRATION. Le principe des zéros isolés (qui implique la non existence de points d'accumulation pour l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe et non identiquement nulle f au voisinage de $\bar{D}(0, r)$ lorsque $0 < r < R$) implique que $\nu_f(r^-)$ est fini pour tout $r \in]0, R[$. La fonction rationnelle

$$\tilde{f}_r : z \in D(0, r) \setminus \{0\} \mapsto \prod_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \frac{r(z - \alpha_j)}{r^2 - \bar{\alpha}_j z}$$

s'annule dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$ exactement aux mêmes points que f , avec les mêmes multiplicités. La fonction

$$f_r : z \in D(0, r) \mapsto z^{-\nu(0)} \tilde{f}_r(z)$$

est donc une fonction méromorphe dans $D(0, r)$, avec un seul pôle (*resp.* zéro) éventuel ($z = 0$) de même ordre (*resp.* multiplicité) que f , et, dans $D(0, r) \setminus \{0\}$, mêmes zéros que f (les multiplicités étant prises en compte) dans la couronne $\{0 < |z| < r\}$. Il en résulte que, dans $D(0, r) \setminus \{0\}$, $f(z) = f_r(z) \times g_r(z)$, où g_r est une fonction se prolongeant en une fonction holomorphe dans $D(0, r)$ et ne s'annulant pas dans ce disque ouvert.

Prouvons maintenant la formule (4.37). On suppose dans un premier temps que f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r . Sur le bord de ce cercle, on voit que

$$(4.38) \quad \left| \frac{r(z - \alpha_j)}{r^2 - \bar{\alpha}_j z} \right| = 1, \quad \forall j = 1, \dots, \nu_f(r^-)$$

car

$$|r(re^{i\theta} - \alpha_j)| = |r^2 - r\alpha_j e^{-i\theta}| = |r^2 - \bar{\alpha}_j r e^{i\theta}| \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

On a donc, en utilisant la factorisation de $f = f_r \times g_r$ établie précédemment (encore valable pour z sur le cercle de rayon r puisque f ne s'annule pas sur ce cercle) et les relations (4.38) (passées au logarithme et intégrées sur $[0, 2\pi]$),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log |g_r(re^{i\theta})| d\theta - \nu(0) \log r = \log |g_r(z)| - \nu(0) \log r \end{aligned}$$

d'après la formule de représentation intégrale de Poisson (Corollaire 4.2, formule (4.17)) appliquée à la fonction $\log |g_r|$ (harmonique dans le disque $D(0, r)$, cf. l'exemple 4.2). Comme

$$\log |f(z)| = \log |g_r(z)| - \nu(0) \log |z| + \sum_{j=1}^{\nu_f(r^-)} \log \left| \frac{r(z - \alpha_j)}{r^2 - \bar{\alpha}_j z} \right|$$

pour tout $z \in D(0, r) \setminus \{0\}$ tel que $f(z) \neq 0$, on en déduit la formule (4.37) lorsque f ne s'annule pas sur le cercle de rayon r . Lorsque r est quelconque, on obtient la formule (4.37) en remarquant que, pour tout $z \in D(0, R)$, la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

est continue sur $] |z|, R[$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. \square

4.3.3. Exercices.

EXERCICE 4.19 (la fonction de Ronkin²² d'un polynôme de Laurent). Soit h une fonction harmonique réelle dans une couronne ouverte $\{R < |z| < R'\}$. On pose, pour tout $r \in]R, R'[$,

$$\mathcal{N}_h(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) d\theta.$$

22. Mathématicien ukrainien, Lev Isaakovich Ronkin (1931-1998) s'est intéressé aux problèmes liés à la croissance des fonctions entières en n variables, ainsi qu'au concept de presque-périodicité.

Montrer que, pour tout $r \in]R, R'[$, $\mathcal{N}_h(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes réelles. Montrer que si P est un polynôme de Laurent, *i.e.* $P(z) = \sum_{-N}^N a_k X^k$, il existe une subdivision $R_0 = 0 < R_1 < \dots < R_{m-1} < R_m = +\infty$ de $]0, \infty[$ telle que la fonction

$$\mathcal{N}_{\log|P|} : r \in]0, \infty[\mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(re^{i\theta})| d\theta$$

soit une fonction affine de $\log r$ sur chaque intervalle ouvert $]R_k, R_{k+1}[$. Vérifier aussi que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto N_P(t) = \mathcal{N}_{\log|P|}(e^t)$$

est une fonction convexe, croissante, et continue sur \mathbb{R} (en fait affine par morceaux).

EXERCICE 4.20 (la formule de Lelong²³-Poincaré).

a) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Calculer le gradient de la fonction $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \mapsto \log |z - z_0|$.

b) En utilisant la formule de Green (1.58) (dans un ouvert convenable, s'inspirer par exemple de la preuve de la formule de Cauchy-Pompeiu) avec une fonction φ de classe C^2 et à support compact et la fonction $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \mapsto \log |z - z_0|$, vérifier que

$$\iint_{\mathbb{C}} \log |\zeta - \zeta_0| \Delta[\varphi](\zeta) d\xi d\eta = 2\pi \varphi(z_0).$$

c) En utilisant le lemme de partitionnement de l'unité²⁴ et le résultat établi à la question b), montrer que, si f est une fonction méromorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} et φ une fonction de classe C^2 de U dans \mathbb{C} , à support compact inclus dans U , on a la *formule de Lelong-Poincaré* :

$$\begin{aligned} & \iint_U \log |f(\zeta)| \Delta[\varphi](\zeta) d\xi d\eta \\ &= 2\pi \left(\sum_{\alpha \in f^{-1}(0) \cap \text{Supp } \varphi} \nu_f(\alpha) \varphi(\alpha) - \sum_{\beta \in f^{-1}(\infty) \cap \text{Supp } \varphi} o_f(\beta) \varphi(\beta) \right), \end{aligned}$$

où $\nu_f(\alpha)$ désigne, quand $f(\alpha) = 0$, la multiplicité de α comme zéro de f , et $o_f(\beta)$ désigne, quand $f(\beta) = \infty$, l'ordre de β comme pôle de f .

23. Au nom d'Henri Poincaré (à qui l'on doit cette formule dans le cadre d'une variable où nous nous plaçons ici), est attaché celui de Pierre Lelong, mathématicien français (1912-2011) qui contribua à l'essor de l'analyse pluricomplexe, en relation précisément avec la notion de pluri-sous-harmonicité.

24. Ce lemme a été mentionné (et énoncé brièvement) à l'occasion de l'exercice 3.57, voir pour plus de détails [Ydistrib], section 1.3, Lemme 1.5.

Texte et corrigé du DS - 2011-2012

Exercice 1.

Soit U un ouvert du plan complexe.

a) Soit φ une fonction continue de U dans \mathbb{C} et $z_0 \in U$. Que vaut la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \varphi(x + iy) \, dx \, dy \right) ?$$

On remarque que

$$\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \varphi(x + iy) \, dx \, dy - \varphi(z_0) = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} (\varphi(x + iy) - \varphi(z_0)) \, dx \, dy$$

(puisque la surface du disque fermé $\overline{D(z_0, \epsilon)}$ vaut $\pi \epsilon^2$). On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \varphi(x + iy) \, dx \, dy - \varphi(z_0) \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} |\varphi(x + iy) - \varphi(z_0)| \, dx \, dy \leq \frac{\sup_{D(z_0, \epsilon)} |\varphi - \varphi(z_0)|}{\pi \epsilon^2}. \end{aligned}$$

Comme la fonction φ est continue en z_0 , on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{D(z_0, \epsilon)} |\varphi - \varphi(z_0)| = 0.$$

On a donc par conséquent :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \varphi(x + iy) \, dx \, dy \right) = \varphi(z_0).$$

b) Soit ψ une fonction de classe C^2 de U dans \mathbb{C} . En utilisant seulement la formule de Green-Riemann, prouver que, si \overline{D} est un disque fermé inclus dans U , on a l'égalité :

$$\iint_{\overline{D}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right] (x + iy) \, dx \, dy = 0.$$

La 1-forme $d\psi$ est une 1-forme de classe C^1 dans U , exacte dans U . Si z_0 désigne le centre de \overline{D} et ϵ son rayon, on a donc

$$\int_{t \in [0, 1] \mapsto z_0 + \epsilon e^{2i\pi t}} d\psi = 0$$

(l'intégrale d'une 1-forme exacte sur un lacet C^1 est nulle, second volet de la Proposition 1.3 du cours). Grâce à la formule de Green-Riemann (appliquée au compact

à bord orienté \overline{D} , Théorème 1.3 du cours), on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t \in [0,1] \mapsto z_0 + \epsilon e^{2i\pi t}} d\psi = \int_{(\partial \overline{D})_+} d\psi = \\ &= \iint_{\overline{D}} d[d\psi] = \iint_{\overline{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] (x + iy) dx dy. \end{aligned}$$

c) Que peut on conclure de a) et b) concernant la fonction

$$x + iy \in U \mapsto \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right] (x + iy) ?$$

Si ψ est de classe C^2 dans U , la fonction

$$\varphi : x + iy \in U \mapsto \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right] (x + iy)$$

est continue. Si z_0 est un point arbitraire de U , on a, d'après le b), pour $\epsilon > 0$ assez petit :

$$\frac{1}{\pi \epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \varphi(x + iy) dx dy = 0.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 et en appliquant le résultat du a), il vient $\varphi(z_0) = 0$. Ceci étant vrai pour tout z_0 dans U , on en déduit que φ est identiquement nulle dans U (lemme de Schwarz sur les dérivées partielles croisées¹).

Exercice 2.

Soit $R > 0$. On considère dans \mathbb{C}^* les deux 1-formes différentielles

$$z = x + iy \mapsto \omega_0(z) := \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$z = x + iy \mapsto \omega_1(z) := xdy - ydx.$$

a) Ces 1-formes différentielles sont-elles fermées dans \mathbb{C}^* ? Sont-elles exactes dans \mathbb{C}^* ?

On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$d\omega_1(z) = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy \neq 0.$$

On en déduit, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, puisque $d[f\omega](z) = (fd\omega + df \wedge \omega)(z)$,

$$\begin{aligned} d\omega_0(z) &= \frac{2dx \wedge dy}{x^2 + y^2} - \frac{2(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^2} \wedge (xdy - ydx) \\ &= \frac{2dx \wedge dy}{x^2 + y^2} - \frac{2(x^2 + y^2) dx \wedge dy}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

La forme ω_0 est donc fermée dans \mathbb{C}^* , tandis que ω_1 ne l'est pas. La forme ω_1 n'est pas exacte (car toute forme exacte et de classe C^1 dans un ouvert est fermée). La forme ω_0 n'est pas non plus exacte car

$$\int_{t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}} \omega_0(\zeta) = \int_{t \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi t}} \omega_1(\zeta) = 2 \iint_{D(0,1)} dx \wedge dy = 2\pi \neq 0$$

1. En fait, le fait que ψ soit différentiable à l'ordre 2 en tout point suffirait, mais le lemme de Schwarz ne saurait sous cette simple hypothèse être prouvé suivant cette approche, c'est-à-dire via le recours à la formule de Green-Riemann.

d'après le théorème de Green-Riemann².

b) Vérifier

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \omega_0(z) = -i \left(\frac{dz}{z} - \frac{1}{2} d(\log |z|^2) \right),$$

puis la formule

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = -i \int_{\gamma_R} \bar{\zeta} d\zeta,$$

où γ_R désigne le lacet : $t \in [0, 1] \mapsto R e^{2i\pi t}$.

On remarque que l'on a, dans \mathbb{C}^* , l'égalité entre 1-formes :

$$d(\log |z|^2) = d(\log(z\bar{z})) = \frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}.$$

On a donc, dans \mathbb{C}^* , l'égalité entre 1-formes :

$$-i \left(\frac{dz}{z} - \frac{1}{2} d(\log |z|^2) \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} \right) = \text{Im} \left(\frac{dz}{z} \right) = \frac{\text{Im}(\bar{z} dz)}{|z|^2} = \omega_0(z).$$

On a, dans \mathbb{C} , l'égalité entre 1-formes :

$$\bar{z} dz = (x - iy)(dx + idy) = d(x^2 + y^2) + i\omega_1(z).$$

On a donc bien

$$\int_{\gamma_R} \bar{\zeta} d\zeta = i \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta)$$

puisque l'intégrale sur un lacet d'une 1-forme exacte est nulle. En multipliant par $-i$, on obtient la formule demandée.

c) Calculer de deux manières différentes les intégrales curvilignes

$$\int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta).$$

On remarque que

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = R^2 \int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta).$$

On a, d'après la première formule établie au **b)**,

$$\int_{\gamma_R} \omega_0(\zeta) = -i \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \times (2i\pi \text{Ind}(\gamma_R), 0) = 2\pi.$$

Cela fournit un premier moyen de calculer les valeurs (respectivement 2π et $2\pi R^2$) des deux intégrales demandées. En utilisant la seconde formule établie au **b)**, ce qui donne

$$\int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) d\zeta = -i \int_0^1 R e^{-2i\pi t} \times (2i\pi R e^{2i\pi t}) dt = 2\pi R^2,$$

on dispose d'un second moyen de calculer les deux intégrales demandées.

d) Soit f une fonction à valeurs complexes continue dans $\overline{D(0, R)}$ et holomorphe dans le disque ouvert $D(0, R)$.

– Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} (\bar{\zeta} - f(\zeta)) d\zeta.$$

2. Attention, \mathbb{C}^* n'est pas un ouvert étoilé! Il ne faut pas se laisser ici abuser par la notation.

– Dédurre du calcul précédent l'inégalité

$$\sup_{|\zeta|=R} |\bar{\zeta} - f(\zeta)| \geq R.$$

– Montrer, si l'on suppose de plus $R \geq 1$, que l'on a l'inégalité

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - f(e^{i\theta})| \geq 1.$$

Comme f est holomorphe dans $D(0, R)$, on a, pour tout $\epsilon \in]0, R[$,

$$\int_{\gamma_{R-\epsilon}} f(\zeta) d\zeta = 0$$

puisque³ l'ouvert $D(0, R)$ est simplement connexe (en particulier, le lacet $\gamma_{R-\epsilon}$ est homotope au lacet constant $t \in [0, 1] \mapsto 0$) et que la forme $f(\zeta) d\zeta$ est localement exacte dans $D(0, R)$ (on applique alors la Proposition 1.12, volet 2). En faisant tendre ϵ vers 0 et en utilisant la continuité de f jusqu'au bord, on en déduit

$$\int_{\gamma_R} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

On a donc

$$\int_{\gamma_R} (\bar{\zeta} - f(\zeta)) d\zeta = \int_{\gamma_R} \bar{\zeta} d\zeta = i \int_{\gamma_R} \omega_1(\zeta) = 2i\pi R^2.$$

On en déduit

$$2\pi R^2 = \left| \int_{\gamma_R} (\bar{\zeta} - f(\zeta)) d\zeta \right| \leq 2\pi R \times \sup_{|\zeta|=R} |\bar{\zeta} - f(\zeta)|,$$

d'où l'inégalité demandée au second *item* en divisant par R . Si f s'annule en $z = 0$, la fonction

$$z \in D(0, R) \setminus \{0\} \mapsto f(z)/z$$

se prolonge en une fonction \tilde{f} holomorphe dans $D(0, 1)$ et continue dans $\overline{D(0, 1)}$. Il résulte du second *item* (ici $R = 1$, et f est remplacée par \tilde{f}) que

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |e^{-i\theta} - \tilde{f}(e^{i\theta})| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |e^{-i\theta} - e^{-i\theta} f(e^{i\theta})| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |1 - f(e^{i\theta})| \geq 1.$$

Exercice 3.

a) Soit γ le lacet $t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \binom{2n}{n}.$$

Grâce à la formule du binôme,

$$(1+z)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k.$$

Comme la forme $z^{k-n-1} dz$ est exacte dans \mathbb{C}^* pour $k \neq n$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \binom{2n}{n} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \binom{2n}{n}$$

3. On pourrait aussi justifier ce fait en invoquant la formule de Green-Riemann.

(tous les autres termes du développement binomial de $(1 + \zeta)^{2n}$ contribuent à une intégrale curviligne nulle, car intégrale curviligne d'une 1-forme exacte au voisinage du support du chemin).

b) Dédurre du a) la valeur du nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{2n}{n}.$$

On remarque (en utilisant le résultat établi au a)) que, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\sum_{n=0}^N \left(\frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta}\right)^n \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Comme la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(1+z)^2}{6z}\right)^n$$

converge normalement sur le cercle $|\zeta| = 1$ car

$$\sup_{|\zeta|=1} \left| \frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta} \right| = \frac{2}{3} < 1,$$

on peut affirmer que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{2n}{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{(1+\zeta)^2}{6\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{6 d\zeta}{4\zeta - \zeta^2 - 1}. \end{aligned}$$

Or

$$4X - X^2 - 1 = (X - \alpha)(\beta - X), \quad \text{avec } \alpha = 2 - \sqrt{3}, \quad \beta = 2 + \sqrt{3}.$$

En utilisant la formule de Cauchy avec la fonction

$$f : z \mapsto \frac{6}{\beta - z}$$

(holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$), on trouve

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{6 d\zeta}{4\zeta - \zeta^2 - 1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} = f(\alpha) = \frac{6}{\beta - \alpha} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

c) On remplace γ par le lacet continu Γ figuré sur la figure ci-dessous et parcouru une seule fois dans le sens indiqué. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

On a cette fois $\text{Ind}(\Gamma, 0) = 2$ (au vu de la figure A.1). Donc, en reprenant les calculs du a), on obtient cette fois

$$\int_{\Gamma} \frac{(1+\zeta)^{2n}}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \binom{2n}{n} \times \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \binom{2n}{n} \times \text{Ind}(\Gamma, 0) = 2 \times \binom{2n}{n}.$$

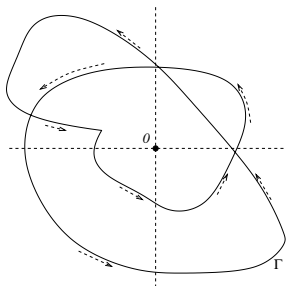


FIGURE A.1. Figure, énoncé de l'exercice 3.c)

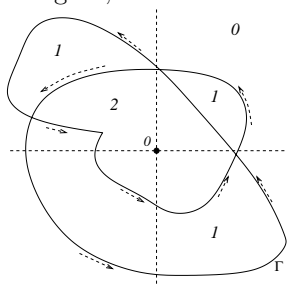


FIGURE A.2. Figure complétée (corrigé de l'exercice 3.d)

d) Décrire explicitement, en calculant les valeurs qu'elle prend et en précisant où elle prend ces valeurs, la fonction

$$z \in \mathbb{C} \setminus \text{Supp } \Gamma \longmapsto \text{Ind}(\Gamma, z).$$

Les valeurs prises par la fonction $z \mapsto \text{Ind}(\Gamma, z)$ hors du support de Γ , sont 0, 1, 2. Sur la figure A.2, on a figuré les composantes connexes du complémentaire du support de Γ et les valeurs prises sur chacune de ces composantes par cette fonction.

Exercice 4.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $0 < |z_1| < |z_2|$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière.

a) Soit R un nombre strictement positif, distinct de $|z_1|$ et $|z_2|$. On note γ_R le lacet : $t \in [0, 1] \mapsto Re^{2i\pi t}$. Calculer, en fonction des valeurs de f aux points z_1 et z_2 , l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta$$

(on discutera la valeur de cette intégrale suivant les valeurs de R).

Cette intégrale se calcul grâce à la formule de Cauchy (version analytique, Théorème 2.5 du cours). On remarque (décomposition en éléments simples) que, pour tout nombre complexe $\zeta \neq z_1, z_2$, on a

$$\frac{1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_2} \right),$$

ce qui implique que l'on puisse écrire, pour tout $R > 0$ tel que $R \neq |z_1|, |z_2|$,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta \right). \quad (\dagger)$$

On doit distinguer trois cas pour calculer cette intégrale.

- Si $R < |z_1| < |z_2|$, les deux fonctions $z \mapsto f(z)/(z - z_j)$, $j = 1, 2$, sont holomorphes au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0, R)$. Les deux intégrales

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta, \quad j = 1, 2,$$

sont donc nulles, car intégrales sur un lacet d'un ouvert localement connexe d'une forme localement exacte⁴. On a dans ce cas

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta = 0.$$

- Si $|z_1| < R < |z_2|$, on a toujours, pour les mêmes raisons que dans l'item précédent,

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta = 0.$$

La formule de Cauchy (version analytique) dans $K = \overline{D}(0, R)$, donne

$$2i\pi f(z_1) = \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta.$$

On a donc, dans ce cas

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta = 2i\pi \frac{f(z_1)}{z_1 - z_2}.$$

- Si $|z_1| < |z_2| < R$, on doit appliquer la formule de Cauchy (toujours dans $K = \overline{D}(0, R)$) à chacune des deux intégrales figurant au second membre de (†) et l'on obtient alors :

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta = 2i\pi \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}. \quad (\ddagger)$$

b) On suppose qu'il existe $\epsilon \in]0, 1[$ et $C > 0$ tels que la fonction f vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq C(1 + |z|)^{1-\epsilon}. \quad (*)$$

Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right) = 0.$$

Que peut-on dire alors des valeurs de f en z_1 et z_2 ?

