

Chapitre 8 : fonctions de deux ou trois variables, une initiation

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

$$\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

$$\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

$$\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(\lambda, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

$$\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(\lambda, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

Si $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur \overrightarrow{OM} , avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Plan vectoriel \mathbb{R}^2 , plan affine \mathbb{R}^2

$$\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(\lambda, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

Si $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur \overrightarrow{OM} , avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Travailler avec le point de vue consistant à considérer les couples (x, y) de \mathbb{R}^2 comme des vecteurs consiste à faire de la géométrie vectorielle dans le plan vectoriel \mathbb{R}^2 , travailler avec le point de vue consistant à les considérer comme des points consiste à faire de la géométrie affine dans le plan affine \mathbb{R}^2 .

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 .$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rangle} := \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|,$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rangle} := \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|,$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$,
 $M_3 = (x_3, y_3)$:

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans le plan

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rangle} := \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|,$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$,
 $M_3 = (x_3, y_3)$:

$$\begin{aligned}d^2(M_1, M_3) &= d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3) \\ &\quad + 2\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \rangle\end{aligned}$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\cos \theta = \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ \sin \theta &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.\end{aligned}$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\cos \theta = \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\cos \theta = \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$M = O + r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}),$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ \sin \theta &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.\end{aligned}$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$M = O + r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}),$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}).$$

Angle de deux vecteurs du plan non nuls ; repérage en polaire

Soient $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs non nuls de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ \sin \theta &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.\end{aligned}$$

Si (x, y) est un vecteur non nul correspondant à un point différent de $(0, 0)$:

$$r := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$M = O + r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}),$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}).$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right) \longmapsto (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$(\lambda, (x, y, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right) \mapsto (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$(\lambda, (x, y, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Si $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur \overrightarrow{OM} , avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Espace vectoriel \mathbb{R}^3 , espace affine \mathbb{R}^3

$$\mathbb{R}^3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y, z); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right) \mapsto (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$(\lambda, (x, y, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mapsto \lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Si $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sont deux points du plan, on note aussi $\overrightarrow{M_1 M_2}$ le vecteur \overrightarrow{OM} , avec $M = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ et l'on peut donc formellement écrire la relation $M_2 = M_1 + \overrightarrow{M_1 M_2}$.

Travailler avec le point de vue consistant à considérer les couples (x, y, z) de \mathbb{R}^3 comme des vecteurs consiste à faire de la géométrie vectorielle dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , travailler avec le point de vue consistant à les considérer comme des points consiste à faire de la géométrie affine dans l'espace affine \mathbb{R}^3 .

Repérage sphérique des points de \mathbb{R}^3

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Repérage sphérique des points de \mathbb{R}^3

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Longitude :

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Repérage sphérique des points de \mathbb{R}^3

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Longitude :

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Co-latitude :

$$\varphi := \text{Arcos} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \in [0, \pi]$$

Repérage sphérique des points de \mathbb{R}^3

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Longitude :

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Co-latitude :

$$\varphi := \text{Arcos} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \in [0, \pi]$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r \sin \varphi (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + r \cos \varphi \vec{k}.$$

Repérage sphérique des points de \mathbb{R}^3

Distance à l'origine : $r = r(M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Longitude :

$$\theta \in [0, 2\pi[, \quad \cos \theta := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Co-latitude :

$$\varphi := \text{Arcos} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \in [0, \pi]$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r \sin \varphi (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + r \cos \varphi \vec{k}.$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta \quad y = r \sin \varphi \sin \theta \quad z = r \cos \varphi.$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\left\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right\rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &= \sqrt{\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \rangle} \\ &:= \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|, \end{aligned}$$

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{aligned}d(M_1, M_2) &= \sqrt{\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \rangle} \\ &:= \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|,\end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$:

Produit scalaire de deux vecteurs et distance euclidienne dans l'espace

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\left\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \right\rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Distance euclidienne de deux points $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &= \sqrt{\left\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \right\rangle} \\ &:= \|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\|, \end{aligned}$$

Le théorème de Pythagore pour $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{aligned} d^2(M_1, M_3) &= d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3) \\ &\quad + 2\left\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2) \right\rangle \end{aligned}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Nota : *la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2*