On a, pour $|z_1| < |z_2| < R$, compte tenu du fait que le module d'une intégrale est majoré par l'intégrale du module, et de l'inégalité triangulaire « gauche » $|a - b| \geq ||a| - |b||$, la majoration :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)} \times 2\pi R \times \sup_{|\zeta|=R} |f| \\ &\leq 2\pi C \times \frac{R(1 + R)^{1-\epsilon}}{(R - |z_2|)^2}. \end{aligned}$$

4. On peut aussi invoquer dans $K = \overline{D}(0, R)$ la formule de Green-Riemann.

Comme

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R(1+R)^{1-\epsilon}}{(R-|z_2|)^2} = 0$$

car $2 - \epsilon < 2$, on en déduit bien

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right) = 0.$$

c) *Déduire du résultat établi au b) que, si f est une fonction entière vérifiant la condition (*) pour un certain $\epsilon \in]0, 1[$ et une certaine constante $C > 0$, alors f est nécessairement constante.*

Si f vérifie la condition (*) et si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes distincts (arbitraires), on conclut, en combinant les résultats obtenus au **b)** et dans le troisième item de la discussion **a)** (notons que la formule (††) est valable si $R > \max(|z_1|, |z_2|)$, même si z_1 et z_2 ont même module), que $f(z_1) = f(z_2)$. Comme z_1 et z_2 sont supposés distincts, mais arbitraires, on en déduit que f est constante dans \mathbb{C} .

Exercice 5.

En justifiant toutes les étapes du raisonnement avec précision, démontrer, pour tout z dans $D(0, 1) \setminus \{0\}$, les formules :

$$\begin{aligned} \frac{z}{\bar{z}} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \right) \\ &= z^2 + \frac{1}{\pi z} \left(\iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \right) \\ &= z^2 + \frac{1}{\pi z} \iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

(où $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$).

Soit $z \in D(0, 1) \setminus \{0\}$. Considérons $0 < \epsilon < |z|$, le compact à bord orienté $K_\epsilon := \overline{D(0, 1)} \setminus D(0, \epsilon)$, et la fonction

$$\varphi : z \mapsto \frac{z}{\bar{z}},$$

de classe C^1 au voisinage de K_ϵ . Notons $\gamma_\epsilon : t \in [0, 1] \mapsto \epsilon e^{2i\pi t}$. La formule de Cauchy-Pompeiu (Proposition 1.6 du cours) nous assure que

$$\begin{aligned} \frac{z}{\bar{z}} &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) - \frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right] (\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma} \zeta^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) + \frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}^2} \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{\gamma} \zeta^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) + \frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \end{aligned}$$

(on note que $\bar{\zeta} = 1/\zeta$ si $|\zeta| = 1$, ce que l'on a utilisé en passant de la ligne 1 à la ligne 2 pour transformer la première intégrale curviligne au second membre). On remarque ensuite que

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| \leq 2\pi\epsilon \times \frac{1}{|z| - \epsilon} \times \sup_{|\zeta| = \epsilon} |\zeta/\bar{\zeta}| = \frac{2\pi\epsilon}{|z| - \epsilon}.$$

Cette majoration implique

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) = 0,$$

et l'on déduit des égalités ci dessus (résultant de la formule de Cauchy-Pompeiu dans K_ϵ), en faisant tendre ϵ vers 0, que

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon \leq |\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \right). \quad (\star)$$

On peut d'ailleurs noter que l'intégrale double

$$\iint_{D(0,1)} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)}$$

est convergente au sens de Lebesgue (car $z \neq 0$) et que (\star) s'exprime aussi :

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} \quad (\star')$$

grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'après la formule de Cauchy (version analytique) dans $K = \overline{D(0,1)}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\zeta^2}{\zeta - z} d\zeta = z^2. \quad (\star\star)$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right),$$

on peut bien aussi écrire

$$\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{\pi z} \left(\iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} - \iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \right). \quad (\star\star\star)$$

La seconde ligne des égalités demandées est bien justifiée (on reporte juste $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ dans (\star')). En utilisant les coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on remarque enfin pour conclure que

$$\iint_{|\zeta| \leq 1} \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \right)^2 \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = \int_{r \in [0,1]} \int_{\theta \in [0,2\pi]} e^{4i\theta} \frac{1}{r e^{i\theta}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = 0.$$

Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 des égalités demandées est justifié.

Texte et corrigé - Examen 2011-2012

Exercice 1.

a) Montrer l'inégalité

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \min(|e^z|, |e^{-z}|) \leq 1.$$

Si $\operatorname{Re} z \geq 0$, on a $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq 1$; si $\operatorname{Re} z \leq 0$, on a $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq 1$. D'où l'inégalité demandée.

b) Déterminer toutes les fonctions entières f telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = f(-z) \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq 1 + |e^z|.$$

Soit f une telle fonction. On a $|f(z)| \leq 1 + |e^z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Comme f est paire, on a aussi $|f(z)| = |f(-z)| \leq 1 + |e^{-z}|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'où

$$|f(z)| \leq 1 + \min(|e^z|, |e^{-z}|) \leq 2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(d'après l'inégalité établie au **a**). Il résulte du théorème de Liouville (Corollaire 2.13 du cours) que f est une fonction constante, *i.e.* $f \equiv C$. On doit avoir aussi $|C| \leq \min_{\zeta \in \mathbb{C}} (1 + |e^\zeta|) = 1$ (faire tendre $\zeta \in \mathbb{R}$ vers $-\infty$ par exemple). Il est clair que toute telle fonction constante $f \equiv C$, $|C| \leq 1$ vérifie l'inégalité demandée. La réponse à cette question est donc : f est une fonction constante de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D(0, 3)}$, ne s'annulant pas sur la frontière de ce disque. On note γ le chemin paramétré $t \in [0, 1] \mapsto 3e^{2i\pi t}$ et l'on suppose que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2, \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \zeta^2 \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -4.$$

a) Calculer le nombre, les multiplicités, et les valeurs des zéros de la fonction f appartenant au disque ouvert $D(0, 3)$.

D'après la formule de variation de l'argument (théorème 3.9, volet 1), on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N_{\text{zer}}[f; D(0, 3)],$$

$N_{\text{zer}}[f; D(0, 3)]$ désignant le nombre des zéros de f dans $D(0, 3)$ (comptés avec leurs multiplicités). Chacun de ces zéros α est un pôle simple de f'/f (*cf.* l'exemple 3.1 du cours) et l'on a donc

$$\operatorname{Res}_{\alpha} \left[\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right] = \alpha, \quad \operatorname{Res}_{\alpha} \left[\zeta^2 \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right] = \alpha^2.$$

Le nombre de zéros de f dans $D(0, 3)$ (comptés avec multiplicités) vaut ici 2 par hypothèses. Notons α_1, α_2 ces deux zéros ($\alpha_1 = \alpha_2$ signifiant que $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ est zéro double). La formule des résidus (théorème 3.8) implique, compte-tenu des hypothèses,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad \& \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = -4.$$

On en déduit $2\alpha_1\alpha_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = 8$, soit $\alpha_1\alpha_2 = 4$. Les nombres α_1 et α_2 sont donc les deux racines de l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$, soit $1 \pm i\sqrt{3}$. Ces deux nombres sont distincts; la fonction f a donc exactement deux zéros simples (à savoir $1 \pm i\sqrt{3}$) dans $D(0, 3)$.

b) On suppose de plus que $\sup_{|\zeta|=2} |f(\zeta)| < 50$. Calculer le nombre de zéros (comptés avec leurs multiplicités) de la fonction holomorphe

$$g : z \mapsto z^2(z^4 - 1) + f(z) + 10$$

appartenant au disque ouvert $D(0, 2)$.

On a

$$|\zeta| = 2 \implies |g(\zeta) - \zeta^2(\zeta^4 - 1)| \leq |f(\zeta)| + 10 < 60 = 4(16 - 1) = \min_{|\zeta|=2} |\zeta^2(\zeta^4 - 1)|.$$

D'après le théorème de Rouché, version analytique (théorème 3.9, volet 2), les fonctions g et $\zeta \mapsto \zeta^2(\zeta^4 - 1)$ ont même nombre de zéros (comptés avec multiplicités) dans $D(0, 2)$. On a donc $N_{\text{zer}}(g; D(0, 2)) = 6$ car $\zeta \mapsto \zeta^2(\zeta^4 - 1)$ a un zéro double (0) et 4 zéros simples (les quatre racines quatrièmes de l'unité) dans $D(0, 2)$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe bornée en module dans la bande ouverte $B := \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) à \overline{B} . Soient

$$M_0 := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \quad \text{et} \quad M_1 := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(1 + iy)|.$$

a) On suppose dans cette question et la suivante que $M_0 M_1 > 0$. Montrer que la fonction $G : z \in B \mapsto f(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$ est holomorphe dans B , se prolonge en une fonction continue dans \overline{B} , et que ce prolongement est borné en module par 1 sur la frontière de \overline{B} .

La fonction

$$h : z \mapsto M_0^{z-1} M_1^{-z} = \exp((z-1) \log M_0 - z \log M_1)$$

est une fonction entière. La fonction $G = fh$ est donc bien holomorphe dans B et se prolonge (comme f) continuellement à \overline{B} . D'autre part,

$$\forall z \in \mathbb{C}, |M_0^{z-1} M_1^{-z}| = \exp((\operatorname{Re} z - 1) \log M_0 - (\operatorname{Re} z) \log M_1).$$

La fonction h est donc de module égal à $\exp(-\log M_0) = M_0^{-1}$ sur l'axe vertical $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ et de module égal à $\exp(-\log M_1) = M_1^{-1}$ sur la droite verticale $\{\operatorname{Re} z = 1\}$. On a donc bien $|G(z)| \leq M_0 \times M_0^{-1} = 1$ si $\operatorname{Re} z = 0$ et $|G(z)| \leq M_1 \times M_1^{-1} = 1$ si $\operatorname{Re} z = 1$. On a donc $|G| \leq 1$ sur ∂B .

b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction $z \in B \mapsto G(z) e^{\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ dans la bande B . En déduire :

$$\forall z \in B, |f(z)| \leq M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}.$$

On a

$$\forall z = x + iy \in \overline{B}, |e^{\epsilon z^2}| = e^{\epsilon(x^2 - y^2)} \leq e^\epsilon e^{-\epsilon y^2}.$$

Soit $T > 0$. Le principe du maximum, version globale (proposition 2.10, appliquée ici dans le rectangle ouvert $]0, 1[\times]-T, T[$) assure que

$$\begin{aligned} \sup_{[0,1] \times [-T,T]} |G(z)e^{\epsilon z^2}| &\leq \sup_{\partial([0,1] \times [-T,T])} |G(z)e^{-\epsilon z^2}| \\ \text{(B.1)} \quad &\leq e^\epsilon \max(1, e^{-\epsilon T^2} \sup_{x \in [0,1]} |G(x \pm iT)|) \end{aligned}$$

En effet, la fonction G est bornée en module par 1 sur les côtés verticaux du rectangle $[0, 1] \times [-T, T]$, tandis que la fonction $z \mapsto e^{-\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ sur ces mêmes côtés verticaux et par $e^\epsilon e^{-\epsilon T^2}$ sur les côtés horizontaux de ce rectangle. Dans la bande \overline{B} , la fonction $|G|$ est bornée par $\sup_{\overline{B}} |f| \times \exp(|\log M_0| + |\log M_1|) = M$. Si T est assez grand (tel que $e^{-\epsilon T^2} \leq 1/M$), on déduit de (B.1) que

$$\sup_{[0,1] \times [-T,T]} |G(z)e^{\epsilon z^2}| \leq e^\epsilon.$$

En faisant tendre T vers $+\infty$, on voit que ceci implique que $z \mapsto G(z)e^{-\epsilon z^2}$ est bornée en module par e^ϵ dans la bande B . Si z est fixé dans B , on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0 dans l'inégalité $|G(z)e^{-\epsilon z^2}| \leq e^\epsilon$, que $|G(z)| \leq 1$, i.e. $|f(z)| \leq |M_0^{1-z} M_1^z| = M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}$, ce qui est l'inégalité demandée.

c) Si $M_0 = 0$ ou $M_1 = 0$, montrer que f est identiquement nulle dans B .

Si par exemple $M_0 = 0$, f est identiquement nulle sur l'axe imaginaire pur. Le principe de réflexion de Schwarz (proposition 2.3) assure que f se prolonge par réflexion en une fonction holomorphe dans la bande $] -1, 1[\times \mathbb{R}$. Le principe des zéros isolés (théorème 2.9) assure (puisque f est identiquement nulle sur l'axe imaginaire pur) que f est identiquement nulle dans B .

d) Si la fonction f , une fois prolongée à \overline{B} , est telle que $f(\partial B) \subset \mathbb{R}$, montrer que f est constante dans B .

Le principe de réflexion de Schwarz (proposition 2.3), appliqué à gauche ou à droite (f est réelle sur les deux droites verticales constituant le bord de B), permet de prolonger (par réflexion) f à la bande $[-1, 2] \times \mathbb{R}$, le prolongement étant holomorphe à l'intérieur de cette bande fermée, continu et borné en module dans cette bande fermée par $\sup_B |f|$, et toujours réel sur le bord de cette bande fermée. On peut donc itérer ce processus et prolonger ainsi f de proche en proche à toute bande $[-k, 1+k]$, $k \in \mathbb{N}^*$, donc à \mathbb{C} tout entier, en une fonction entière f de module borné par $\sup_B |f|$. D'après le théorème de Liouville (corollaire 2.13 du cours), ce prolongement est une fonction constante dans \mathbb{C} , donc f est une fonction constante dans B .

Exercice 4. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Pi^+ := \{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) au demi-plan fermé $\overline{\Pi^+} = \{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. On suppose qu'il existe des constantes $\alpha \in]0, 1[$, $A > 0$, $C > 0$, $M > 0$, telles que

$$\sup_{\zeta \in \Pi^+} (|f(\zeta)| e^{-C|\zeta|^\alpha}) \leq A \quad \text{et} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \leq M.$$

a) Soit $\beta \in]\alpha, 1[$. Montrer que la fonction

$$z \mapsto z^\beta := \exp(\beta(\log|z| + i \arg_{]-\pi, \pi[}(z)))$$

est holomorphe dans Π^+ et se prolonge en une fonction continue dans $\overline{\Pi^+}$. Que vaut cette fonction prolongée en $z = 0$? Quelle est l'image de $\overline{\Pi^+}$ par cette fonction prolongée? Cette fonction prolongée peut-elle être la restriction à $\overline{\Pi^+}$ d'une fonction holomorphe dans un demi-plan ouvert $\{\operatorname{Re} z > -\eta\}$ avec $\eta > 0$?

La fonction

$$z \mapsto \log|z| + i \arg_{]-\pi, \pi[}(z)$$

est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$ (elle est en effet C^∞ dans cet ouvert et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann qu'il est commode ici d'exprimer en coordonnées polaires : $\partial g/\partial r + (i/r)\partial g/\partial \theta = 0$, cf. l'exemple 1.3 du cours). La fonction $z \mapsto z^\beta$ est donc bien holomorphe dans Π^+ comme composée de fonctions holomorphes (l'exponentielle est une fonction entière). Elle se prolonge d'ailleurs en une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$. Elle se prolonge aussi continuellement à $\overline{\Pi^+}$ car elle se prolonge continuellement en $z = 0$ en posant $0^\beta = 0$; en effet $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \overline{\Pi^+}} |z|^\beta = 0$. L'image de $\overline{\Pi^+}$ par cette fonction prolongée est le secteur angulaire fermé $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}; r \geq 0, |\theta| \leq \beta\pi/2\}$. La fonction $z \in \Pi^+ \mapsto z^\beta$ ne peut se prolonger holomorphiquement à un voisinage ouvert de l'origine car

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Pi^+} |\partial z^\beta / \partial z| = \lim_{z \rightarrow 0, z \in \Pi^+} (\beta|z|^{\beta-1}) = +\infty$$

puisque $\beta < 1$. Elle ne peut donc *a fortiori* se prolonger holomorphiquement à aucun demi-plan ouvert de la forme $\{\operatorname{Re} z > -\eta\}$, avec $\eta > 0$.

b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction

$$z \in \Pi^+ \mapsto g_\epsilon(z) := f(z) e^{-\epsilon z^\beta}$$

(où la fonction $z \mapsto z^\beta$ a été introduite au a)) est holomorphe et bornée en module dans Π^+ .

La fonction g_ϵ est holomorphe dans Π^+ comme produit de fonctions holomorphes. Elle se prolonge (d'après le a) continuellement à $\overline{\Pi^+}$. On a

$$(B.2) \quad \forall z = re^{i\theta} \in \Pi^+ \quad (r > 0, \theta \in]-\pi/2, \pi/2[), \\ |f(z)e^{-\epsilon z^\beta}| \leq A \exp(Cr^\alpha - r^\beta \cos(\beta\theta)) \leq \exp(Cr^\alpha - \cos(\beta\pi/2)r^\beta)$$

puisque $\beta \in]\alpha, 1[$ (ce qui implique $\cos(\beta\theta) \geq \cos(\beta\pi/2) > 0$ pour tout θ dans $]-\pi/2, \pi/2[$). Comme d'autre part $\beta > \alpha$, on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \exp(Cr^\alpha - \cos(\beta\pi/2)r^\beta) = 0,$$

d'où l'on déduit, compte-tenu de (B.2),

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \Pi^+} |g_\epsilon(z)| = 0.$$

On a également, du fait que g_ϵ se prolonge continuellement à $\overline{\Pi^+}$,

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \overline{\Pi^+}} |g_\epsilon(z)| = 0.$$

Comme la fonction g_ϵ est bornée en module dans tout demi-disque compact $\overline{D(0, R)} \cap \overline{\Pi^+}$ (puisque continue sur ce compact) et bornée en module par 1 dans $\overline{\Pi^+} \cap \{|z| \geq R\}$ lorsque R est assez grand, elle est bornée en module dans Π^+ (même dans $\overline{\Pi^+}$).

c) En appliquant convenablement le principe du maximum (on justifiera soigneusement le raisonnement utilisé), montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction g_ϵ est bornée en module par M dans Π^+ . En déduire que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \overline{\Pi^+}$.

Soit R assez grand pour que

$$\sup_{z \in \overline{\Pi^+}, |z| \geq R} |g_\epsilon(z)| \leq M/2.$$

Un tel R existe puisque

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty, z \in \overline{\Pi^+}} |g_\epsilon(z)| = 0$$

(cf. le raisonnement utilisé pour répondre à la question b)). D'après le principe du maximum (proposition 2.10) appliqué dans le demi-disque ouvert $\Pi^+ \cap D(0, R)$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{\Pi^+ \cap D(0, R)} |g_\epsilon(z)| &< \max(M/2, \sup_{y \in [-R, R]} |g_\epsilon(iy)|) \\ &\leq \max(M/2, \sup_{y \in [-R, R]} |f(iy)|) \leq M. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout R assez grand, on en déduit que $|g_\epsilon| < M$ dans Π^+ . Si z est fixé (arbitraire) dans Π^+ , on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0 dans les inégalités

$$|f(z)e^{-\epsilon z^\beta}| < M \quad \forall \epsilon > 0,$$

l'inégalité limite $|f(z)| \leq M$.

d) Un tel résultat subsiste-t'il si l'on conserve les hypothèses de l'en-tête de l'exercice, mais que l'on suppose cette fois $\alpha = 1$ au lieu de $\alpha \in]0, 1[$? Justifier toute réponse négative par un contre-exemple approprié.

La fonction \exp vérifie les conditions voulues avec $A = C = \alpha = 1$ et $M = 1$, puisque $|\exp z| = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{|z|}$ dans Π^+ et que $|e^{iy}| = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pourtant pas bornée en module par 1 dans Π^+ . Le résultat établi au c) ne subsiste donc plus si $\alpha = 1$.

Exercice 5

a) Soient α et β deux nombres réels tels que $|\beta| < \alpha$. Calculer, en utilisant la formule des résidus, l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)} d\zeta,$$

où γ désigne le chemin paramétré $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi t}$.

Comme $|\beta| < \alpha$, les pôles de la fonction rationnelle

$$R_{\alpha, \beta} : \zeta \mapsto \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)}$$

appartenant au disque unité ouvert sont les zéros de $\alpha\zeta^2 + \beta = 0$. Si $\beta = 0$, on a

$$\int_\gamma R_{\alpha, 0}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\alpha^2} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2i\pi}{\alpha^2}$$

puisque $\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = 1$. Si $\beta \neq 0$, les deux pôles de $R_{\alpha, \beta}$ appartenant au disque unité sont simples. En chacun de ces pôles ξ (tous les deux non nuls dans ce cas, avec

$\xi^2 = -\beta/\alpha$), on a, d'après la formule donnant le résidu en un pôle simple (lemme 3.1, formule (3.29)),

$$\operatorname{Res}_\xi [R_{\alpha,\beta}(\zeta) d\zeta] = \frac{1}{2\alpha\xi} \frac{\xi}{\beta\xi^2 + \alpha} = \frac{1}{2(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

On a donc dans ce cas

$$\int_\gamma R_{\alpha,\beta}(\zeta) d\zeta = 2i\pi \times 2 \times \frac{1}{2(\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{2i\pi}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

b) Soient a et b deux nombres strictement positifs. Dédurre du **a)** (on prendra $\alpha = a + b$ et $\beta = a - b$) la valeur (en fonction de a et b) de l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}.$$

Si $\zeta = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), on a

$$\begin{aligned} 4(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) &= a^2(\zeta + 1/\zeta)^2 - b^2(\zeta - 1/\zeta)^2 \\ &= \left(a(\zeta + 1/\zeta) + b(\zeta - 1/\zeta) \right) \left(a(\zeta + 1/\zeta) - b(\zeta - 1/\zeta) \right) \\ &= \frac{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)}{\zeta^2}, \end{aligned}$$

où $\alpha := a + b$ et $\beta := a - b$ (on a bien $|a - b| < a + b$ car $a > 0$ et $b > 0$). On a donc, en utilisant le résultat établi au **a)**,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} &= 4 \int_\gamma \frac{\zeta^2}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)} \frac{d\zeta}{i\zeta} \\ &= \frac{4}{i} \int_\gamma \frac{\zeta}{(\alpha\zeta^2 + \beta)(\beta\zeta^2 + \alpha)} d\zeta \\ &= \frac{4}{i} \times \frac{2i\pi}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{8\pi}{4ab} = \frac{2\pi}{ab}. \end{aligned}$$

Exercice 6

a) Donner explicitement une détermination holomorphe φ du logarithme dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \{iy; y \leq 0\}$, telle que $\varphi(t) = \log t$ pour tout $t > 0$. On note \log cette détermination dans la suite de l'exercice.

Cette détermination holomorphe est

$$z \mapsto \log |z| + i \arg_{]-\pi/2, 3\pi/2[}(z).$$

Cette fonction φ est en effet bien holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{iy; y \geq 0\}$ (cf. l'exemple 1.3 du cours) et telle que $\exp(\varphi(z)) = z$ dans cet ouvert.

b) Montrer que les intégrales

$$I_q := \int_{]0, \infty[} \frac{(\log t)^q}{(1+t^2)^2} dt, \quad q = 0, 1, 2,$$

sont convergentes au sens de Lebesgue.

Comme $|\log t| = o(t^{-\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures, les trois fonctions

$$t \mapsto \frac{(\log t)^q}{(1+t^2)^2}, \quad q = 0, 1, 2,$$

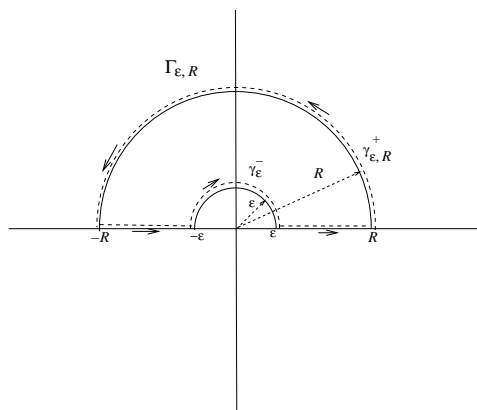


FIGURE B.1. Contour $\Gamma_{\epsilon,R}$ (Exercice VI, c))

sont intégrables sur $]0, 1]$ d'après le critère de Riemann ($1/t^\alpha$ est intégrable en 0_+ si et seulement si $\alpha < 1$). Comme $|\log t| = o(t^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque t tend vers $+\infty$, ces mêmes trois fonctions sont intégrables sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann ($1/t^\alpha$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$).

c) Soient $\epsilon \in]0, 1[$ et $R > 1$. Exprimer en utilisant la formule des résidus les intégrales curvilignes

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2}{(1 + \zeta^2)^2} d\zeta,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne le chemin paramétré correspondant au trajet indiqué sur la figure B.1, parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Dans les deux cas, le seul pôle de la fonction méromorphe

$$\zeta \mapsto \frac{(\log \zeta)^q}{(1 + \zeta^2)^2}, \quad (q = 0 \text{ ou } q = 2)$$

(figurant sous la prise d'intégrale curviligne) qui appartienne à l'ouvert enserré par le support de $\Gamma_{\epsilon,R}$ est i . Il s'agit dans les deux cas d'un pôle double. Le développement de Taylor de la fonction $(\log z)^2$ au voisinage de $z = i$ est

$$(\log(i + h))^2 = (\log i)^2 + 2 \frac{\log i}{i} h + o(|h|) = -\pi^2/4 + \pi h + o(h)$$

puisque $\log i = i\pi/2$ et $\log'(i) = 1/i$. On a, au voisinage de $h = 0$,

$$\frac{1}{((i + h) + i)^2} = \frac{1}{-4 + 4ih + o(h)} = -\frac{1 + ih}{4} + o(h).$$

Il en résulte

$$\text{Res}_i \left[\frac{1}{(\zeta^2 + 1)^2} d\zeta \right] = \text{Res}_0 \left[\frac{1}{h^2(2i + h)^2} dh \right] = -\frac{i}{4}.$$

De même

$$\frac{(\log(i + h))^2}{((i + h) + i)^2} = \frac{-\pi^2/4 + \pi h + o(h)}{-4 + 4ih + o(h)} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}(i\pi^2/4 - \pi)h + o(h).$$

Il en résulte

$$\operatorname{Res}_i \left[\frac{(\log \zeta)^2}{(\zeta^2 + 1)^2} d\zeta \right] = \operatorname{Res}_0 \left[\frac{(\log(i+h))^2}{h^2(2i+h)^2} dh \right] = \frac{1}{4}(i\pi^2/4 - \pi).$$

On a donc, comme conséquence de la formule des résidus (théorème 3.8) :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} &= 2i\pi \times \left(\frac{-i}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \\ \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2} d\zeta &= 2i\pi \times \left(\frac{1}{4}(i\pi^2/4 - \pi) \right) = -\frac{\pi^3}{8} - i\frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

d) En faisant tendre ϵ vers 0, puis R vers l'infini, dans l'expression de

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2}$$

obtenue au **c)**, calculer la valeur numérique de I_0 .

On utilise les notations indiquées sur la figure B.1 pour désigner les deux circuits correspondant aux deux chemins paramétrés que sont $\gamma_{\epsilon,R}^+ : t \in [0,1] \mapsto Re^{i\pi t}$ et $\gamma_{\epsilon,R}^- : t \in [0,1] \mapsto \epsilon e^{i(1-t)\pi}$ (de supports respectifs l'un des deux demi-cercles impliqués dans la décomposition du circuit $\Gamma_{\epsilon,R}$). On constate que

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = O(R^{-3}).$$

Il en résulte

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

Comme la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{1}{(1+\zeta^2)^2}$$

est continue en $\zeta = 0$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\epsilon,R}^-} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \int_{\epsilon}^R \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

e) En faisant tendre ϵ vers 0, puis R vers l'infini, dans l'expression de

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{(\log \zeta)^2}{(1+\zeta^2)^2} d\zeta$$

obtenue au **c)**, déduire du résultat établi au **d)** les valeurs numériques de I_1 et I_2 .

On raisonne comme au **d)**. On constate que

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} \frac{(\log \zeta)^2 d\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \right| \leq \frac{\pi R (\log R + \pi)^2}{(R^2-1)^2} = O((\log R)^2 R^{-3}).$$

Il en résulte

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{\epsilon, R}^+} \frac{(\log \zeta)^2 d\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} = 0.$$

Comme la fonction $\zeta \mapsto (\log \zeta)^2$ est telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\epsilon \sup_{\text{supp}(\gamma_{\epsilon, R}^-)} |\log \zeta|^2) = 0$$

(car $|\log \epsilon| = o(1/\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0_+), on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{\epsilon, R}^-} \frac{(\log \zeta)^2 d\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-\epsilon}^{-R} \frac{(\log |t| + i\pi)^2 dt}{(1 + t^2)^2} + \int_{\epsilon}^R \frac{(\log t)^2 dt}{(1 + t^2)^2} \right) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\Gamma_{\epsilon, R}} \frac{(\log \zeta)^2 d\zeta}{(1 + \zeta^2)^2} \\ &= -\frac{\pi^3}{8} - i\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

d'après le résultat établi au **c**). En prenant les parties réelles dans cette égalité et en utilisant le calcul de I_0 effectué au **d**), on trouve

$$2I_2 - \pi^2 I_0 = 2I_2 - \frac{\pi^3}{4} = -\frac{\pi^3}{8},$$

soit $I_2 = \pi^3/16$. En prenant maintenant les parties imaginaires dans la même égalité, on trouve $2\pi I_1 = -\pi^2/2$, soit $I_1 = -\pi/4$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 , intégrable au sens de Lebesgue sur \mathbb{C} .

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'intégrale double

$$\iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \quad (\text{où } \zeta = \xi + i\eta)$$

est convergente au sens de Lebesgue.

La fonction f est de classe C^1 dans \mathbb{C} , donc bornée en module au voisinage de tout point z du plan. Comme la fonction $\zeta \mapsto 1/\zeta$ est intégrable au voisinage de l'origine dans \mathbb{C} (en vertu du critère de Riemann qui stipule que $\zeta \mapsto |\zeta|^{-\alpha}$ est intégrable au voisinage de l'origine dans \mathbb{C} si et seulement si $\alpha < 2$), la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{f(z + \zeta)}{\zeta}$$

est intégrable au voisinage de l'origine dans \mathbb{C} , ce pour tout nombre complexe z . La fonction $\zeta \mapsto f(z + \zeta)$ est aussi supposée intégrable sur \mathbb{C} , comme l'est la fonction f (par invariance par translation de la mesure de Lebesgue). L'intégrale

$$\iint_{|\zeta| \geq 1} f(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est donc aussi convergente au sens de Lebesgue (comme l'est, on vient de le voir, l'intégrale sur $\{|\zeta| \leq 1\}$).

b) Soit $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ une fonction de classe C^1 , identiquement égale à 1 dans $D(0, 1/2)$, et de support compact inclus dans $D(0, 1)$ (on admettra l'existence d'une

telle fonction, dite « fonction-plateau »). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer, après avoir scindé f en la somme

$$f(\zeta) = f(\zeta) \rho(\zeta - z_0) + f(\zeta) (1 - \rho(\zeta - z_0))$$

que la fonction

$$F : z \mapsto \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est de classe C^1 dans $D(z_0, 1/4)$ et vérifie dans ce disque ouvert

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f(z + \zeta) \rho(z + \zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

On découpe F en

$$\begin{aligned} F(z) &= \\ &= \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) \rho(z + \zeta - z_0) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} + \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) (1 - \rho(z + \zeta - z_0)) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\ &= F_{z_0,1}(z) + F_{z_0,2}(z). \end{aligned}$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour $|z - z_0| < 1/4$, la fonction

$$\zeta \mapsto f(z + \zeta) \rho(z + \zeta - z_0)$$

est une fonction de classe C^1 , à support compact inclus dans $D(0, 5/4)$ (puisque le support de ρ est inclus dans $D(0, 1)$ et que $|z - z_0| \leq 1/4$). Il existe donc (puisque f et ρ sont de classe C^1), une constante $M_{f,\rho}(z_0)$ telle que, pour tout $z \in D(z_0, 1/4)$, pour presque tout $\zeta \in \mathbb{C}$ (ici $\zeta \neq 0$), on ait

$$\frac{\|\vec{\nabla}_{x,y} [f(x + iy + \zeta) \rho(x + iy + \zeta - z_0)]\|}{|\zeta|} \leq M_{f,\rho}(z_0) \times \frac{\chi_{D(0,5/4)}(\zeta)}{|\zeta|}.$$

On en déduit, en appliquant le théorème de Lebesgue relatif à la différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres x et y (ce théorème s'applique ici car le « chapeau dominant » $\zeta \mapsto M_{f,\rho}(z_0) \chi_{D(0,5/4)}(\zeta)/|\zeta|$ est intégrable sur \mathbb{C}) que la fonction

$$z \mapsto F_{z_0,1}(z) := \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) \rho(z + \zeta - z_0) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est de classe C^1 dans $D(z_0, 1/4)$, et que l'on a

$$\forall z \in D(z_0, 1/4), \quad \frac{\partial F_{z_0,1}}{\partial \bar{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f(z + \zeta) \rho(z + \zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta}.$$

En utilisant l'invariance par translation pour la mesure de Lebesgue, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} F_{z_0,2}(z) &:= \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta) (1 - \rho(z + \zeta - z_0)) \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\ &= \iint_{\mathbb{C}} f(\zeta) (1 - \rho(\zeta - z_0)) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \iint_{|\zeta - z_0| \geq 1/2} f(\zeta) (1 - \rho(\zeta)) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

(puisque $\rho \equiv 1$ dans $D(0, 1/2)$). Pour $|z - z_0| < 1/4$ et $|\zeta - z_0| \geq 1/2$, on a (par l'inégalité triangulaire) $1/|\zeta - z|^2 \leq 16$. Pour tout $z \in D(z_0, 1/4)$, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on a donc

$$|f(\zeta)(1 - \rho(\zeta - z_0))| \|\vec{\nabla}_{x,y} \left[\frac{1}{\zeta - x - iy} \right]\| \chi_{\{|\zeta - z_0| \geq 1/2\}} \leq 16|f(\zeta)|$$

(on prend comme norme $\| \cdot \|$ sur \mathbb{C}^2 le maximum des modules des coordonnées). On est à nouveau dans les conditions d'application du théorème de Lebesgue de différentiation des intégrales fonctions de deux paramètres, puisque le « chapeau dominant » (ici $\zeta \mapsto 16|f(\zeta)|$) est intégrable sur \mathbb{C} . On en déduit que la fonction

$$z \mapsto F_{z_0,2}(z) := \iint_{\mathbb{C}} f(z + \zeta)(1 - \rho(z + \zeta - z_0)) \frac{d\xi d\eta}{\zeta}$$

est aussi de classe C^1 dans $D(z_0, 1/4)$ et que

$$\forall z \in D(z_0, 1/4), \quad \frac{\partial F_{z_0,2}}{\partial \bar{z}}(z) = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{\zeta - z} \right] (1 - \rho(\zeta - z_0)) f(\zeta) d\xi d\eta = 0.$$

Comme $F = F_{z_0,1} + F_{z_0,2}$ dans $D(z_0, 1/4)$, on obtient bien le résultat demandé : chacune des deux fonctions est de classe C^1 dans $D(z_0, 1/4)$ et seule la première des deux contribue au calcul de $\partial F / \partial \bar{z}$ dans ce disque ouvert.

c) *En utilisant judicieusement la formule de Cauchy-Pompeiu, déduire du c) que la fonction F est solution de l'équation de Cauchy-Riemann avec second membre*

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = -\pi f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. La fonction

$$\zeta \mapsto f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)$$

est une fonction de classe C^1 , de support compact inclus dans $D(z_0, 1)$. D'après la formule de Cauchy-Pompeiu (proposition 1.6 du cours, appliquée ici avec $K = \overline{D(0, 1)}$), on a, pour tout $z \in D(z_0, 1)$,

$$\begin{aligned} f(z)\rho(z - z_0) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [f(\zeta)\rho(\zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [f(z + \zeta)\rho(z + \zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta} \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f(z + \zeta)\rho(z + \zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta}. \end{aligned}$$

Si $z \in D(z_0, 1/4)$, on a $\rho(z - z_0) = 1$ et, d'après le résultat établi à la question **b)**,

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [f(z + \zeta)\rho(z + \zeta - z_0)] \frac{d\xi d\eta}{\zeta} = \frac{\partial F_{z_0,1}}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z).$$

Dans $D(z_0, 1/4)$, on a donc bien

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z),$$

ce qui donne le résultat voulu puisque z_0 est ici arbitraire.

Texte et corrigé du DS - 2012-2013

Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs et K le compact de \mathbb{R}^2 défini par

$$K := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

(1) Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_K (x^2 + y^2) dx dy$$

en utilisant le changement de variables

$$(x, y) \longleftrightarrow (r, \theta),$$

où $x = ar \cos \theta$ et $y = br \sin \theta$ (ce changement de variables réalise un C^1 -difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x); x \geq 0\}$ et $]0, \infty[\times]0, 2\pi[$).

Le jacobien du changement de variables proposé vaut :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

La formule de changement de variables dans la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue assure que

$$\begin{aligned} I &= ab \iint_{]0,1[\times]0,2\pi[} (a^2 r^2 \cos^2 \theta + b^2 r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta \\ &= ab(a^2 + b^2) \int_0^1 r^3 dr \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4}. \end{aligned}$$

(2) Soit $(\partial K)_+$ le bord orienté du compact K (conformément à l'orientation canonique du plan complexe). Comment appelle-t-on la courbe géométrique correspondant au support du chemin $(\partial K)_+$? Calculer (en utilisant un paramétrage admissible de $(\partial K)_+$) l'intégrale curviligne

$$J := \int_{(\partial K)_+} (y^3 dx - x^3 dy).$$

La courbe géométrique correspondant au support du chemin $(\partial K)_+$ est une ellipse centrée en 0 dont a et b représentent les longueurs des demi-axes. En utilisant le paramétrage du chemin $(\partial K)_+$ donné par

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

il vient

$$dx = -a \sin \theta d\theta, \quad dy = b \cos \theta d\theta$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
 J &= - \int_0^{2\pi} (ab^3 \sin^4 \theta + ba^3 \cos^4 \theta) d\theta \\
 &= -ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\
 &= -ab(a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2(2\theta) + 1}{2} \right) d\theta \\
 &= -\frac{3\pi ab(a^2 + b^2)}{4}.
 \end{aligned}$$

- (3) Donner une relation simple reliant les deux nombres I et J . Retrouver cette relation sans faire le calcul ni de I , ni de J – comme aux questions précédentes –, mais en utilisant cette fois un théorème du cours que l'on citera.

On a manifestement $J = -3I$. En appliquant la formule de Green-Riemann dans le compact K , on retrouve bien cette relation car

$$J = \int_K d(y^3 dx - x^3 dy) = 3 \int_K (y^2 + x^2) dy \wedge dx := -3 \iint_K (x^2 + y^2) dx dy.$$

Exercice 2

Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe et $\gamma : \theta \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ le chemin $(\partial D(0,1))_+$.

- (1) À quel système d'équations aux dérivées partielles se plie dans l'ouvert $D(0,1)$ le couple de fonctions réelles (P, Q) tel que $f \equiv P + iQ$? Que peut-on dire de l'application \mathbb{R} -linéaire $d_{(x,y)}[(P, Q)]$ (de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2) en un point quelconque (x, y) de $D(0,1)$?

Le couple de fonctions (P, Q) se plie dans $D(0,1)$ au système différentiel de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

qui traduit le fait que l'application \mathbb{R} -linéaire $d_{(x,y)}[(P, Q)]$ est en un point quelconque (x, y) de $D(0,1)$ ou bien l'application nulle, ou bien une similitude directe (composée d'une rotation et d'une homothétie).

- (2) En invoquant un théorème du cours, prouver l'inégalité

$$\int_{\gamma} P dQ \geq 0$$

et exprimer cette intégrale curviligne en fonction de la dérivée au sens complexe $f' : D(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ de la fonction f . Que peut-on dire de la fonction f si $\int_{\gamma} P dQ = 0$?

D'après la formule de Green-Riemann appliquée dans le compact $K = \overline{D(0,1)}$ au voisinage duquel le couple de fonctions (P, Q) obéit au système

différentiel de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dQ &= \int_{D(0,1)} d[P dQ] = \int_{D(0,1)} dP \wedge dQ \\ &= \iint_{D(0,1)} \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_{D(0,1)} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 \right) dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(P+iQ)}{\partial x} - i \frac{\partial(P+iQ)}{\partial y} \right) (x+iy) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (x+iy) \end{aligned}$$

du fait que f se plie au système de Cauchy-Riemann, on peut réécrire cela :

$$\int_{\gamma} P dQ = \iint_{D(0,1)} |f'(x+iy)|^2 dx dy.$$

Si $\int_{\gamma} P dQ = 0$, on a donc $|f'(z)|^2 = 0$ pour tout z dans $D(0,1)$ puisque $|f'|^2$ est une fonction C^∞ , donc continue, dans $D(0,1)$, dont l'intégrale sur $D(0,1)$ est, de par ce qui précède, nulle. La fonction f vérifie alors dans l'ouvert connexe $D(0,1)$ la relation $df \equiv 0$ et est donc constante dans $D(0,1)$ (donc aussi dans $\overline{D(0,1)}$) d'après l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 et $\psi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 . Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $\epsilon > 0$, on note $\gamma_{z_0, \epsilon}$ le chemin $\theta \in [0, 1] \mapsto z_0 + \epsilon e^{2i\pi\theta}$.

(1) Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0, \epsilon}} \varphi(\zeta) d\zeta \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z_0). \quad (*)$$

En utilisant la formule de Green-Riemann dans le compact $\overline{D(z_0, \epsilon)}$, il vient, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0, \epsilon}} \varphi(\zeta) d\zeta &= \int_{D(z_0, \epsilon)} d[\varphi d\zeta] = \frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{D(z_0, \epsilon)} d[\varphi d\zeta] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{D(z_0, \epsilon)} \bar{\partial}[\varphi d\zeta] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Comme $\pi\epsilon^2$ est la surface du domaine d'intégration $\overline{D(z_0, \epsilon)}$, l'intégrale ci-dessus figure la valeur moyenne de la fonction $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ (qui est continue puisque φ est C^1) dans le disque fermé $\overline{D(z_0, \epsilon)}$. La continuité au point z_0 de cette fonction $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ implique bien que cette valeur moyenne converge

vers la valeur de $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ au point z_0 lorsque le rayon ϵ du disque tend vers 0.

- (2) Si Δ désigne l'opérateur laplacien $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{(\xi,\eta) \in \overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta) d\xi d\eta \right) = \Delta[\psi](z_0). \quad (**)$$

La fonction $\Delta[\psi]$ est une fonction continue en tout point z_0 de C puisque ψ est supposée C^2 . Pour $\epsilon > 0$, l'expression

$$\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{(\xi,\eta) \in \overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta) d\xi d\eta$$

représente la valeur moyenne de la fonction continue $\Delta[\psi]$ dans le disque fermé $\overline{D(z_0,\epsilon)}$ (dont la quantité au dénominateur $\pi\epsilon^2$ figure l'aire). Puisque $\Delta[\psi]$ est continue en tout point, en particulier en z_0 , cette valeur moyenne tend bien vers $\Delta[\psi](z_0)$ lorsque le disque $\overline{D(z_0,\epsilon)}$ sur lequel on calcule la moyenne de $\Delta[\psi]$ s'écroule sur le point z_0 , c'est-à-dire ici si ϵ tend vers 0.