... et de deux vecteurs de l'espace :

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

... et de deux vecteurs de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1) = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}.$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

... et de deux vecteurs de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 := (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

... et de deux vecteurs de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 := (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (y_1z_2 - y_2z_1) \vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2) \vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs du plan

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}.$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = |x_1y_2 - x_2y_1|$ mesure l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2

... et de deux vecteurs de l'espace :

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \wedge \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \wedge \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 := (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 := (y_1z_2 - y_2z_1) \vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2) \vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1) \vec{k}$$

Nota : la quantité $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\|$ mesure toujours l'aire du parallélogramme construit à partir de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans le plan défini par ces vecteurs

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dire que f est *différentiable* en $M_0 = (x_0, y_0)$ signifie qu'il existe deux nombres réels a_{M_0} et b_{M_0} tels que

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dire que f est *différentiable* en $M_0 = (x_0, y_0)$ signifie qu'il existe deux nombres réels a_{M_0} et b_{M_0} tels que

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \neq (0,0)}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(M_0) - a_{M_0} h - b_{M_0} k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dire que f est *différentiable* en $M_0 = (x_0, y_0)$ signifie qu'il existe deux nombres réels a_{M_0} et b_{M_0} tels que

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \neq (0,0)}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(M_0) - a_{M_0} h - b_{M_0} k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

$$a_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$b_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Différentiabilité d'une fonction de 2 variables en M_0

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dire que f est *différentiable* en $M_0 = (x_0, y_0)$ signifie qu'il existe deux nombres réels a_{M_0} et b_{M_0} tels que

$$\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ (h,k) \neq (0,0)}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(M_0) - a_{M_0} h - b_{M_0} k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

$$a_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$b_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

$$\frac{d}{dx}[f(x, \mathbf{y})] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y})$$

$$\frac{d}{dy}[f(\mathbf{x}, y)] = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y)$$

... et d'une fonction de 3 variables en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

... et d'une fonction de 3 variables en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\lim_{\substack{(h,k,l) \rightarrow 0 \\ (h,k,l) \neq 0}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(M_0) - a_{M_0}h - b_{M_0}k - c_{M_0}l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0.$$

... et d'une fonction de 3 variables en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\lim_{\substack{(h,k,l) \rightarrow 0 \\ (h,k,l) \neq 0}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(M_0) - a_{M_0}h - b_{M_0}k - c_{M_0}l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0.$$

$$a_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$b_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

$$c_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ l \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l}.$$

... et d'une fonction de 3 variables en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\lim_{\substack{(h,k,l) \rightarrow 0 \\ (h,k,l) \neq 0}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(M_0) - a_{M_0}h - b_{M_0}k - c_{M_0}l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0.$$

$$a_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$b_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

$$c_{M_0} = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) := \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ l \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l}.$$

$$\frac{d}{dx}[f(x, \mathbf{y}, \mathbf{z})] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \qquad \frac{d}{dy}[f(\mathbf{x}, y, \mathbf{z})] = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$$

$$\frac{d}{dz}[f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)] = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z),$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

Lemme d'Hermann Schwarz :

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de deux variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \mathbf{y}) \right](x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y) \right](x_0, y_0)$$

Lemme d'Hermann Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de trois variables

Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction de trois variables

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \right](x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) \right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, y, \mathbf{z}) \right](x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \right](x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dz} \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) \right](x_0, y_0, z_0)$$

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*)

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem* pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f , se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem* pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f , se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. **Le gradient en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$** (si l'on voit le graphe comme une carte en relief).

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f , se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. **Le gradient en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (si l'on voit le graphe comme une carte en relief).**

Le **laplacien** de f est la fonction scalaire de U dans \mathbb{R} :

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f , se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. **Le gradient en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$** (si l'on voit le graphe comme une carte en relief).

Le **laplacien** de f est la fonction scalaire de U dans \mathbb{R} :

$$\Delta[f] := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire

Si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, le **gradient** de f est le champ de vecteurs de U dans \mathbb{R}^3 (*idem pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*)

$$\vec{\nabla} f : (x, y, z) \in U \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Si f est une fonction de deux variables, en un point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ du graphe de f , se diriger (en les variables (x, y)) suivant le gradient de f en (x_0, y_0) revient à suivre la *ligne de plus grande pente* tracée sur le graphe depuis le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. **Le gradient en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$** (si l'on voit le graphe comme une carte en relief).