- (3) Comment s'exprime l'opérateur laplacien (considéré comme agissant sur les fonctions de classe C^2) à partir des opérateurs différentiels du premier ordre complexes $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial\bar{z}$? En utilisant cette expression du laplacien, retrouver la formule (**) à partir de la formule (*) appliquée cette fois à la fonction $\varphi := \partial\psi/\partial z$.

Si ψ est une fonction de classe C^2 dans \mathbb{C} , on a

$$\Delta[\psi](z) \equiv 4 \left(\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \right) [\psi] = 4 \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z} \right) [\psi]$$

On a donc, si $\zeta := \xi + i\eta$,

$$\Delta[\psi](\zeta) d\xi \wedge d\eta = \Delta[\psi](\zeta) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{2i} = \frac{4}{2i} \bar{\partial} \left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} d\zeta \right] = \frac{2}{i} d \left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} d\zeta \right].$$

La formule de Green-Riemann (encore!) donne donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta) d\xi d\eta &= \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta\psi[\xi + i\eta] d\xi \wedge d\eta \\ &= \frac{2}{i} \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} d \left[\frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} d\zeta \right] \\ &= \frac{2}{i} \int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} d\zeta. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat établi à la question 1 avec $\varphi = \partial\psi/\partial z$ comme indiqué, on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta) d\xi d\eta \right) &= 4 \times \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \frac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}} d\zeta \right) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial\bar{z}} \left[\frac{\partial\psi}{\partial z} \right] (z_0) = \Delta[\psi](z_0). \end{aligned}$$

- (4) On note (r, θ) les coordonnées polaires ($x + iy = re^{i\theta}$). Vérifier, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{ir} \left(\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) d\bar{\zeta} \right). \quad (\dagger)$$

Comme $\zeta = re^{i\theta}$ et $\bar{\zeta} = re^{-i\theta}$, et que $(\zeta, \bar{\zeta})$ sont traitées au niveau des calculs comme s'il s'agissait de variables indépendantes (comme r et θ , qui, elles, sont bien par contre des variables réelles indépendantes), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= ir \left(e^{i\theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - e^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right) \end{aligned}$$

en tant qu'opérateurs agissant sur les fonctions de classe C^1 , en vertu de la *chain rule* (règle de Leibniz) du calcul différentiel. En utilisant la première de ces relations (agissant sur ψ au point courant $z_0 + re^{i\theta}$) et en substituant, on voit que

$$\int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_{z_0, r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) d\bar{\zeta} = ir \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

D'où la relation (\dagger) demandée en divisant les deux membres par ir .

- (5) Dédurre de la formule (\dagger) que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right) = \Delta[\psi](z_0).$$

En divisant la formule (\dagger) par πr , on trouve la différence de deux termes ; le premier

$$\frac{1}{i\pi r^2} \int_{\gamma_{z_0, \epsilon}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} d\zeta$$

tend, lorsque r tend vers 0_+ , vers

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z} \partial z}(z_0) = \frac{\Delta[\psi](z_0)}{2}$$

d'après le résultat établi à la question 3. Le second se transforme par la formule de Green-Riemann en :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{i\pi r^2} \int_{D(z_0, \epsilon)} d \left[\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right] &= -\frac{2}{\pi r^2} \int_{D(z_0, \epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) d\eta \wedge d\xi \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \int_{D(z_0, \epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) d\xi \wedge d\eta \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \iint_{D(z_0, \epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}}(\xi + i\eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

et tend, lui aussi, d'après encore le résultat établi à la question 3, vers $\Delta[\psi](z_0)/2$. En ajoutant les deux contributions, on trouve le résultat demandé.

Exercice 4

Soient f et q deux fonctions à valeurs complexes définies dans un voisinage V du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, supposées toutes deux de classe C^1 dans ce voisinage V . Soit γ le chemin $\theta \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ correspondant au bord orienté $(\partial\overline{D(0,1)})_+$.

- (1) Soit $z \in D(0,1)$. En appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Cauchy-Pompeiu à la fonction $\zeta \in V \mapsto f(\zeta)(1 + q(\zeta)(\zeta - z))$, vérifier que l'on a pour $f(z)$ la formule de représentation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta)(1 + q(\zeta)(\zeta - z)) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} + q(\zeta) \right) d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \iint_{D(0,1)} f(\zeta) \frac{\partial q}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

(on justifiera la convergence des trois intégrales, simples ou doubles, figurant au membre de droite de cette formule).

D'après la règle de Leibniz et le fait que $\zeta \mapsto \zeta - z$ soit holomorphe, on a, pour tout z, ζ au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, avec $\zeta \neq z$,

$$\begin{aligned} &\bar{\partial} \left[f(\zeta)(1 + q(\zeta)(\zeta - z)) \right] = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)(1 + q(\zeta)(\zeta - z)) + f(\zeta)(\zeta - z) \frac{\partial q}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right) d\bar{\zeta} \\ &= (\zeta - z) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} + q(\zeta) \right) + f(\zeta) \frac{\partial q}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \right) d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy Pompeiu (Proposition 1.6 du cours), appliquée avec $K = \overline{D(0,1)}$, $\varphi : \zeta \mapsto f(\zeta)(1 + q(\zeta)(\zeta - z))$, l'évaluation du membre de gauche se faisant précisément au point z (où $\varphi(z) = f(z)$), donne la formule de représentation voulue. Des trois intégrales figurant au membre de droite de cette formule, seule l'intégrale double

$$\iint_{D(0,1)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} + q(\zeta) \right) d\xi d\eta$$

pose éventuellement problème du fait de la singularité en $\zeta = z$ de la fonction sous l'intégrale. En fait, cette intégrale double est absolument convergente puisque $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ est localement intégrable au voisinage de z du fait du critère de Riemann ($1/|x|^\alpha$ est intégrable au voisinage de $x = 0$ dans \mathbb{R}^n si et seulement si $\alpha > -n$, et l'on est ici dans le cas $n = 2$, avec $-1 > -2$). Les deux autres intégrales (l'intégrale curviligne initiale et l'intégrale double finale) ne posent aucun problème car les fonctions à intégrer sont continues sur le domaine d'intégration.

- (2) On suppose de plus maintenant que q est identiquement nulle sur le bord du disque $\overline{D(0,1)}$. Dédurre de la formule de représentation établie à la

question 1 (en la comparant à ce que donnerait la formule de Cauchy-Pompeiu appliquée à f) que l'on a, pour tout $z \in D(0,1)$, l'égalité :

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) q(\zeta) d\xi d\eta = - \iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta) \frac{\partial q}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta.$$

Retrouver cette égalité en appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Green-Riemann à la 1-forme $f(\zeta)q(\zeta) d\zeta$.

Si l'on écrit la formule de Cauchy-Pompeiu pour la fonction $\zeta \mapsto \varphi(\zeta)$, on trouve, pour tout $z \in D(0,1)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\zeta) (1 + q(\zeta)(\zeta - z)) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

puisque q est ici supposée identiquement nulle sur le support du chemin paramétré γ . En retranchant cette nouvelle égalité à l'égalité obtenue à la question 1, on obtient bien l'égalité

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) q(\zeta) d\xi d\eta = - \iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta) \frac{\partial q}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) d\xi d\eta$$

demandée. En faisant tout passer au membre de droite, cette dernière égalité s'écrit aussi (grâce à la règle de dérivation d'un produit) :

$$\int_{\overline{D(0,1)}} \bar{\partial} [f(\zeta)q(\zeta) d\zeta] = \int_{\overline{D(0,1)}} d [f(\zeta)q(\zeta) d\zeta] = 0.$$

Mais la formule de Green-Riemann (appliquée à $K = \overline{D(0,1)}$) donne

$$\int_{\overline{D(0,1)}} d [f(\zeta)q(\zeta) d\zeta] = \int_{\gamma} f(\zeta)q(\zeta) d\zeta.$$

Comme q est nulle sur le support de γ , on retrouve bien ainsi

$$\int_{\overline{D(0,1)}} d [f(\zeta)q(\zeta) d\zeta] = \int_{\gamma} f(\zeta)q(\zeta) d\zeta = 0.$$

- (3) Pour toute fonction f de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, prouver, en utilisant le résultat établi à la question précédente avec une judicieuse fonction q , la formule

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(re^{i\theta}) (1 - r^2) r dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^2 e^{i\theta} dr d\theta.$$

On prend $q(\zeta) = 1 - |\zeta|^2$ et l'on écrit la formule établie à la question 2. Le membre de gauche s'exprime en utilisant le changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires ($\xi + i\eta = re^{i\theta}$, $d\xi d\eta = r dr d\theta$) :

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(re^{i\theta}) (1 - r^2) r dr d\theta.$$

Comme $\partial q / \partial \bar{\zeta} \equiv -\zeta$, le membre de droite s'écrit

$$\iint_{D(0,1)} f(\xi + i\eta)(\xi + i\eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r^2 e^{i\theta} dr d\theta$$

si l'on utilise une fois encore le changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires ($\xi + i\eta = re^{i\theta}$, $d\xi d\eta = r dr d\theta$). On a bien la formule voulue.

Exercice 5

Soit $\varphi : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 identiquement nulle hors d'un compact du plan.

- (1) Formuler, en termes des dérivées partielles

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \bar{z}^q} [\varphi](0), \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad p + q \leq 2,$$

la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction φ au voisinage de l'origine.

La formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction 2 fois différentiable à l'origine (en particulier une fonction de classe C^2 dans le plan) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi(x + iy) &= \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0)x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0)y + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0)y^2 \right) + o(|\zeta|^2). \end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

(les opérateurs différentiels agissant ici sur les fonctions C^2 dans le plan) on constate que la partie principale de ce développement de Taylor s'exprime aussi sous la forme :

$$\varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0)z + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(0)\bar{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(0)z^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}(0)z\bar{z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2}(0)\bar{z}^2 \right).$$

On a donc le développement de Taylor de φ au voisinage de l'origine ainsi réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0)z + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(0)\bar{z} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(0)z^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}}(0)z\bar{z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2}(0)\bar{z}^2 \right) + o(|z|^2). \end{aligned}$$

- (2) En utilisant la formule de Green-Riemann et la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour φ au voisinage de l'origine (telle qu'elle est a été formulée à la question 1), montrer que¹

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^2} \right) = -\frac{1}{2i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0).$$

1. Il y avait ici une erreur dans le texte ; le facteur $-1/2i$ avait été oublié.

Soit $R > 0$ tel que $\text{supp } \varphi \subset D(0, R)$ et K_ϵ le compact défini comme la couronne $K_\epsilon := \{z; \epsilon \leq |z| \leq R\}$. En utilisant la formule de Green-Riemann dans cette couronne K_ϵ , on trouve, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^2} = \frac{1}{2i} \int_{K_\epsilon} \bar{\partial} \left[\frac{\varphi}{\zeta^2} d\zeta \right] = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

En utilisant le développement de Taylor de φ à l'origine établi à la question question 1, ainsi que le fait que, si $0 \leq p + q \leq 2$,

$$\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \zeta^p \bar{\zeta}^q \frac{d\zeta}{\zeta^2} \neq 0$$

seulement si $p - q - 1 = 0$, c'est-à-dire si $p = q + 1$, ce qui implique $q = 0$ et $p = 1$ sous l'hypothèse $p + q = 2q + 1 \leq 2$, on voit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0) \times \int_{\gamma_{0,\epsilon}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0).$$

Finalement, on trouve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^2} \right) = -\frac{1}{2i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0).$$

- (3) On suppose maintenant φ de classe C^∞ et non plus seulement de classe C^2 . En transposant ce qui a été fait aux questions 1 et 2 du cas $n = 1$ au cas cette fois $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}} \right)$$

existe et calculer la valeur de cette limite en termes des dérivées par rapport à z de la fonction φ , évaluées en $z = 0$.

Exactement comme nous avons exprimé à la question 1 le développement de Taylor à l'ordre 2 de φ au voisinage de l'origine, nous pouvons exprimer le développement de Taylor à l'ordre $n + 1$ sous la forme

$$\varphi(z) = \sum_{p+q \leq n+1} \frac{1}{p! q!} \frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial z^p \partial \bar{z}^q}(0) z^p \bar{z}^q + o(|z|^{n+1}).$$

Comme à la question 2, on utilise la formule de Green-Riemann dans K_ϵ pour écrire, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}} = \frac{1}{2i} \int_{K_\epsilon} \bar{\partial} \left[\frac{\varphi}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

En remarquant que si $0 \leq p + q \leq n + 1$,

$$\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \zeta^p \bar{\zeta}^q \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \neq 0$$

seulement si $p - q - n = 0$, c'est-à-dire si $p = q + n$, ce qui implique $q = 0$ et $p = n$ sous l'hypothèse $p + q = 2q + n \leq n + 1$, on voit que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(0) \times \int_{\gamma_{0,\epsilon}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2i\pi \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(0).$$

On a donc au final

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}} \right) = -\frac{1}{2i} \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n}(0).$$

Texte et corrigé - Examen 2012-2013

Nota. Le texte est composé d'un problème (en deux parties **I** et **II**) et de trois exercices. On pourra cependant ne choisir que deux exercices parmi les exercices **1**, **2**, **3** proposés (préciser alors lesquels dans la rédaction), l'exercice restant devenant dans ce cas optionnel et donc hors barème.

Problème

Nota. Si les questions du problème s'enchaînent, il est néanmoins possible d'admettre le résultat d'une question (qui est toujours explicité) et de passer à la question suivante si l'on est bloqué.

Soit $\mathbb{D} = D(0, 1)$ le disque unité ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe. Soit $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions continues de $\overline{\mathbb{D}}$ dans \mathbb{C} qui de plus holomorphes dans \mathbb{D} . Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on pose

$$\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}); \sup_{\substack{\theta, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \neq \varphi}} \left(\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{|\theta - \varphi|^\alpha} \right) = c_{f,\alpha} < \infty \right\}.$$

L'objectif du problème est de montrer que si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ est telle que

$$\sup_{\substack{z, w \in \overline{\mathbb{D}} \\ z \neq w}} \frac{||f(z)| - |f(w)||}{|z - w|^\alpha} = C_{f,\alpha} < +\infty,$$

alors $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

Partie I

On suppose dans toute cette première partie que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour tout z dans \mathbb{D} . Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on désigne aussi par $D_z \subset \mathbb{D}$ le disque ouvert de centre z et de rayon $1 - |z|$ et l'on pose

$$M_z(f) := \sup_{\zeta \in D_z} |f(\zeta)|.$$

I.1. Que peut-on dire de f si $|f(0)| = 1$? Montrer que, dans ce cas, f est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que toute fonction constante dans $\overline{\mathbb{D}}$ est dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Si $|f(0)| = 1$, la fonction $|f|$ (qui vérifie d'autre part $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$) présenterait un maximum local (d'ailleurs en fait global) dans \mathbb{D} . Comme la fonction f est holomorphe dans \mathbb{D} et que \mathbb{D} est connexe, le principe du maximum (version locale, Proposition 2.9 du cours) assure qu'alors f serait constante dans \mathbb{D} , donc

dans $\overline{\mathbb{D}}$ par continuité. Si tel est le cas, on a, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\sup_{\substack{\theta, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \neq \varphi}} \left(\frac{|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\varphi})|}{|\theta - \varphi|^\alpha} \right) = 0 < +\infty$$

et par conséquent $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est constante dans $\overline{\mathbb{D}}$, on a $c_{f,\alpha} = 0 < +\infty$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$, donc $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

I.2. On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette partie I que $|f(0)| < 1$ et que f n'est pas constante dans \mathbb{D} . Montrer que $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Montrer ensuite que l'application

$$\Phi : z \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}$$

est bien définie dans $\overline{\mathbb{D}}$ et que $\Phi \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$. Vérifier que Φ réalise une bijection de $\overline{\mathbb{D}}$ dans lui-même et que l'on a aussi $\Phi^{-1} \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$. Montrer que l'on a $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ si $g = \Phi \circ f$.

On sait déjà que $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ par hypothèses. Comme f n'est pas constante, $f(\mathbb{D})$ est ouvert (d'après le principe de l'application ouverte, version *light*, Corollaire 2.12 du cours), et par conséquent $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Comme $|f(0)| < 1$, le dénominateur $z \mapsto 1 - \overline{f(0)}z$ figurant dans l'expression de Φ ne s'annule pas dans $\overline{\mathbb{D}}$; son seul zéro éventuel est en effet $1/\overline{f(0)}$ (si $f(0)$ est non nul), qui est un point de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. La fonction Φ est donc bien définie dans $\overline{\mathbb{D}}$. Elle y est continue comme quotient de fonctions continues et est de plus holomorphe dans \mathbb{D} comme quotient de deux fonctions polynomiales, donc de fonctions holomorphes, la fonction au dénominateur ne s'annulant pas dans $\overline{\mathbb{D}}$ (donc *a fortiori* dans \mathbb{D}). On a donc $\Phi \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

On remarque que $|\Phi(e^{i\theta})| = 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ puisque

$$|e^{i\theta} - f(0)| = |e^{-i\theta} - \overline{f(0)}| = |1 - \overline{f(0)}e^{i\theta}| \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

On a donc $\Phi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ d'après le principe du maximum (version globale, Proposition 2.10 du cours). L'application Φ est donc surjective. On vérifie d'autre part que, pour tout $Z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\Phi(z) = Z \iff z = \frac{Z + f(0)}{1 + \overline{f(0)}Z},$$

ce qui prouve que Φ est aussi injective (donc bijective de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\overline{\mathbb{D}}$) et que l'application inverse Φ^{-1} est exactement du même type que Φ (on l'obtient juste en remplaçant $f(0)$ par $-f(0)$ dans l'expression de Φ). Il en résulte que $\Phi^{-1} \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}})$ comme Φ . Comme $\Phi(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$ et que $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ par hypothèses, on a bien $(\Phi \circ f)(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Mais $\Phi \circ f$ n'est pas constante dans $\overline{\mathbb{D}}$, sinon f le serait (par composition à gauche avec Φ^{-1}). D'après le principe de l'application ouverte, version *light* (Corollaire 2.12 du cours), l'image de $\Phi \circ f$ est ouverte. On a donc bien en fait $(\Phi \circ f)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

I.3. Prouver le lemme des zéros de Schwarz en utilisant seulement la version locale du principe du maximum et non (comme cela est fait dans le cours) la version globale : si $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe telle que $g(0) = 0$, alors

- d'une part $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $|g'(0)| \leq 1$;
- d'autre part, s'il existe $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|g(\zeta)| = |\zeta|$ ou si $|g'(0)| = 1$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $g(z) = e^{i\theta}z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Pour tout $\epsilon \in]0, 1[$, la fonction $z \mapsto g(z)/z$ est une fonction continue dans $\overline{D(0, 1 - \epsilon)} \setminus \{0\}$ et holomorphe dans $D(0, 1 - \epsilon) \setminus \{0\}$. Comme $g(0) = 0$, on a $g(z) = z + o(|z|)$ au voisinage de l'origine d'après le théorème d'analyticité (Théorème 2.6), ce qui implique que la singularité en $z = 0$ est fictive. Cette fonction $z \mapsto g(z)/z$ se prolonge donc continuellement en une fonction continue dans $\overline{D(0, 1 - \epsilon)}$ et holomorphe dans $D(0, 1 - \epsilon)$. D'après le principe du maximum, version locale (Proposition 2.9 du cours), que l'on demandait d'utiliser ici, le maximum de la fonction continue $z \mapsto |g(z)|/|z|$ dans $\overline{D(0, 1 - \epsilon)}$ est forcément atteint en un point du cercle de centre 0 et de rayon $1 - \epsilon$. Or, sur ce cercle, on a $|g(z)|/|z| \leq 1/(1 - \epsilon)$. En faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit que $|g(z)/z| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|(g(z)/z)_{z=0}| = |g'(0)| \leq 1$. S'il existe $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|g(\zeta)| = |\zeta|$ ou bien si $|g'(0)| = 1$, cela signifierait que la fonction holomorphe $z \in \mathbb{D} \mapsto g(z)/z$ ainsi prolongée est telle que son module admette un maximum global (donc local) en un point de \mathbb{D} . Comme \mathbb{D} est connexe, la fonction $z \mapsto g(z)/z$ serait constante dans \mathbb{D} , ce qui signifierait $g(z) = cz$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ (avec $c \in \mathbb{C}$ indépendant de z). Comme $|g(\zeta)| = |\zeta|$ pour un certain $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ou $|g'(0)| = 1$, on aurait bien $c = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

I.4. En appliquant le lemme de Schwarz à une fonction $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ convenable, déduire des résultats établis à la question **I.3** les inégalités

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2 \leq 2(1 - |f(0)|).$$

On considère la fonction $g : z \in \mathbb{D} \mapsto \Phi(f(z))$. Cette fonction est holomorphe dans \mathbb{D} comme composée de fonctions holomorphes et vérifie $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ d'après le résultat établi à la question **I.2**. On a donc, d'après le lemme de Schwarz, $|g'(0)| \leq 1$, soit, d'après la règle de Leibniz :

$$|\Phi'(f(0)) f'(0)| = |f'(0)| \times |\Phi'(f(0))| = |f'(0)| \times \frac{1}{1 - |f(0)|^2} \leq 1,$$

ce qui donne la première inégalité voulue. La seconde inégalité résulte simplement de ce que

$$2(1 - |f(0)|) - (1 - |f(0)|^2) = 1 - 2|f(0)| + |f(0)|^2 = (1 - |f(0)|)^2 \geq 0.$$

I.5. Soit z un nombre complexe arbitraire dans \mathbb{D} . Pourquoi a-t-on l'inégalité $M_z(f) > 0$? Montrer que pour tout $w \in \mathbb{D}$, on a $z + w(1 - |z|) \in D_z \subset \mathbb{D}$. En raisonnant ensuite comme à la question **I.4**, mais cette fois avec la fonction

$$f_z : w \in \mathbb{D} \mapsto \frac{f(z + w(1 - |z|))}{M_z(f)}$$

(on montrera que l'on peut bien le faire), montrer que l'on a le jeu d'inégalités :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad (1 - |z|) |f'(z)| \leq 2(M_z(f) - |f(z)|). \quad (*)$$

Si l'on avait $M_z(f) = 0$, la fonction f serait, du fait de la définition de $M_z(f)$, identiquement nulle dans le disque D_z , donc identiquement nulle dans \mathbb{D} d'après le principe des zéros isolés (Théorème 2.9 du cours). Or ceci est exclu par hypothèses, donc $M_z(f) > 0$.

Si $|w| < 1$, on a $z + w(1 - |z|) \in D_z$ par définition de D_z .

La fonction f_z (qui est donc bien, de par ce qui précède, définie dans \mathbb{D} comme fonction composée), est holomorphe dans \mathbb{D} (car la composée d'une fonction holomorphe et d'une fonction affine, donc holomorphe, l'est). D'autre part, d'après la règle de Leibniz :

$$f'_z(w) = (1 - |z|) \frac{f'(z + w(1 - |z|))}{M_z(f)} \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

D'après la définition de $M_z(f)$, on a

$$\forall w \in \mathbb{D}, f(z + w(1 - |z|)) \leq M_z(f).$$

Le principe de l'application ouverte assure, puisque la fonction f_z n'est pas constante dans \mathbb{D} (sinon f le serait du fait du principe des zéros isolés) que son image est ouverte. Comme cette image est incluse dans $\overline{\mathbb{D}}$, elle est incluse en fait dans \mathbb{D} . La fonction f_z est donc bien une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} . On peut appliquer à f_z le lemme de Schwarz comme on l'a appliqué à f à la question **I.4**. On a donc (cf. la seconde inégalité établie en **I.4**) :

$$|f'_z(0)| \leq 2(1 - |f_z(0)|).$$

Or $f'_z(0) = (1 - |z|) f'(z)/M_z(f)$ et $f_z(0) = f(z)/M_z(f)$, d'où l'inégalité voulue en multipliant les deux membres par $M_z(f) > 0$.

I.6. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ une fonction non constante. Montrer que le jeu d'inégalités (*) établi à la question **I.5** reste toujours valable pour cette fonction f .

Comme f est continue dans le compact $\overline{\mathbb{D}}$ et non identiquement nulle (car non constante), on a $\sup_{\overline{\mathbb{D}}} |f| = \max_{\overline{\mathbb{D}}} |f| = M \in]0, +\infty[$. En appliquant ce qui a été fait dans les questions **I.2** et **I.4** à la fonction $z \in \overline{\mathbb{D}} \mapsto f(z)/M$ (qui satisfait cette fois $f(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et même $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ d'après le principe de l'application ouverte), on obtient bien les inégalités voulues, divisées par M . Il suffit de les multiplier par M pour conclure.

Partie II

On considère dans cette partie une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, non constante dans \mathbb{D} , telle que

$$\sup_{\substack{z, w \in \overline{\mathbb{D}} \\ z \neq w}} \left(\frac{||f(z)| - |f(w)||}{|z - w|^\alpha} \right) = C_{f, \alpha} < +\infty. \quad (\dagger)$$

II.1. Soit $z \in \mathbb{D}$. Dédurre de l'inégalité (\dagger) une majoration de $|f|$ (en fonction de $|f(z)|$ et de $|z|$) sur le bord du disque D_z (de centre, on le rappelle, z , et de rayon $1 - |z|$). En déduire une majoration (en fonction de $|z|$) pour $M_z(f) - |f(z)|$ (citer précisément le résultat du cours invoqué à l'appui du raisonnement). Dédurre du jeu d'inégalités (*) établi aux questions **I.5** puis **I.6**, que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{D}, |f'(z)| \leq \frac{2C_{f, \alpha}}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}. \quad (**)$$

Si w est un point du bord de D_z , on a $|z - w| = 1 - |z|$. En utilisant l'inégalité (\dagger), on a

$$|f(w)| - |f(z)| \leq C_{f, \alpha} |w - z|^\alpha = C_{f, \alpha} (1 - |z|)^\alpha.$$

On a donc

$$\sup_{\partial D_z} |f| \leq |f(z)| + C_{f,\alpha} (1 - |z|)^\alpha.$$

On déduit maintenant du principe du maximum, version globale (Proposition 2.10 du cours) que

$$M_z(f) := \sup_{D_z} |f| \leq \sup_{\partial D_z} |f| \leq |f(z)| + C_{f,\alpha} (1 - |z|)^\alpha.$$

En reportant dans l'inégalité (*) établie en **I.5**, puis en **I.6**, il vient :

$$(1 - |z|) |f'(z)| \leq 2C_{f,\alpha} (1 - |z|)^\alpha.$$

Ceci est valable pour tout $z \in \mathbb{D}$. On en déduit le jeu d'inégalités (**) en divisant cette dernière inégalité par $1 - |z|$.

II.2. Soient $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Dédurre du théorème fondamental de l'analyse que l'on peut écrire :

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(r_1 e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho.$$

En utilisant les inégalités (**) établies à la question **II.1**, vérifier que la fonction

$$\rho \in [0, 1[\mapsto f'(\rho e^{i\theta})$$

est intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, 1[$ et que l'on a, pour tout $r \in]0, 1[$,

$$f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{[r, 1[} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho.$$

En déduire les inégalités

$$\forall r \in]0, 1[, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| \leq \frac{2C_{f,\alpha}}{\alpha} (1 - r)^\alpha.$$

La fonction

$$\rho \in]0, 1[\mapsto f(\rho e^{i\theta})$$

est de classe C^1 sur $]0, 1[$, de dérivée

$$t \in]0, 1[\mapsto e^{i\theta} f'(\rho e^{i\theta})$$

puisque la fonction f est dérivable au sens complexe en tout point de \mathbb{D} (car holomorphe) et de dérivée au sens complexe $z \in \mathbb{D} \mapsto f'(z)$. Le théorème fondamental de l'Analyse assure donc que

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(r_1 e^{i\theta}) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{d\rho} [f(\rho e^{i\theta})] d\rho = e^{i\theta} \int_{r_1}^{r_2} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho.$$

D'après les inégalités (**), on a

$$\forall \rho \in [0, 1[, \quad |f'(\rho e^{i\theta})| \leq \frac{2C_{f,\alpha}}{(1 - \rho)^{1-\alpha}}.$$

Or

$$\int_{]0, 1[} \frac{d\rho}{(1 - \rho)^{1-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} [(1 - \rho)^\alpha]_0^1 = \frac{1}{\alpha} < +\infty.$$

La fonction $\rho \in [0, 1[\mapsto f'(\rho e^{i\theta})$ est donc bien intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, 1[$ car dominée en module sur cet intervalle par une fonction positive intégrable. Si l'on fixe $r_1 = r \in]0, 1[$ et que l'on fait tendre r_2 vers 1 par valeurs (strictement)

inférieures, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique donc et assure

$$\lim_{r_2 \rightarrow 1^-} \int_r^{r_2} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho = \int_{[r,1[} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho.$$

Comme d'autre part f est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$, on déduit en passant à la limite dans

$$f(r_2 e^{i\theta}) - f(r e^{i\theta}) = \int_r^{r_2} \frac{d}{d\rho} [f(\rho e^{i\theta})] d\rho = e^{i\theta} \int_r^{r_2} f'(\rho, e^{i\theta}) d\rho$$

lorsque r_2 tend vers 1 par valeurs (strictement) inférieures que

$$f(e^{i\theta}) - f(r e^{i\theta}) = e^{i\theta} \int_{[r,1[} f'(\rho e^{i\theta}) d\rho.$$

En majorant enfin le module de l'intégrale d'une fonction par l'intégrale du module de cette fonction, il vient :

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta}) - f(r e^{i\theta})| &\leq 2C_{f,\alpha} \int_{[r,1[} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{1-\alpha}} = -\frac{2C_{f,\alpha}}{\alpha} [(1-\rho)^\alpha]_r^1 \\ &= \frac{2C_{f,\alpha}}{\alpha} (1-r)^\alpha. \end{aligned}$$

II.3. Soit $r \in]0, 1[$ et $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Vérifier

$$f(r e^{i\phi}) - f(r e^{i\theta}) = ir \int_\theta^\phi f'(r e^{it}) e^{it} dt.$$

En utilisant à nouveau le jeu d'inégalités (**) établi à la question II.1, en déduire :

$$|f(r e^{i\phi}) - f(r e^{i\theta})| \leq 2C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

On suppose, pour fixer les idées, $\theta \leq \phi$. On utilise, comme à la question précédente, le théorème fondamental de l'analyse, appliqué à la fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$:

$$t \in [\theta, \phi] \mapsto f(r e^{it})$$

(l'arc de cercle de centre 0 joignant les deux points $r e^{i\theta}$ et $r e^{i\phi}$ reste complètement dans \mathbb{D}), dont la dérivée est, puisque f est dérivable au sens complexe en tout point de \mathbb{D} :

$$t \in [\theta, \phi] \mapsto ir e^{it} f'(r e^{it}).$$

Le théorème fondamental de l'analyse donne la formule :

$$f(r e^{i\phi}) - f(r e^{i\theta}) = ir \int_\theta^\phi f'(r e^{it}) e^{it} dt. \quad (i)$$

On a

$$\left| r \int_\theta^\phi f'(\rho e^{it}) e^{it} dt \right| \leq |\phi - \theta| \times r \sup_{t \in [\theta, \phi]} |f'(r e^{it})| \leq 2r C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}} \quad (ii)$$

d'après le jeu d'inégalités (**). On en déduit, comme $r \leq 1$, l'inégalité demandée

$$|f(r e^{i\phi}) - f(r e^{i\theta})| \leq 2C_{f,\alpha} \frac{|\phi - \theta|}{(1-r)^{1-\alpha}}$$

en combinant (i) et (ii).

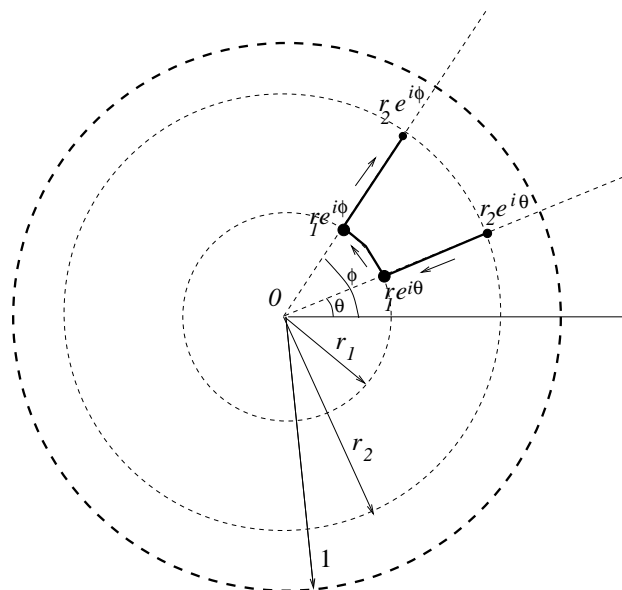


FIGURE D.1. Le chemin $\Gamma_{\theta, \phi, r_1, r_2}$

II.4. On suppose que $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ avec de plus $0 < \phi - \theta < 1$. Soient $0 < r_1 \leq r_2 < 1$ et $\Gamma_{\theta, \phi, r_1, r_2}$ le chemin continu (d'origine $r_2 e^{i\theta}$, d'extrémité $r_2 e^{i\phi}$) représenté en gras sur la figure ci-dessous. Que vaut l'intégrale curviligne

$$I(\theta, \phi, r_1, r_2) := \int_{\Gamma_{\theta, \phi, r_1, r_2}} f'(\zeta) d\zeta \quad ?$$

Calculer, pour $r \in]0, 1[$ fixé, la limite de $I(\theta, \phi, r, r_2)$ lorsque r_2 tend vers 1 par valeurs (strictement) inférieures. En utilisant les inégalités établies aux questions **II.2** et **II.3**, montrer que

$$\left| \lim_{r_2 \rightarrow 1_-} (I(\theta, \phi, r, r_2)) \right| \leq 2 C_{f, \alpha} (1 - r)^\alpha \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\phi - \theta}{1 - r} \right).$$

En choisissant $r \in]0, 1[$ convenable (en fonction de $\phi - \theta$), en déduire l'inégalité

$$|f(e^{i\phi}) - f(e^{i\theta})| \leq \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha} C_{f, \alpha} (\phi - \theta)^\alpha.$$

En déduire que $f \in \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

Comme la forme $f'(\zeta) d\zeta = df(\zeta)$ est exacte dans \mathbb{D} et dérive du potentiel f , on a

$$I(\theta, \phi, r_1, r_2) := \int_{\Gamma_{\theta, \phi, r_1, r_2}} f'(\zeta) d\zeta = f(r_2 e^{i\phi}) - f(r_2 e^{i\theta})$$

d'après la Proposition 1.3 du cours ($r_2 e^{i\phi}$ est l'extrémité du chemin, tandis que $r_2 e^{i\theta}$ en est l'origine). Lorsque $r_1 = r$ est fixé et que r_2 tend vers 1 par valeurs inférieures, on a donc, puisque f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$:

$$\lim_{r_2 \rightarrow 1_-} (I(\theta, \phi, r, r_2)) = f(e^{i\phi}) - f(e^{i\theta}).$$

On observe, en découpant le chemin $\Gamma_{\theta, \phi, r, r_2}$ ($r < r_2 < 1$) en ses trois tronçons et en utilisant pour les deux tronçons rectilignes les majorations établies à la question **II.2** et pour le tronçon curviligne le long du cercle de rayon r la majoration établie à la question **II.3**, que

$$|I(\theta, \phi, r, r_2)| \leq 2C_{f, \alpha}(1 - \rho)^\alpha \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\phi - \theta}{1 - r} \right).$$

L'inégalité

$$\left| \lim_{r_2 \rightarrow 1_-} (I(\theta, \phi, r, r_2)) \right| \leq 2C_{f, \alpha}(1 - \rho)^\alpha \left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\phi - \theta}{1 - r} \right).$$

s'en déduit par passage à la limite puisque le majorant à droite ne dépend pas de r_2 . On en déduit

$$|f(e^{i\phi}) - f(e^{i\theta})| \leq \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha} C_{f, \alpha}(\phi - \theta)^\alpha$$

si l'on choisit r tel que $1 - r = \phi - \theta$, n.i.e. $r = 1 - (\phi - \theta)$ qui est dans $]0, 1[$ puisque $0 < \phi - \theta < 1$. Si ϕ et θ sont des nombres pris dans $[0, 2\pi]$, distincts modulo 2π , mais supposés assez proches ($|e^{i\phi} - e^{i\theta}| < \epsilon_0$ avec ϵ_0 uniforme correspondant à une longueur strictement inférieure à 1 radian pour l'arc de cercle le plus court joignant ces deux points), on a bien

$$|e^{i\phi} - e^{i\theta}| \leq k_f |\phi - \theta|^\alpha$$

pour une certaine constante k_f positive. Quitte à remplacer k_f par

$$c_{f, \alpha} = \frac{k_f}{\min(1, \epsilon_0^\alpha)},$$

cette inégalité subsiste pour tout couple (θ, ϕ) tel que θ et ϕ ne soient pas congrus modulo 2π . La fonction f est donc bien dans $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$.

II.5. On suppose maintenant $\alpha \geq 1$ et l'on considère une fonction $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que la condition (\dagger) soit remplie. Vérifier que l'inégalité (**) établie à la question **II.1** reste valable. Que peut-on dire alors de f si $\alpha > 1$ (on pensera à utiliser le principe du maximum pour f') ? Si $\alpha = 1$, vérifier que f est Lipschitzienne dans $\overline{\mathbb{D}}$.

Seule la condition $\alpha > 0$ a été utilisée dans la question **II.1**. L'inégalité (***) reste donc valable. Si $\alpha > 1$, on trouve donc

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad |f'(z)| \leq 2C_{f, \alpha}(1 - |z|)^{\alpha-1}.$$

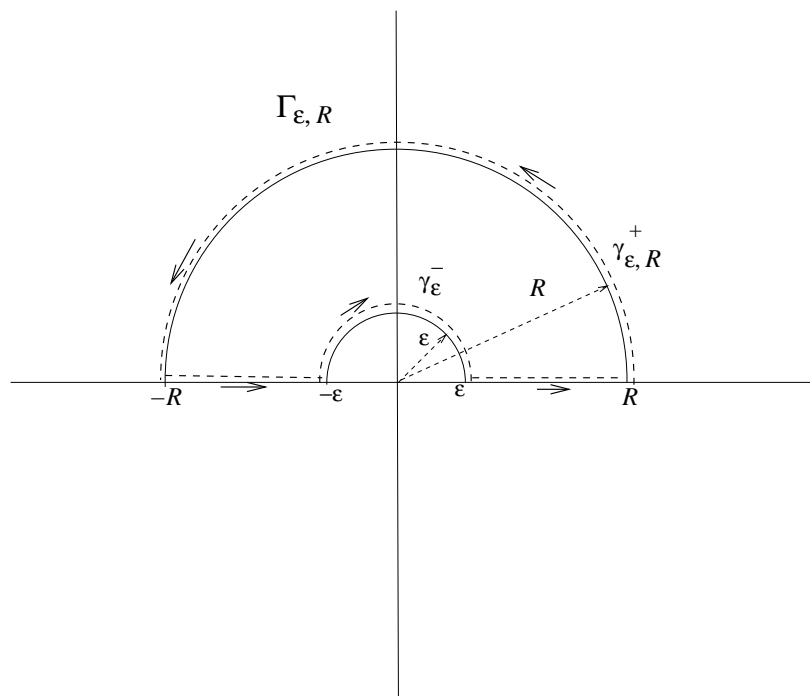
Ceci implique, puisque $\alpha - 1 > 0$ cette fois, que

$$\lim_{r \rightarrow 1_-} (\sup_{|\zeta|=r} |f'|) = 0.$$

D'après le principe du maximum (version globale, Proposition 2.10 du cours), on en déduit que f' est identiquement nulle dans \mathbb{D} , donc que f est constante. Si $\alpha = 1$, les inégalités (***) assurent qu' $|f'(z)| \leq 2C_{f, 1}$. Si z et w sont deux points de \mathbb{D} , on en déduit en utilisant le fait que \mathbb{D} soit convexe et l'inégalité des accroissements finis que

$$|f(z) - f(w)| \leq 2C_{f, 1} |z - w|.$$

Ceci reste vrai pour tout couple (z, w) dans $\overline{\mathbb{D}} \times \overline{\mathbb{D}}$ puisque f est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$. La fonction f est donc bien Lipschitzienne dans $\overline{\mathbb{D}}$.

FIGURE D.2. Le chemin $\Gamma_{\epsilon, R}$ **Exercice 1.**

1. Soient a et b deux nombres positifs ou nuls distincts. Montrer que la fonction

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ \infty & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

est une fonction méromorphe dans \mathbb{C} . Calculez ses pôles dans \mathbb{C} et les résidus en ces pôles de la forme $f(\zeta) d\zeta$. Pourquoi la singularité à l'infini de f est-elle essentielle? Que vaut le résidu à l'infini de la forme $f(\zeta) d\zeta$?

Cette fonction est par définition une fonction à valeurs dans la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Elle est holomorphe dans $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\infty)$ comme quotient de deux fonctions entières, à savoir la fonction

$$z \mapsto e^{iaz} - e^{ibz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k (a^k - b^k)}{k!} z^k$$

et la fonction polynomiale $z \mapsto z^2$. Le développement en série de Laurent en la (seule) singularité isolée $z = 0$ est :

$$f(z) = \frac{i(a-b)}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!} z^k.$$

La partie polaire de ce développement est

$$\text{Pol}_0[f] : z \mapsto \frac{i(a-b)}{z}.$$

Elle ne contient qu'un nombre fini de puissances de z^{-k} , $k \in \mathbb{N}^*$ (en fait, seulement une). La singularité est donc inessentielle et la fonction f (valant ∞ en 0) est bien continue (Proposition 3.1 du cours) au point $z = 0$ comme fonction à valeurs dans \mathbb{S}^2 . La fonction f est donc bien méromorphe dans \mathbb{C} , avec comme seul pôle $z = 0$. Le résidu au seul pôle $z = 0$ de la forme $f(\zeta) d\zeta$ vaut $i(a-b)$. Le développement de Laurent de la fonction f à l'infini s'écrit (voir le Corollaire 3.3 du cours) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k(b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!} z^k + \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{i(b-a)}{z}.$$

La partie polaire

$$\text{Pol}_\infty[f] : z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k(b^{k+2} - a^{k+2})}{(k+2)!} z^k$$

(elle correspond à la partie polaire du développement de Laurent en $w = 0$ de $w \mapsto 1/w$) contient une infinité de puissances de z . La singularité en l'infini est donc essentielle. Le résidu en l'infini de la forme $f(\zeta) d\zeta$ vaut par définition ici encore $i(b-a)$ (Définition 3.4 du cours).