Le **laplacien** de f est la fonction scalaire de U dans \mathbb{R} :

$$\Delta[f] := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si f est une image $(x, y) \longrightarrow I(x, y)$, $\Delta[f]$ met en évidence les lignes de rupture de cette image.

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t))$$

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left\langle \vec{\nabla} F(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \right\rangle.\end{aligned}$$

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla F}(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \right\rangle.\end{aligned}$$

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t), z(t))$$

Règle de Leibniz : exemples 1 et 2

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla F}(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \right\rangle.\end{aligned}$$

$$t \in I \xrightarrow{\gamma} (x(t), y(t), z(t)) \xrightarrow{F} F(x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{aligned}(F \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\nabla F}(x(t), y(t), z(t)), (x'(t), y'(t), z'(t)) \right\rangle.\end{aligned}$$

Règle de Leibniz : exemple 3

Règle de Leibniz : exemple 3

$$(u, v) \in U \xrightarrow{F} (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} G(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}$$

Règle de Leibniz : exemple 3

$$(u, v) \in U \xrightarrow{F} (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} G(x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial [G \circ F]}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}(F) \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial [G \circ F]}{\partial v} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}(F) \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

Règle de Leibniz : exemple 4

Règle de Leibniz : exemple 4

$$(u, v, w) \in U \xrightarrow{F} (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3$$
$$\xrightarrow{G} G(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}$$

Règle de Leibniz : exemple 4

$$(u, v, w) \in U \xrightarrow{F} (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}^3 \\ \xrightarrow{G} G(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[G \circ F]}{\partial u} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}(F) \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial z}(F) \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial[G \circ F]}{\partial v} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F) \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}(F) \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial z}(F) \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial[G \circ F]}{\partial w} &= \frac{\partial G}{\partial x}(F) \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial y}(F) \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial z}(F) \frac{\partial z}{\partial w}. \end{aligned}$$

Champs de vecteurs : le rotationnel d'un champ

Champs de vecteurs : le rotationnel d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

Champs de vecteurs : le rotationnel d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

Champs de vecteurs : la divergence d'un champ

Champs de vecteurs : la divergence d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

Champs de vecteurs : la divergence d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

La **divergence** du champ \vec{F} est la fonction scalaire :

Champs de vecteurs : la divergence d'un champ

$$\vec{F} = (P, Q, R) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

La **divergence** du champ \vec{F} est la fonction scalaire :

$$(x, y, z) \in U \longmapsto \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) := \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).$$

Quelques règles importantes

Quelques règles importantes

$$\vec{\text{rot}} [\vec{\nabla} F] = \vec{0}$$

$$\vec{\text{rot}} [f \vec{F}] = \vec{\nabla} f \wedge \vec{F} + f \vec{\text{rot}} \vec{F}$$

Quelques règles importantes

$$\vec{\text{rot}} [\vec{\nabla} \vec{F}] = \vec{0}$$

$$\vec{\text{rot}} [f \vec{F}] = \vec{\nabla} f \wedge \vec{F} + f \vec{\text{rot}} \vec{F}$$

$$\text{div} [\vec{\nabla} f] = \Delta f$$

$$\text{div} [\vec{\text{rot}} \vec{G}] = 0$$

$$\text{div} [f \vec{F}] = \langle \vec{\nabla} f, \vec{F} \rangle + f \text{div} \vec{F}$$

$$\text{div} [f_1 \vec{\nabla} f_2] = \langle \vec{\nabla} f_1, \vec{\nabla} f_2 \rangle + f_1 \Delta f_2$$

$$\text{div} [\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2] = \langle \vec{\text{rot}} \vec{F}_1, \vec{F}_2 \rangle - \langle \vec{\text{rot}} \vec{F}_2, \vec{F}_1 \rangle$$

Deux calculs importants de laplacien

Deux calculs importants de laplacien

$$\Delta \left[\log \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

Deux calculs importants de laplacien

$$\Delta \left[\log \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$\Delta \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right] = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

Fin du chapitre 8