2. Soient $0 < \epsilon < R < \infty$. On introduit le lacet continu $\Gamma_{\epsilon,R}$ représenté sur la figure D.2 ci-dessus (et parcouru une fois). On note $\gamma_{\epsilon,R}^+$ le tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ ayant pour support le demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan $\{\text{Im } z \geq 0\}$ (cf. la figure D.2). Vérifier

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} f(\zeta) d\zeta \right) = 0.$$

On majore cette intégrale curviligne par :

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \pi R \times \sup_{|\zeta|=R, \text{Im } \zeta \geq 0} |f(\zeta)|.$$

En remarquant que

$$|e^{ix\zeta}| = e^{-x \text{Im } \zeta}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{|\zeta|=R, \text{Im } \zeta \geq 0} |f(\zeta)| \leq \frac{2}{R^2}.$$

On a donc

$$\left| \int_{\gamma_{\epsilon,R}^+} f(\zeta) d\zeta \right| \leq 2\pi/R,$$

d'où le résultat puisque $2\pi/R$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

3. On rappelle (cf. la remarque 3.3 du cours) que la partie polaire $\text{Pol}_{z_0}[f]$ d'une fonction holomorphe près de $z_0 \in \mathbb{C}$ et présentant une singularité isolée en z_0 est la somme des termes impliquant une puissance négative $(z - z_0)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, figurant dans le développement de Laurent de f en z_0 , donc des termes de ce développement qui sont vraiment singuliers en z_0 . La fonction f s'écrit donc près de z_0 comme somme de la partie polaire $\text{Pol}_{z_0}[f]$ (holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$) et d'une fonction

holomorphe au voisinage de z_0 . Calculer la partie polaire $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \text{Pol}_0[f](z)$, puis l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \text{Pol}_0[f](\zeta) d\zeta$$

si γ_ϵ^- désigne le tronçon du lacet $\Gamma_{\epsilon,R}$ ayant pour support le demi-cercle de rayon ϵ situé dans le demi-plan $\{\text{Im } z \geq 0\}$ (cf. encore la figure D.2). Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_\epsilon^-} (f(\zeta) - \text{Pol}_0[f](\zeta)) d\zeta \right) = 0.$$

On a vu à la question 1 que

$$\text{Pol}_0[f] : z \mapsto \frac{i(a-b)}{z}.$$

Le calcul de l'intégrale curviligne demandé donne en paramétrant ($\zeta = e^{i\theta}$, θ variant de π à 0),

$$\int_{\gamma_\epsilon^-} \text{Pol}_0[f](\zeta) d\zeta = i(a-b) \times i \int_\pi^0 d\theta = \pi(a-b).$$

La fonction

$$\text{Reg}_0[f] : z \mapsto f(z) - \text{Pol}_0[f](z)$$

est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine (c'est même en fait ici une fonction entière). Elle est donc bornée en module (par exemple par C) au voisinage de l'origine. Comme

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon^-} \text{Reg}_0[f](\zeta) d\zeta \right| \leq C\pi\epsilon,$$

pour ϵ assez petit, on a bien

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_\epsilon^-} (f(\zeta) - \text{Pol}_0[f](\zeta)) d\zeta \right) = 0.$$

4. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx$$

est absolument convergente (au sens de Lebesgue) et calculer sa valeur.

Au voisinage de l'infini, l'absolue intégrabilité de l'intégrale est assurée par le fait que la fonction sous l'intégrale est majorée en valeur absolue par $2/x^2$ et le critère d'intégrabilité de Riemann. Au voisinage de 0, un développement limité du numérateur de l'intégrand donne

$$\cos(ax) - \cos(bx) = \frac{a^2 - b^2}{2} x^2 + o(x^2).$$

La fonction sous l'intégrale est donc bornée en valeur absolue au voisinage de 0. Cette fonction est donc bien intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

La formule de résidus (version analytique, Théorème 3.8 du cours) assure que, pour tout $0 < \epsilon < R < +\infty$,

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(\zeta) d\zeta = 0$$

puisque aucun pôle de la fonction f n'est enserré par le lacet continu $\Gamma_{\epsilon, R}$. La contribution à l'intégrale curviligne des deux tronçons du lacet situés sur l'axe réel est :

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(t) dt + \int_{\epsilon}^R f(t) dt = 2 \int_{\epsilon}^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx.$$

Si R tend vers $+\infty$ et ϵ tend vers 0, cette contribution tend (grâce par exemple au théorème de convergence dominée de Lebesgue) vers $2I$, où I est l'intégrale que l'on demande de calculer. Compte tenu de ce qui se passe pour les contributions à l'intégrale curviligne des deux tronçons restants (les deux demi-cercles de rayons respectifs ϵ et R) lorsque R tend vers l'infini et ϵ tend vers 0 (voir le résultat des questions **1** et **2**), on a au final, en faisant tendre R vers l'infini et ϵ vers 0 dans la formule

$$\int_{\Gamma_{\epsilon, R}} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

que

$$2I + \pi(a - b) = 0,$$

soit

$$I = \frac{\pi(b - a)}{2}.$$

On pourra vérifier ce résultat avec **Maple** :

```
> g:= x -> (cos(abs(a)*x) - cos(abs(b)*x))/x^2:
> int(g(x), x=0..infinity);
```

$$\frac{1}{2} \pi |b| - \frac{1}{2} \pi |a|$$

Exercice 2. Soit E la bande verticale ouverte

$$E := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; 0 < x < 1\}$$

du plan complexe et ∂E sa frontière, soit $\partial E = \{i\mathbb{R}\} \cup \{1 + i\mathbb{R}\}$.

1. Montrer que la fonction

$$h : z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(-i \exp(i\pi z))$$

est une fonction entière, bornée en module par une constante que l'on précisera sur ∂E , mais pourtant non bornée en module dans E (on pensera à étudier le comportement de cette fonction sur la droite verticale $1/2 + i\mathbb{R}$, incluse dans E).

La fonction h une fonction entière comme composée de fonctions entières (l'exponentielle étant une fonction entière). Si $z = iy$, $\exp(i\pi z) = \exp(-\pi y)$ est un nombre réel. La fonction h est donc de module constant égal à 1 sur $i\mathbb{R}$. Si $z = 1 + iy$, on a $\exp(i\pi z) = -e^{-\pi y} \in \mathbb{R}$ et la fonction h est encore de module 1 sur $1 + i\mathbb{R}$. La fonction h est donc bornée en module par 1 (elle est même en fait de module 1) sur les deux droites dont l'union forme ∂E . En revanche, si $z = 1/2 + iy$, on a $\exp(i\pi z) = \exp(i\pi/2 - \pi y) = i \exp(-\pi y)$ et donc $|h(z)| = \exp(\exp(-\pi y))$. Cette fonction croît donc doublement exponentiellement vers l'infini si z tend vers $1/2 - i\infty$ le long de la droite $1/2 + i\mathbb{R}$. La fonction h est donc non bornée en module dans E .

On se donne à partir de maintenant une fonction $f : \overline{E} \rightarrow \mathbb{C}$, continue dans \overline{E} , holomorphe dans E , bornée en module par K sur \overline{E} et par M sur ∂E . On se propose de vérifier qu'alors $|f| \leq M$ dans \overline{E} .

2. On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \bar{E} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$\forall z \in \bar{E}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(z) = f(z) \exp(z^2/n).$$

Vérifier les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \bar{E}, \quad |f_n(z)| \leq K \exp\left(\frac{1-y^2}{n}\right).$$

Si $z = x + iy$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Si $z \in \bar{E}$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\exp(z^2/n)| = \exp(-\operatorname{Re}(z^2)/n) = \exp((x^2 - y^2)/n) \leq \exp((1 - y^2)/n)$. En combinant avec $|f| \leq K$ dans \bar{E} , on a bien l'inégalité demandée.

3. En déduire qu'il existe, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre strictement positif Y_n tel que :

$$\forall z = x + iy \in \bar{E} \text{ tel que } |y| \geq Y_n, \quad |f_n(z)| \leq M \exp(1/n). \quad (\star)$$

Comme

$$\lim_{Y \rightarrow \pm\infty} K \exp(-Y^2/n) = 0,$$

il existe un seuil $Y_n > 0$ tel que $|y| \geq Y_n$ implique $K \exp(-y^2/n) \leq M$. Si $z = x + iy \in \bar{E}$ est tel que $|y| \geq Y_n$, on a donc, reprenant l'inégalité établie à la question **2**,

$$|f_n(z)| \leq K \exp\left(\frac{1-y^2}{n}\right) \leq K \exp\left(\frac{1-Y_n^2}{n}\right) \leq M e^{1/n}.$$

4. Soit Δ_n le rectangle fermé $[0, 1] \times [-Y_n, Y_n]$ du plan complexe. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sup_{\Delta_n} |f_n| \leq M \exp(1/n).$$

En combinant avec le résultat (\star) établi à la question **3**, montrer que $|f_n| \leq M e^{1/n}$ dans \bar{E} . En déduire :

$$\forall z \in \bar{E}, \quad |f(z)| \leq M.$$

Sur le bord du rectangle Δ_n , la fonction f_n est bornée par $M e^{1/n}$. C'est vrai sur les bords horizontaux du fait du résultat établi à la question **3**. C'est vrai sur les bords verticaux puisque $|f| \leq M$ sur ∂E et que $|\exp(z^2/n)| = \exp((1-y^2)/n) \leq \exp(1/n)$ sur ∂E . D'après le principe du maximum, version globale (Proposition 2.10 du cours), on a donc $|f_n| \leq M e^{1/n}$ dans Δ_n . Comme $|f_n(z)| \leq M e^{1/n}$ dans $\bar{E} \setminus \Delta_n$ d'après le choix de Y_n (question **3**, inégalité (\star)), on a bien en fait $|f_n| \leq M e^{1/n}$ dans \bar{E} . La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f uniformément sur tout compact de E . Pour un point z fixé dans E , on a donc $f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z)$ et par conséquent $|f(z)| \leq M$ puisque $|f_n(z)| \leq M e^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (d'après ce qui précède) et que $e^{1/n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. Soit $z \mapsto \log(z)$ la fonction définie dans l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{i\mathbb{R}^-\} = \mathbb{C} \setminus \{-iy; y \geq 0\}$ par

$$f(z) = \log z = \log |z| + i \arg_{]-\pi/2, 3\pi/2[}(z) \quad \forall z \in U.$$

1. Vérifier que f est holomorphe dans U ; que vaut f' ? (on utilisera l'expression de l'opérateur de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, ainsi que celle de son

conjugué, cf. l'exemple 1.3 du cours). Calculer $\log(iy)$ pour $y > 0$ et $\log(x)$, $\log(-x)$ pour $x > 0$.

En coordonnées polaires, la détermination de l'argument θ étant prise entre $-\pi/2$ et $3\pi/2$, la fonction \log s'exprime en polaire comme $\log z = \log r + i\theta$. Comme l'opérateur de Cauchy-Riemann s'écrit en coordonnées polaires

$$e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

(exemple 1.3 du cours), on vérifie que $(\partial/\partial\bar{z})[\log z] \equiv 0$ dans U . La fonction \log est donc holomorphe dans U . Comme d'autre part, l'opérateur $\partial/\partial z$ s'exprime en polaire comme le conjugué du précédent, soit

$$e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

un calcul simple sur \log exprimée en polaire sous la forme $\log r + i\theta$ montre que $(\log z)'(z) = 1/z$ dans U .

On a $\log(iy) = \log y + i\pi/2$ pour tout $y > 0$ tandis que, pour $x > 0$, $\log x$ est le logarithme népérien usuel de x et que $\log(-x) = \log x + i\pi$.

2. Soit $b > 0$. Vérifiez que la fonction

$$f_b : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{\log z}{(z^2 + b^2)^2} & \text{si } z \neq ib \\ \infty & \text{si } z = ib \end{cases}$$

est méromorphe dans U . Quel est l'ordre de son pôle ib ? Calculer la dérivée dans U de la fonction holomorphe :

$$z \in U \mapsto \frac{\log z}{(z + ib)^2} = f_b(z)(z - ib)^2$$

et en déduire la valeur de $\text{Res}_{ib}[f_b(\zeta) d\zeta]$ (on pourra, malgré les avertissements prodigués en cours, utiliser ici quand même la formule de la remarque 3.7 du poly-copié).

Dans U privé de $\{ib\} = f_b^{-1}(\infty)$, la fonction f_b est holomorphe. Dans un voisinage épointé de ib , f_b se présente comme le quotient de deux fonctions holomorphes, ce qui entraîne que la singularité isolée en ib est fictive ou non essentielle. Elle n'est pas fictive, et c'est même un pôle d'ordre 2, puisque $\log(ib) = \log b + i\pi/2 \neq 0$ et que le dénominateur $(z^2 + b^2)^2 = (z + ib)^2(z - ib)^2$ s'annule à l'ordre 2 en ib . La fonction f_b , considérée comme fonction à valeurs dans la sphère de Riemann \mathbb{S}^2 , est donc bien continue au point ib . La fonction que l'on demande de dériver, et qui est en fait la fonction $z \mapsto f_b(z)(z - ib)^2$, se dérive dans U en

$$z \mapsto \frac{1}{z(z + ib)^2} - 2 \frac{\log z}{(z + ib)^3}.$$

La valeur en ib de cette fonction dérivée est égale au résidu en ib de la forme $f_b(\zeta) d\zeta$ d'après la formule « interdite » de la remarque 3.7 (ici $p = 2$). Ce résidu vaut

$$\text{Res}_{ib}[f(\zeta) d\zeta] = \frac{1}{4(ib)^3} - \frac{\log b + i\pi/2}{4(ib)^3} = \frac{1}{4b^3} \left(\frac{\pi}{2} + i(1 - \log b) \right).$$

3. Calculer, si $0 < \epsilon < b < R$, l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{\epsilon, R}} f_b(\zeta) d\zeta,$$

où $\Gamma_{\epsilon,R}$ désigne encore le lacet continu (parcouru une seule fois) figurant sur la figure D.2 de l'exercice 1.

D'après la formule des résidus (Théorème 3.8 du cours), cette intégrale vaut $2i\pi$ fois le résidu au seul pôle (en l'occurrence $z = ib$) de f_b enserré par le lacet de la forme $f_b(\zeta) d\zeta$, soit :

$$\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f_b(\zeta) d\zeta = \frac{i\pi}{2b^3} \left(\frac{\pi}{2} + i(1 - \log b) \right)$$

d'après le calcul fait à la question 2.

4. Montrer (on se réfère aux notations de la figure D.2) que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_R^+} f_b(\zeta) d\zeta \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_\epsilon^-} f_b(\zeta) d\zeta \right) = 0,$$

lorsque γ_R^+ correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon R et γ_ϵ^- correspond au tronçon du chemin $\Gamma_{\epsilon,R}$ le long du demi-cercle de rayon ϵ (cf. la figure 2).

Lorsque $R > b$ tend vers l'infini,

$$\left| \int_{\gamma_R^+} f_b(\zeta) d\zeta \right| \leq \pi R \sup_{|\zeta|=R, \operatorname{Im} \zeta \geq 0} |f_b(\zeta)| \leq \pi R \times \frac{\log R + \pi}{(R^2 - b^2)^2} = o(1).$$

Lorsque $0 < \epsilon < b$ tend vers 0,

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon^-} f_b(\zeta) d\zeta \right| \leq \pi \epsilon \sup_{|\zeta|=\epsilon, \operatorname{Im} \zeta \geq 0} |f_b(\zeta)| \leq \pi \epsilon \times \frac{|\log \epsilon| + \pi}{(b^2 - \epsilon^2)^2} = o(1).$$

5. Montrer que les deux intégrales

$$I := \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + b^2)^2} dx \quad , \quad J := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + b^2)^2}$$

sont toutes deux absolument convergentes au sens de Lebesgue. Dédurre des résultats établis aux questions 3 et 4 la valeur de $2I + i\pi J$. Donner les valeurs exactes de I et J .

Comme $b > 0$ et que \log est absolument intégrable au voisinage de 0, le seul problème pour la convergence absolue de ces deux intégrales est en l'infini. Il n'y en a pas pour la seconde à cause du critère de Riemann (car $4 > 1$) et pour la première à cause du fait que $\log x \leq x$ pour x grand et du critère de Riemann encore car $3 > 1$.

En faisant tendre ϵ vers 0 et R vers l'infini dans la formule établie à la question 3, on trouve, grâce au résultat établi à la question 4, que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\log |x| + i\pi}{(x^2 + b^2)^2} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{\log x}{(x^2 + b^2)^2} dx \right) = \frac{i\pi}{2b^3} \left(\frac{\pi}{2} + i(1 - \log b) \right).$$

On en déduit, en invoquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue (après avoir fait le changement de variables de x en $-x$ dans la première des deux intégrales), que

$$2I + i\pi J = \frac{i\pi}{2b^3} \left(\frac{\pi}{2} + i(1 - \log b) \right).$$

Il en résulte, en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$I = \frac{\pi(\log b - 1)}{4b^3} \quad , \quad J = \frac{\pi}{4b^3}.$$

On pourra pour s'en convaincre vérifier ces résultats avec par exemple Maple :

```
> f := x-> log(x)/(x^2 + (abs(b))^2):
> g := x-> 1/(x^2 + (abs(b))^2):
> int(f(x),x=0..infinity);
      Pi      Pi ln(|b|)
      ----- + -----
           3          3
      4 |b|      4 |b|
> int(g(x),x=0..infinity);
      Pi
      -----
           3
      4 |b|
```

Texte et corrigé du DS - 2013-2014

Si z est un nombre complexe et $r > 0$, on note dans tout le problème $D(z, r)$ le disque ouvert de centre z et de rayon r , $\overline{D(z, r)}$ le disque fermé de centre z et de rayon r , et $(\partial D(z, r))_+$ le chemin $t \in [0, 1] \mapsto z + r e^{2i\pi t}$.

Exercice 1. Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha > 0$ la 1-forme

$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{|z|^\alpha}$$

est-elle fermée dans \mathbb{C}^* ? Pour quelles valeurs de ce même paramètre α cette 1-forme est-elle exacte dans \mathbb{C}^* . Calculer

$$\int_{(\partial D(0,1))_+} \omega_1.$$

Exercice 2.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tel que $r \neq |x|$. Calculer

$$\int_{(\partial D(0,r))_+} \frac{d\zeta}{\zeta - x}$$

(discuter la valeur de cette intégrale curviligne suivant la valeur de x).

b) On suppose $r > 0$ et $r \neq 1$. En utilisant le résultat établi au a), calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{(\partial D(0,r))_+} \frac{d\zeta}{\zeta^3 - 1}.$$

c) Calculer la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_{(\partial D(0,1))_+} \frac{d\zeta}{6\zeta^2 - 5\zeta + 1}.$$

d) Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Montrer que l'intégrale curviligne

$$I(r) = \int_{\partial D(0,r)_+} \frac{d\zeta}{a\zeta^2 + b\zeta + c}$$

est nulle lorsque r est suffisamment grand (on précisera à partir de quelle valeur).

Exercice 3. Soit la fonction f définie dans $\mathbb{C} \setminus \{z; |z| = 1\}$ par

$$f(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\overline{D(0,1)}} \frac{d\xi \wedge d\eta}{\zeta + z} = \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Vérifier que

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z} & \text{lorsque } |z| < 1 \\ 1/z & \text{lorsque } |z| > 1. \end{cases}$$

Exercice 4.

a) Soit g une fonction continue sur le cercle $\{z; |z| = 1\}$, à valeurs dans \mathbb{C} . Vérifier la formule

$$\int_{(\partial D(0,1))_+} g(\zeta) d\zeta = - \int_{(\partial D(0,1))_+} \overline{\frac{g(\zeta)}{\zeta^2}} d\zeta.$$

b) On suppose maintenant que g est une fonction de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$. Soit $z_0 \in D(0,1)$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset D(0,1)$. Vérifier, pour tout $\epsilon \in]0, r/2[$, pour tout $z \in D(z_0, \epsilon/2)$, la formule

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{(\partial D(z_0, r))_+} g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2i\pi} \int_{(\partial D(0, \epsilon))_+} g(z + \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\{\epsilon \leq |\zeta - z_0| \leq r\}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi \wedge d\eta}{\zeta - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta). \end{aligned}$$

En déduire la formule

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\partial D(z_0, r))_+} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta - \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{\epsilon \leq |\zeta - z_0| \leq r\}} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi \wedge d\eta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

c) On conserve les hypothèses de la question b). Déduire des résultats établis aux deux questions précédentes la formule :

$$\overline{\frac{\partial g}{\partial z}(z_0)} = \frac{1}{2i\pi r^2} \int_{(\partial D(z_0, r))_+} \overline{g(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{\epsilon \leq |\zeta - z_0| \leq r\}} \overline{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)} \frac{d\xi \wedge d\eta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

d) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$. Exprimer en termes de r et de $f'(z_0)$ les deux intégrales

$$\int_{(\partial D(z_0, r))_+} \overline{f(\zeta)} d\zeta \quad \text{et} \quad \int_{\overline{D(z_0, r)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\xi \wedge d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta).$$

On pensera, pour transformer l'expression de la seconde intégrale, à utiliser la fonction $g : z \in \overline{D(0,1)} \mapsto (r^2 - |z - z_0|^2) f(z)$.

Texte et corrigé - Examen 2013-2014

Exercice I. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 2 \cos \theta}$$

en l'exprimant comme une intégrale curviligne.

D'après les formules d'Euler, on a $\cos \theta = (\zeta + \bar{\zeta})/2 = (\zeta + \zeta^{-1})/2$ si $\zeta := e^{i\theta}$. Compte tenu de ce que $d\zeta = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} d\theta = i\zeta d\theta$, l'intégrale à calculer s'exprime comme

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 2 \cos \theta} &= \frac{1}{i} \int_{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta}} \frac{d\zeta}{\zeta(5 + \zeta + \zeta^{-1})} \\ &= \frac{1}{i} \int_{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 5\zeta + 1} \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $X^2 + 5X + 1$ valent respectivement $\alpha = (-5 + \sqrt{21})/2$ et $\beta = (-5 - \sqrt{21})/2$. Seul le zéro α se trouve à l'intérieur du disque unité. D'après la formule des résidus, l'intégrale à calculer vaut

$$\frac{1}{i} \int_{\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 5\zeta + 1} = 2\pi \operatorname{Res}_\alpha \left(\frac{d\zeta}{(\zeta - \alpha)(\zeta - \beta)} \right) = \frac{2\pi}{\alpha - \beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{21}}.$$

Exercice II. Soit $\gamma_{\epsilon, R}$ le contour d'intégration décrit sur la figure F.1 ci-dessous.

II.1. Expliciter une détermination du logarithme (que l'on notera \log) holomorphe dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \{-it; t \geq 0\}$.

II.2. Calculer en utilisant la version analytique de la formule des résidus l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_{\epsilon, R}} \frac{\log \zeta}{(\zeta^2 + 4)^2} d\zeta.$$

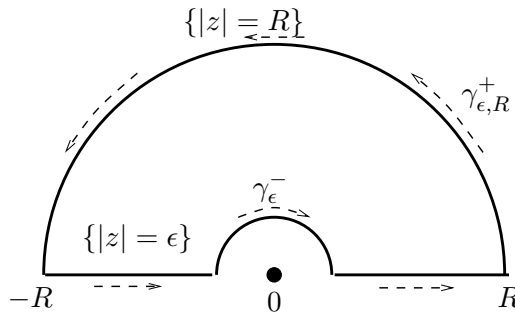


FIGURE F.1. Le chemin $\gamma_{\epsilon, R}$ à utiliser l'exercice II

II.3. En faisant tendre ϵ vers 0 et R vers $+\infty$, déduire du résultat établi à la question 2 la valeur des deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t^2 + 4)^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 4)^2}.$$

II.1. La détermination de l'argument à choisir ici est celle entre $-\pi/2$ et $3\pi/2$. La fonction \log qu'il convient de prendre est donc la détermination holomorphe du logarithme $\log z = \log |z| + i \arg_{]-\pi/2, 3\pi/2[}(z)$ (valable pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-it; t \geq 0\}$).

II.2. Le seul pôle enserré par le lacet $\gamma_{\epsilon, R}$ est le pôle $z = 2i$ (qui est double). Le résidu de la forme $(\log \zeta) d\zeta / (\zeta^2 + 4)^2 = (\log \zeta) d\zeta / ((\zeta + 2i)^2(\zeta - 2i)^2)$ en ce pôle double $z = 2i$ vaut d'après la formule du cours ($p = 2$) :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{2i} \left(\frac{\log \zeta d\zeta}{(\zeta + 2i)^2(\zeta - 2i)^2} \right) &= \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{\log \zeta}{(\zeta + 2i)^2} \right]_{\zeta=2i} \\ &= \left[\frac{1}{\zeta(\zeta + 2i)^2} - 2 \frac{\log \zeta}{(\zeta + 2i)^3} \right]_{\zeta=2i} = \frac{\pi}{64} - \frac{i}{32}(\log 2 - 1). \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{\gamma_{\epsilon, R}} \frac{\log \zeta}{(\zeta^2 + 4)^2} d\zeta = 2i\pi \left(\frac{\pi}{64} - \frac{i}{32}(\log 2 - 1) \right)$$

d'après la formule des résidus.

II.3. Comme $\sup_{|\zeta|=R} |\log \zeta / (\zeta^2 + 4)^2| = O(\log R / (R^2 - 4)^2) = o(R^{-3})$ lorsque R tend vers $+\infty$, la contribution à l'intégrale curviligne du chemin $\gamma_{\epsilon, R}^+$ (de support le demi-cercle de rayon R situé dans le demi-plan $\{\text{Im } z \geq 0\}$) tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. De même, comme $\sup_{|\zeta|=\epsilon} |\log \zeta / (\zeta^2 + 4)^2| = O(|\log \epsilon|) = o(1/\epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0, la contribution à l'intégrale curviligne du chemin γ_{ϵ}^- (de support le demi-cercle de rayon ϵ situé dans le demi-plan $\{\text{Im } z \geq 0\}$) tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0 par valeurs supérieures. Si l'on fait tendre R vers l'infini et ϵ vers 0^+ , on constate donc (en invoquant par exemple le théorème de convergence dominée de Lebesgue) que l'intégrale curviligne introduite à la question **II.2** tend vers

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t^2 + 4)^2} dt + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 4)^2}.$$

En égalant les parties imaginaires (avec le résultat établi à la question **II.2**), on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t^2 + 4)^2} dt = \frac{\pi}{32}(\log 2 - 1).$$

En égalant les parties réelles, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{32}.$$

Ces deux résultats peuvent être aisément vérifiés par exemple grâce à Maple :

```
> int(log (t)/(t^2+4)^2,t=0..infinity);
      1          1
     -- Pi ln(2) - -- Pi
      32          32
> int(1/(t^2+4)^2,t=0..infinity);
```


-- Pi

32

Problème A.

A.1. Soit $M > 0$ et $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) \neq 0$ et $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

a) Justifier le fait que, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f est holomorphe au voisinage du disque fermé $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, f n'a qu'au plus un nombre fini de zéros dans le disque fermé $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$.

c) En déduire que le nombre de zéros de f dans $D(0, 1)$, comptés avec leurs multiplicités, est soit nul, soit fini non nul, soit dénombrable infini.

a) Comme le disque fermé $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$ ($n \geq 2$) est inclus dans le disque ouvert $D(0, 1)$ dans lequel f est supposée holomorphe, f est bien holomorphe au voisinage du disque fermé $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$.

b) Si f avait une infinité de zéros dans le compact $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$, l'ensemble de ces zéros aurait un point d'accumulation α dans ce compact (d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß). Ce point d'accumulation α serait alors un zéro non isolé de f dans $D(0, 1)$. Ceci est impossible (d'après le principe des zéros isolés) car $f \neq 0$ dans l'ouvert connexe $D(0, 1)$ ($f(0) \neq 0$).

c) Pour tout $n \geq 2$, le nombre de zéros de f dans $\{|\zeta| \leq 1 - 1/n\}$ est au plus fini. Comme une union dénombrable d'ensembles de cardinal au plus fini est de cardinal au plus dénombrable, le nombre de zéros de f dans $D(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} D(0, 1 - 1/n)$ est au plus fini ou dénombrable (à moins que f ne s'annule pas dans $D(0, 1)$).

A.2. On suppose que f a une infinité dénombrable de zéros (répétés si nécessaire avec leur multiplicité) dans $D(0, 1)$. On suppose ces zéros $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, organisés suivant l'ordre croissant de leurs modules (les zéros étant répétés autant de fois que nécessaire si multiples) : $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé et $|a_N| < r < 1$. On introduit les deux fonctions méromorphes dans $D(0, 1/r)$:

$$B_N(z) := \prod_{j=1}^N \frac{(a_j/r) - z}{1 - (\bar{a}_j/r)z} \quad \text{et} \quad g_{N,r}(z) := \frac{f(rz)}{B_N(z)}.$$

a) Montrer que B_N n'a aucun pôle sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$ et est holomorphe dans le disque $D(0, r/|a_N|)$.

b) Montrer les singularités de $g_{N,r}$ dans $D(0, 1/r)$ sont toutes fictives et que par conséquent $g_{N,r}$ définit une fonction holomorphe dans ce disque.

c) Vérifier que pour tout nombre complexe ζ de module 1, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_j - r\zeta| = |r - \bar{a}_j\zeta|$; en déduire que l'on a aussi $|B_N(\zeta)| = 1$.

d) Montrer que $|g_{N,r}(z)| < M$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

e) Déduire du résultat établi à la question d) que

$$r^N \frac{|f(0)|}{M} < \prod_{j=1}^N |a_j|.$$

En utilisant l'inégalité $\log(1-t) \leq -t$ pour tout $t \in [0, 1[$ (que l'on justifiera), en déduire l'inégalité

$$\sum_{j=1}^N (1 - |a_j|) \leq \log M - \log |f(0)| - N \log r.$$

f) Déduire du résultat établi à la question e) en faisant varier convenablement N et r que $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) < +\infty$.

a) Pour tout $j = 1, \dots, N$, on a $0 < |a_j| \leq |a_N| < r$, donc $r/|a_j| > 1$. La fonction méromorphe B_N (restriction à $D(0, 1/r)$ d'une fonction rationnelle) n'a donc aucun pôle sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$. Les pôles de B_N dans $D(0, 1/r)$ sont les points r/\bar{a}_j pour $j = 1, \dots, N$. Ces pôles sont tous de module supérieur ou égal à $r/|a_N|$, ce qui implique que B_N est bien holomorphe dans le disque ouvert $D(0, r/|a_N|)$.

b) Les singularités de $g_{N,r}$ se trouvent aux zéros a_j/r ($j = 1, \dots, N$) de B_N . Or en un tel point a_{j_0}/r ($j_0 = 1, \dots, N$), la fonction $z \mapsto f(rz)$ s'annule avec exactement la multiplicité de a_{j_0} comme zéro de f , c'est-à-dire le nombre de fois où a_{j_0}/r apparaît dans la liste $\{a_j/r; j = 1, \dots, N\}$. La singularité de $g_{N,r}$ en a_{j_0}/r est donc fictive. Comme toutes les singularités de $g_{N,r}$ dans $D(0, 1/r)$ sont fictives, la fonction méromorphe $g_{N,r}$ est en fait holomorphe dans $D(0, 1/r)$.

c) Si $\zeta = e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$), on a $|a_j - r\zeta| = |a_j e^{-i\theta} - r| = |\bar{a}_j e^{i\theta} - r| = |\bar{a}_j \zeta - r|$. Si $|\zeta| = 1$, les N facteurs de $B_N(\zeta)$ sont donc de module 1 (on multiplie numérateur et dénominateur de chaque facteur par r); on a donc $|B_N(\zeta)| = 1$ si $|\zeta| = 1$.

d) On applique le principe du maximum dans sa version globale. On a

$$\max_{\{|\zeta|=1\}} |g_{N,r}(\zeta)| \leq \max_{\{|\zeta|=1\}} |f(r\zeta)| \leq M.$$

Comme $g_{N,r}$ n'est pas constante dans $D(0, 1/r)$ (puisque $\zeta \mapsto f(r\zeta)$ a une infinité de zéros tandis que B_N n'en a qu'un nombre fini), $|g_{N,r}|$ ne peut atteindre son maximum dans $\{|\zeta| \leq 1/r\}$ en aucun point du disque ouvert $D(0, 1/r)$. On a donc $|g_{N,r}| < M$ dans $D(0, 1/r)$.

e) On a $|g_{N,r}(0)| < M$ d'après le résultat établi à la question d), d'où l'inégalité demandée, obtenue juste en explicitant $|f(0)| < M |B_N(0)|$. Comme $\log(1-t) = -\int_0^t d\tau/(1-\tau) = -\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}/(k+1)$ pour tout $t \in [0, 1[$, on a $\log(1-t) \leq -t$ pour tout $t \in [0, 1[$. En prenant le logarithme de la première inégalité établie, on trouve :

$$N \log r + \log |f(0)| - \log M \leq \sum_{j=1}^N \log |a_j| \leq -\sum_{j=1}^N (1 - |a_j|)$$

(on prend $t = 1 - |a_j|$, $j = 1, \dots, N$, dans l'inégalité $\log(1-t) \leq -t$). On obtient donc bien l'inégalité voulue.

f) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on choisit $r = r_N$ tel que $|a_N| < r_N < 1$. On peut de plus choisir r_N assez proche de 1 de manière à ce que $N \log r_N$ tende vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. On a

$$\sum_{j=1}^N (1 - |a_j|) \leq \log M - \log |f(0)| - N \log r_N.$$

En passant à la limite lorsque N tend vers l'infini, on obtient donc

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) \leq \log M - \log |f(0)| < +\infty.$$

A.3. Soit F une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$, non identiquement nulle et bornée en module dans ce demi-plan, et s'annulant (au moins) à tous les points de \mathbb{N}^* .

a) Montrer que l'homographie $h : z \in D(0, 1) \rightarrow (1+z)/(1-z)$ réalise une bijection d'application inverse holomorphe entre $D(0, 1)$ et le demi-plan $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$.

b) Montrer que $F \circ h$ définit une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$, non identiquement nulle et bornée en module dans ce disque, s'annulant (au moins) en tous les points $(n-1)/(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

c) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, non identiquement nulle, bornée en module et ne s'annulant pas en 0, de manière à ce que l'on ait l'identité $(F \circ h)(z) = z^p f(z)$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

d) Établir, pour la fonction f (dont on considèrera ici l'ensemble des zéros) une contradiction avec l'assertion établie au terme de la partie **A.2**. Que peut-on donc dire d'une fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$, bornée en module dans ce demi-plan et s'annulant (au moins) en tous les points de \mathbb{N}^* ?

a) L'homographie h (holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$) réalise une bijection de la sphère de Riemann \mathbb{S} dans elle-même si l'on convient que $h(\infty) = -1$ et $h(1) = \infty$. L'application réciproque (qui est, elle, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$) est donnée par

$$Z = \frac{1+z}{1-z} \iff z = h^{-1}(Z) = \frac{Z-1}{Z+1}$$

avec $h^{-1}(-1) = \infty$ et $h^{-1}(\infty) = 1$. Si l'on prend $z = e^{i\theta} \neq 1$, on a $h(z) = i \cos(\theta/2) / \sin(\theta/2) \in i\mathbb{R}$; de plus, le fait que la fonction cotan réalise une bijection entre $] -\pi/2, \pi/2[$ et \mathbb{R} implique que h réalise une bijection entre $\{|\zeta| = 1\} \setminus \{1\}$ et $i\mathbb{R}$. Comme l'image d'un ouvert connexe par une application holomorphe est un ouvert connexe, l'image par h du disque unité ouvert $D(0, 1)$ est l'un des deux demi-plans ouverts de frontière l'axe imaginaire pur $i\mathbb{R}$. Comme $h(0) = 1$, $h(D(0, 1)) = \{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$. L'application h réalise donc une bijection holomorphe (d'application inverse aussi holomorphe, h et son inverse sont en fait des homographies) entre $D(0, 1)$ et $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$.

b) L'application $F \circ h$ est holomorphe dans $D(0, 1)$ comme composée d'applications holomorphes; la composition des applications est ici bien définie car $h(D(0, 1)) = \{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$ d'après le a) et que F est supposée holomorphe dans ce demi-plan. Comme F est bornée en module dans $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$, il en est de même pour $F \circ h$ dans $D(0, 1)$. Comme F s'annule (au moins) en tous les points $n \in \mathbb{N}^*$, $F \circ h$ s'annule (au moins) en tous les points $h^{-1}(n) = (n-1)/(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

c) La fonction $F \circ h$ n'est pas identiquement nulle dans $D(0, 1)$ (sinon, F le serait dans $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$, ce qui est exclu par hypothèses). L'origine est donc soit un point où $F \circ h$ ne s'annule pas, soit un zéro isolé de $F \circ h$ de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$. Dans les deux cas, on a $(F \circ h)(z) = z^p f(z)$, où f est une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$ et ne s'annulant pas en $z = 0$. D'après le lemme des zéros de Schwarz, on a $|f(z)| \leq \sup_{|\zeta|=1} |F \circ h| = \sup_{\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}} |F|$ pour tout $z \in D(0, 1)$; la fonction f est donc bien bornée en module dans $D(0, 1)$ et ne s'annule pas en $z = 0$.

d) Comme la fonction f s'annule (au moins) en tous les points $(n-1)/(n+1)$

($n \in \mathbb{N}^*$) et satisfait toutes les hypothèses de la question **A.2**, on a, d'après le résultat établi au terme de cette question **A.2** (item **f**) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} < +\infty,$$

ce qui contredit le critère de Riemann relatif à la divergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-\alpha}$ lorsque $\alpha \leq 1$ (en particulier, comme ici, lorsque $\alpha = 1$). Une fonction F , holomorphe dans $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$, bornée en module dans ce demi-plan et s'annulant en (au moins) tous les points $n \in \mathbb{N}^*$ ne saurait par conséquent être autre que la fonction identiquement nulle dans ce demi-plan $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$.

Problème B.

Soient $a < b$ deux réels et U la bande verticale $\{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Re} z < b\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U se prolongeant en une fonction continue dans $K = \bar{U}$ (notée aussi f). On suppose que la fonction ainsi prolongée est bornée en module dans \bar{U} par une constante M et on note, pour tout $x \in [a, b]$, $M_x := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)| \leq M$.

B.1. Peut-on affirmer que $|f| \leq \sup(M_a, M_b)$ dans \bar{U} ? Étayer la réponse avec soit une preuve, soit un contre-exemple.

Si $z = x + iy$, on a $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Par conséquent (puisque f est supposée bornée en module dans \bar{U}), on a que pour tout $\epsilon > 0$ fixé, la fonction $\zeta \mapsto f(\zeta) e^{\epsilon \zeta^2}$ tend vers 0 uniformément dans la bande fermée \bar{U} (lorsque $|\operatorname{Im} z|$ tend vers l'infini). Le principe du maximum (appliqué au rectangle ouvert $U \cap \{|\operatorname{Im} z| < T\}$ avec $T > |\operatorname{Im} z|$ suffisamment grand, la fonction en jeu étant la fonction $\zeta \mapsto f(\zeta) e^{\epsilon \zeta^2}$) assure que, pour z fixé dans U , on a

$$|f(z) e^{\epsilon z^2}| \leq \sup(M_a e^{\epsilon a^2}, M_b e^{\epsilon b^2}).$$

Si l'on fait tendre ϵ vers 0 (z étant fixé), on trouve bien $|f(z)| \leq \sup(M_a, M_b)$. La réponse à la question est donc oui.

B.2. On suppose $M_a = M_b = 1$ et l'on pose, pour tout $\epsilon \in]0, 1/(b-a)[$:

$$\forall z \in \bar{U}, \quad g_\epsilon(z) := \frac{1}{1 + \epsilon(z-a)}.$$

a) Montrer que g_ϵ est bien définie et continue dans la bande fermée \bar{U} et holomorphe dans U , puis que $|fg_\epsilon| \leq 1$ sur ∂U .

b) Montrer que

$$|f(z)g_\epsilon(z)| \leq \frac{M}{\epsilon |\operatorname{Im} z|} \quad \forall z \in \bar{U}, \quad \forall \epsilon \in]0, 1/(b-a)[.$$

c) Grâce au principe du maximum dans les rectangles $\bar{U} \cap \{|\operatorname{Im} z| \leq M/\epsilon\}$ ($\epsilon \in]0, 1/(b-a)[$), montrer que $|fg_\epsilon| \leq 1$ dans \bar{U} pour tout $\epsilon \in]0, 1/(b-a)[$. En déduire $|f| \leq 1$ dans \bar{U} .

a) La fonction g_ϵ est bien définie et continue dans \bar{U} car il s'agit d'une fonction rationnelle dont l'unique pôle $z = a - 1/\epsilon$ est hors de \bar{U} (car de partie réelle strictement inférieure à celle de a)¹. De plus g_ϵ est holomorphe dans U . Si $z = a + iy$ ou si $z = b + iy$, la partie réelle de $1 + \epsilon(z-a)$ est au moins égale à 1, donc $|g_\epsilon(z)| \leq 1$

1. En fait, la clause sur ϵ ($0 < \epsilon < 1/(b-a)$) n'est pas utile ici; seule la condition $\epsilon > 0$ suffit. L'énoncé aurait donc pu être ici allégé et on aurait pu se contenter de prendre $\epsilon > 0$.

pour de tels z . Comme $M_a = M_b = 1$, on a donc $|fg_\epsilon| \leq 1$ sur ∂U .

b) La partie imaginaire de $1 + \epsilon(z - a)$ est de valeur absolue supérieure ou égale à $\epsilon|\operatorname{Im} z|$ pour tout $z \in \bar{U}$. On a donc $|g_\epsilon(z)| \leq 1/(\epsilon|\operatorname{Im} z|)$ pour tout $z \in \bar{U}$ (ceci est encore vrai si $\operatorname{Im} z = 0$ car $|g_\epsilon(z)| < +\infty$ dans ce cas).

c) Sur le bord du rectangle fermé $\bar{U} \cap \{|\operatorname{Im} z| \leq M/\epsilon\}$, on a $|fg_\epsilon| \leq 1$: ceci est en effet vrai sur les bords verticaux de ce rectangle (d'après le résultat établi à la question **a**) ainsi que sur les deux bords horizontaux (d'après le résultat établi à la question **b**). Il résulte du principe du maximum que $|fg_\epsilon| \leq 1$ dans $\bar{U} \cap \{|\operatorname{Im} z| \leq M/\epsilon\}$. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit, en supposant z fixé et en faisant tendre ensuite ϵ vers 0, que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \bar{U}$.

B.3. On suppose maintenant que $M_a > 0$ et $M_b > 0$ et on introduit la fonction entière

$$E_{a,b} : z \in \mathbb{C} \mapsto \exp\left(\frac{b-z}{b-a} \log M_a + \frac{z-a}{b-a} \log M_b\right).$$

En appliquant le résultat de la question **B.2** à $z \in U \mapsto f(z)/E_{a,b}(z)$ (on vérifiera qu'il s'applique bien à cette fonction), vérifier :

$$\forall x \in [a, b], \quad M_x \leq M_a^{\frac{b-x}{b-a}} M_b^{\frac{x-a}{b-a}}.$$

On vérifie que $|E_{a,b}| \leq \sup(M_a, M_b)$ et que $|1/E_{a,b}| \leq \sup(1/M_a, 1/M_b)$ dans \bar{U} (le module d'une exponentielle étant l'exponentielle de sa partie réelle). La fonction $z \in U \mapsto f(z)/E_{a,b}(z)$ est donc bien (comme f) bornée en module dans \bar{U} . Pour cette fonction, on vérifie que $M_a = 1$ et $M_b = 1$. On a donc, en appliquant le résultat établi à la question **B.2**, $|f| \leq |E_{a,b}|$ dans \bar{U} . En prenant $z = x + iy$ avec $x \in [a, b]$ et $y \in \mathbb{R}$, on voit que $|E_{a,b}(x + iy)| \leq M_a^{(b-x)/(b-a)} \times M_b^{(x-a)/(b-a)}$, d'où la majoration de M_x demandée.

B.4. On suppose que $M_a M_b = 0$. Utiliser le principe de réflexion de Schwarz pour en déduire que $f \equiv 0$ dans U .

D'après le principe de réflexion de Schwarz, la fonction f (qui est nulle sur $a + i\mathbb{R}$ ou sur $b + i\mathbb{R}$) se prolonge par symétrie par rapport à l'un au moins de ces deux axes verticaux. Les zéros du prolongement ne sont pas isolés (car $f \equiv 0$ sur l'axe de symétrie utilisé) et on en déduit que f est identiquement nulle dans la bande \tilde{U} définie comme l'union de U , de l'axe de symétrie vertical utilisé et du symétrique de U par rapport à cet axe. En particulier f est identiquement nulle dans U .

Exercice hors barème. Soit f une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, se prolongeant en une fonction continue (notée aussi f) dans le demi-plan fermé $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(iy)| dy < +\infty$$

et que $|f| \leq 1$ dans $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $A > 0$, on introduit la fonction holomorphe dans $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ (et continue dans $\{\operatorname{Re} z \geq 0\}$) définie par

$$g_{\epsilon,A} : z \mapsto f(z) e^{-\epsilon z} \frac{A}{z + A}.$$

a) Vérifier que pour tout $z \in i\mathbb{R} = \partial[\{\operatorname{Re} z > 0\}]$, on a $|g_{\epsilon,A}(z)| \leq |f(z)|$.

b) En déduire que $y \in \mathbb{R} \mapsto g_{\epsilon,A}(iy)$ est intégrable sur \mathbb{R} relativement à la mesure de Lebesgue et que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_{\epsilon,A}(iy) dy = \int_{\mathbb{R}} f(iy) dy.$$

c) Établir, pour tout $R > 0, A > 0$ tels que $R \geq 2A$, les majorations :

$$\forall \theta \in [-\pi/2, \pi/2], |g_{\epsilon,A}(Re^{i\theta})| \leq e^{-\epsilon R \cos \theta} \frac{A}{|A + Re^{i\theta}|} \leq \frac{2A}{R} e^{-\epsilon R \cos \theta}.$$

d) Déduire de la formule des résidus que $\int_{\mathbb{R}} g_{\epsilon,A}(iy) dy = 0$ (on rappellera quel est le plus grand minorant affine de $\theta \mapsto \sin \theta$ sur $[0, \pi/2]$ avant d'exploiter ensuite cette minoration). Conclure en invoquant le résultat établi à la question **b)** que $\int_{\mathbb{R}} f(iy) dy = 0$.

a) Pour tout $z = iy \in i\mathbb{R}$, on a $A \leq |A + z| = \sqrt{A^2 + y^2}$ et $|e^{-\epsilon z}| = 1$, par conséquent $|g_{\epsilon,A}(z)| \leq |f(z)|$. Le critère de domination de Lebesgue implique que la fonction $y \mapsto g_{\epsilon,A}(iy)$, qui est majorée en module par la fonction positive intégrable $y \mapsto |f(iy)|$, est aussi intégrable sur \mathbb{R} relativement à la mesure de Lebesgue.

b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty} g_{\epsilon,A}(iy) = f(iy).$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (le chapeau dominant étant ici la fonction intégrable positive $y \mapsto |f(iy)|$) s'applique et l'on en déduit le résultat demandé.

c) Pour la première majoration, on utilise le fait que $|f(Re^{i\theta})| \leq 1$, ainsi que le fait que $|\exp(-\epsilon Re^{i\theta})| = \exp(-\epsilon R \cos \theta)$. Pour la seconde majoration, on utilise l'inégalité triangulaire qui assure que $|A + Re^{i\theta}| \geq R - A \geq R - R/2 = R/2$.

d) Comme la fonction $\theta \mapsto \sin \theta$ est concave sur $[0, \pi/2]$, le plus grand minorant affine de cette fonction sur le segment $[0, \pi/2]$ est $\theta \mapsto 2\theta/\pi$ (le graphe d'une fonction concave sur un segment reste au dessus de la corde qui le sous tend). D'après la formule des résidus, on a

$$\int_{-R}^R g_{\epsilon,A}(iy) dy = \int_{\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \mapsto Re^{i\theta}} g_{\epsilon,A}(\zeta) d\zeta.$$

Or, compte-tenu de l'inégalité établie à la question **c)**, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \mapsto Re^{i\theta}} g_{\epsilon,A}(\zeta) d\zeta \right| &\leq R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2A}{R} e^{-\epsilon R \cos \theta} d\theta = 4A \int_0^{\pi/2} e^{-\epsilon R \sin \theta} d\theta \\ &\leq 4A \int_0^{\pi/2} e^{-2\epsilon R \theta/\pi} d\theta = \frac{2\pi A}{\epsilon} \frac{1 - e^{-\epsilon R}}{R} = o(1) \quad (R \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

(on aurait d'ailleurs pu aussi invoquer ici le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour l'assertion finale, ce qui nous aurait dispensé de la majoration utilisée). On en déduit donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R g_{\epsilon,A}(iy) dy = \int_{\mathbb{R}} g_{\epsilon,A}(iy) dy = 0.$$

Il résulte alors de l'assertion établie à la question **b)** que

$$\int_{\mathbb{R}} f(iy) dy = 0.$$

Bibliographie

- [AM] E. Amar & E. Matheron, *Analyse complexe*, Enseignement des Mathématiques, Éditions Cassini, Paris, 2000 (disponible à la bibliothèque Diophante en plusieurs exemplaires)
- [And] M. Andersson, *Topics in complex analysis*, Universitext : Tracts in Mathematics, Springer, 1996 (disponible à la BMI)
- [Charp] P. Charpentier, *Analyse Complexe*, polycopié de l'UE MHT734 :
http://www.math.u-bordeaux1.fr/~pcharpen/enseignement/fichiers-master1/Analyse_Complexe.pdf
- [BG] C. A. Berenstein & R. Gay, *Complex Variables, An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 125, Springer, 1991 (disponible à la BU et à la bibliothèque Diophante en 2 exemplaires)
- [CGL] E. Charpentier, E. Ghys, A. Lesme (éditeurs), *L'héritage scientifique de Poincaré*, Collection Échelles, Belin, Paris, 2006 (traduction anglaise : *The scientific legacy of Poincaré*, History of mathematics, 36, Springer, 2010)
- [HY] Alain Hénaut, Alain Yger, *Éléments de Géométrie*, Mathématiques à l'Université, Ellipses Editions Marketing SA, Paris, 2004.
- [Dieud] J. Dieudonné, *Calcul Infinitésimal*, Hermann, Paris, 1997
- [Kac] M. Kac, « Can one hear the shape of a drum ? », *American Mathematical Monthly* 73, 1966 (4, part 2), pp. 1–23
- [MathL2] J.P. Marco, P. Thieullen, J.A. Weil (éditeurs), *Mathématiques L2*, Pearson Education, Paris, 2007 (disponible à la BU et à la bibliothèque Diophante en plusieurs exemplaires)
- [Rud] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998 (disponible à la BU et à la bibliothèque Diophante en plusieurs exemplaires)
- [Titch] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford University Press, 1967 (disponible en exclus du prêt à la BMI)
- [Y] A. Yger, *Analyse Complexe et Distributions*, Ellipses, 2001. Voir aussi la liste d'errata (sans doute encore incomplète) :
http://www.math.u-bordeaux.fr/~yger/errata_an.pdf
(disponible à la bibliothèque Diophante en plusieurs exemplaires)
- [Y0] A. Yger, *Cours de MHT401, Printemps 2007*, polycopié de l'UE MHT 401 :
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mat401.pdf>
- [Ydistrib] A. Yger, *Théorie des distributions, Printemps 2011*, polycopié de l'UE MHT 836 :
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht836.pdf>
- [Yint] A. Yger, *Théorie de l'Intégration, Automne 2010*, polycopié de l'UE MHT 512 :
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht512.pdf>
- [Yfourier] A. Yger, *Espaces de Hilbert et Analyse de Fourier, Printemps 2008*, polycopié de l'UE MHT 613 :
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht613.pdf>
- [Y1] A. Yger, Fascicule d'exercices pour l'UE MHT 734, Semestre d'Automne 2010-2011
<http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/mht734-TD.pdf>
- [Zalc] L. Zalcman, *Offbeat integral geometry*, *Amer. Math. Monthly* 87, pp. 161–175 (1980)
<http://www.jstor.org/stable/2321600>

Index

- abélienne, forme, 57
- Abel
 - lemme d', 9
 - Niels Henrik, 9, 57
- admissible, paramétrage, 20
- affiche, 3
- analytique, fonction, 68
- application ouverte
 - théorème de l', 72
- argument
 - détermination principale de l', 4
 - fonction, 4
 - variation de l', 42, 104, 107
- Ascoli, théorème d', 81

- Banach-Alaoglu, théorème de, 165
- Bernstein
 - inégalité de, 123
 - Serguei, 123
- Bessel
 - équation de, 8
 - fonctions de, 8
 - Friedrich, 8
- Bézout, identité de, 36, 113, 143
- Bieberbach
 - conjecture de, 76
 - Ludwig, 75
- Borel, procédé sommatoire de, 74, 83
- Briot-Bouquet, travaux de, 55
- Brouwer
 - Luitzen, 35
 - théorème du point fixe de, 35
- brownien, mouvement, 159, 161

- Carathéodory
 - Constantin, 168
 - inégalité de, 168
- Carleman, Torsten, 63
- Casorati
 - Felice, 101
- Casorati-Weierstraß, théorème de, 101
- Cauchy
 - Augustin-Louis, 11, 33
 - formule de, pour un disque, 58
 - formules analytiques pour les dérivées complexes, 66
 - formules pour les dérivées complexes, pour un disque, 58
 - formules topologiques pour les dérivées complexe, 69
 - inégalités de, 76
 - transformée de, 98, 133
- Cauchy-Goursat, théorème de, 56
- Cauchy-Pompeiu, formule de, 33
- Cauchy-Riemann
 - équation de, 56
 - opérateur de, 11
 - système de, 56
- champ de vecteurs, 10
- Chasles, relation de, 43
- chemin
 - paramétré C^1 par morceaux, 21
 - paramétré continu, 20
- circulation
 - d'un champ de forces, 21
- col, méthode du, 107
- compléments, formule des, 118
- concaténation, 43
- conjugaison complexe, 4
- conjugue harmonique, 157
- connexe
 - ouvert simplement, 45
- convergence uniforme sur tout compact, topologie de la, 77
- cordale, distance, 8
- cosinus
 - factorisation de, 116
- coupure, 89
- Cousin
 - donnée de, 144
 - Pierre, 144
 - premier problème de, 144
- curviligne
 - intégrale, 21

- d'Alembert, théorème de, 50, 77
- de Branges, Louis, 76
- Delsarte

- Jean, 156
 - théorème des deux rayons de, 156
- dérivées d'une fonction holomorphe, 59
- dérivation, 10
- Desargues, Girard, 7
- déterminant, forme, 12
- diagonal, procédé, 80
- Dirichlet
 - Johann Peter Gustav, 83, 153
 - problème de, dans un demi-plan, 169
 - problème de, dans un disque, 159
 - problème de, dans un ouvert du plan, 159
 - séries de, 69, 83
 - théorème de, pour un disque, 153
- divergence
 - formule de la, 32
- Dolbeault
 - complexe de, 137
 - Pierre, 137
- éliminable
 - singularité isolée, 99
- elliptique, fonction, 110, 122
- entière, fonction, 69
- Erdős
 - Paul, 121
- essentielle
 - singularité isolée, 100
- étoilé, ouvert, 15, 45
- Euler
 - constante d', 142
 - formule d', 64
 - relations d', 4
- exact, complexe de morphismes de
 - \mathbb{C} -espaces vectoriels, 137
- exacte, forme différentielle, 12
- extrémité
 - d'un chemin, 20
- fermée
 - forme différentielle, 14
- fictive
 - singularité isolée, 99
- flux, 32
- fonction dérivée
 - au sens complexe, 55
- forme différentielle
 - de degré 1, 10
- Fourier
 - transformée de, 113
- Fresnel
 - Augustin, 115
 - intégrales de, 115
- GAGA, principe, 109
- Gamma, fonction, 64, 110
- Gauß
 - Carl Friedrich, 116
 - sommes de, 115
- génératrice, fonction, 9, 65
- Goursat, Edouard, 56
- Green
 - fonction de, 159
 - formules de, 33
 - George, 30
- Green-Ostrogradski, formule de, 32
- Green-Riemann
 - formule de, 30
- Hadamard
 - Jacques, 121
- Hardy
 - Godfrey Harold, 166
 - inégalité de, 166
- harmonique
 - complexe, fonction, 148
 - conjuguée, 157
 - mesure, 159, 161
 - réelle, fonction, 147
- Harnack
 - Carl Gustav Axel, 168
 - inégalité de, 168
- Hartogs, phénomène de, 131
- holomorphe
 - éthymologie, 55, 69
 - fonction, dans un ouvert de \mathbb{C} , 55, 129
 - fonction, dans un ouvert de \mathbb{S}^2 , 104, 129
- holomorphie
 - enveloppe d', 130
 - ouvert d', 130
- holomorphiquement convexe, compact dans
 - un ouvert, 130
- homographies, groupe des, 104
- homotopie
 - entre chemins continus à extrémités marquées, 44
 - entre lacets continus de point de base fixé, 44
 - entre lacets continus libres, 46
 - invariance de l'intégrale par, 46
 - premier groupe d', 45
- Hurwitz
 - Adolf, 108
 - théorème, 108
- hypoellipticité
 - de $\partial/\partial\bar{z}$, 57
- indice
 - d'un lacet continu par rapport à un point, 42
- infini
 - point à l', 6
- intégrale
 - d'une 1 forme continue loc. exacte sur un chemin continu, 40
 - fonction d'un paramètre complexe, 60
- invariance
 - de l'intégrale par homotopie, 46

- inverse, pour la concaténation, 43
- inversion, 7
- Jensen
 - formule de, 170
 - Johan Ludwig, 170
- Kellogg
 - Oliver Dimon, 156, 166
 - théorème de, 156, 166
- Kœbe
 - Paul, 75
 - théorème un-quart de, 75
- lacet, 20
- Lagrange
 - interpolation de, 112
- Laplace
 - Pierre-Simon de, 11
 - transformée de, 64
- laplacien, 11, 150
- Laurent
 - coefficients de, à l'infini, 93
 - coefficients de, en une singularité isolée, 92
 - Pierre, 89
 - théorème d'analyticité de, 90
- Laurent, développement en série de
 - au voisinage épointé d'une singularité isolée, 92
 - au voisinage de l'infini, 93
 - dans une couronne, 91
- Lelong
 - Pierre, 175
- Lelong-Poincaré
 - formule de, 37, 175
- Liouville
 - Joseph, 77
 - théorème de, 77
- Littlewood
 - John, 166
- logarithme, 50
- logarithme complexe
 - détermination continue du, 45
- Mahler
 - Kurt, 141, 173
 - mesure de, 173
- Maupertuis, Pierre-Louis de, 56
- maximum
 - principe pour les fonctions holomorphes, version globale, 81
 - principe pour les fonctions holomorphes, version locale, 81
 - principe pour les fonctions sous-harmoniques continues, version globale, 152
 - principe pour les fonctions sous-harmoniques continues, version locale, 151
- Mellin
 - Robert Hjalmar, 65
 - transformée de, 65, 114
- méromorphe
 - étymologie, 101
 - fonction, dans un ouvert de \mathbb{C} , 102, 129
 - fonction, dans un ouvert de \mathbb{S}^2 , 104, 129
- mesure
 - de Radon complexe, 133
- Mittag-Leffler
 - Magnus Gösta, 139
 - procédé de, 139
 - théorème de, 139
- moindre action
 - principe de, 56, 149
- Monge-Ampère
 - opérateur de, 14
- monovalente, fonction, 5
- monovaluée, fonction, 5
- Montel
 - Paul, 79
 - théorème de, 79, 167
- Morera
 - Giacinto, 59
 - théorème de, 59
- moyenne, formule de la, 66, 147
 - version volumique, 148
- multiplicité
 - d'un zéro d'une fonction holomorphe, 71
- multivalente, fonction, 5
- multivaluée, fonction, 5
- nappe paramétrée, 28
- Neumann
 - Carl, 36
 - formule de, 36
- nombre dérivé
 - au sens complexe, 55
- nombres premiers, théorème des, 121
- non essentielle
 - singularité isolée, 100
- opérateur $\bar{\partial}$, 14, 136
 - résolution de l' , 137
- opérateur ∂ , 14, 136
- ordre
 - d'un pôle, 100
- origine
 - d'un chemin, 20
- Ostrogradski, Mikhail, 32
- partie polaire
 - en une singularité isolée, 93
- partie régulière
 - en une singularité isolée, 93
- partition de l'unité, lemme de, 144

- Peano
 - courbe de, 20, 53
 - perspective, 7
 - Phragmén-Lindelöf, principe de, 83, 86
 - Picard
 - Emile, 101
 - grand théorème de, 101
 - plan
 - complexe, 3
 - réel, 3
 - plateau, fonction, 138
 - Poincaré
 - Henri, 15
 - lemme de, 15
 - Poisson
 - formule intégrale de, dans un disque, 153, 157
 - formule intégrale de, dans un ouvert borné, 161
 - noyau de, 161
 - Siméon Denis, 153
 - transformée de, 164
 - Poisson-Jensen, formule de, 173
 - pôle, 100
 - multiple, 103
 - simple, 102
 - polygone à trous, 27
 - Pompeiu, Dimitrie, 33
 - potentiel
 - forme dérivant d'un, 12
 - premier groupe d'homotopie
 - de \mathbb{C}^* , 47
 - primitive
 - d'une 1-forme continue dans un ouvert, 12
 - d'une 1-forme loc. exacte le long d'un chemin continu, 38
 - projective
 - droite, 7
 - prolongement analytique
 - principe du, 71
 - pullback, d'une forme différentielle, 17
- Radon, mesure complexe de, 133
- réciproque, image d'une forme différentielle, 17
- redressement
 - local d'un champ de vecteurs dans le plan, 20
- régulier
 - point au bord du disque de convergence, 75
- relèvement
 - d'un chemin, 39
- repérage
 - cartésien, 3
 - polaire, 4
- réseau, 110
- résidu
 - à l'infini, 96
 - calcul en un pôle dans \mathbb{C} , 102
 - local, en un point de \mathbb{C} , 95
- résidus
 - formule des, version analytique, 105
 - formule des, version topologique, 96
- Riemann
 - Bernhard, 5, 30
 - fonction zéta de, 64, 71, 84, 110, 120, 142
 - hypothèse de, 72
 - sphère de, 5
 - théorème sur les singularités isolées, 99
- Riesz
 - Frigyes, 132
 - théorème de représentation de, 132, 159, 164, 165
- Ronkin
 - Lev Isaakovich, 175
- Rouché
 - Eugène, 49
 - théorème de, revu par G. Pólya, 49
 - théorème de, version analytique, 107
 - théorème de, version topologique, 49
- Runge
 - Carl David Tolmé, 130
 - théorème de, version algébrique, 135
 - théorème de, version analytique, 131
- Schwarz
 - Hermann, 14, 61, 82
 - lemme de zéros de, 82
 - lemme sur les dérivées croisées de, 14
 - principe de réflexion de, 61, 167
- Selberg
 - Atle, 121
- séries majorantes, méthode des, 69
- Serre
 - Jean-Pierre, 109
- similitude directe, 55
- simple
 - lacet, 20
 - nappe paramétrée, 28
- simplexe standard, 25
- singularité isolée
 - à l'infini, 89
 - en un point de \mathbb{C} , 89
- singulier
 - point au bord du disque de convergence, 75
- sinus
 - factorisation de, 117, 142
- sinus cardinal, fonction, 119
- sous-harmonique
 - fonction, 147
 - régularisée supérieure, 167
- sous-moyenne, propriété de la, 147
 - version volumique, 148

- stéréographique, projection, 5
- Stokes
 - formule pour un triangle, 25
 - George, 30
 - théorème de, 30
- Taylor
 - coefficients de, 67
 - développement en série de, 67
- théorème fondamental
 - de l'algèbre, 50, 77
 - de l'analyse, dans le plan, 29
 - de l'analyse, sur la droite, 29
- transformée
 - de Laplace, 64
 - de Mellin, 65
- travail
 - d'un champ de forces, 21
- valeur au bord
 - d'une fonction holomorphe dans $D(0, 1)$, 164
- Vallée Poussin
 - Charles-Jean de la, 121
- Von Koch
 - flocon de, 20
- Weierstraß
 - facteurs élémentaires, 126
 - fonctions \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' de, 110, 122
 - Karl, 78, 101
 - lemme de préparation de, 111
 - théorème de, 78
 - théorème de, sur les zéros-pôles prescrits, 127
- zéros isolés
 - principe des, 70
- zéta, fonction de Riemann, 64, 71, 84, 110, 120, 142