

Singularités analytiques des séries de Dirichlet

V. Petkov-Alain Yger

23 mai 2013

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Généralités sur les séries de Dirichlet | 1 |
| 1.1 | Définitions et exemples ; quatre abscisses, prolongement | 1 |
| 1.2 | Densité de la suite des exposants. | 12 |
| 1.3 | Problèmes liés à la condensation de la suite des exposants. | 14 |
| 2 | Effet de la suite des exposants sur le comportement de la série | 23 |
| 2.1 | Rappels d'Analyse complexe ; formule de Jensen, principe du minimum | 23 |
| 2.2 | Interpolation et indice de condensation | 26 |
| 2.3 | Autres effets de l'interpolation des coefficients ; un théorème de Cramer | 28 |
| 2.4 | La transformation de Laplace et l'indicatrice de Polya | 30 |
| 2.5 | D'autres formules de représentation intégrale | 36 |
| 3 | Interactions entre singularités analytiques et suite des coefficients | 47 |
| 3.1 | Une idée clef de L. Ehrenpreis | 47 |
| 3.2 | Algèbres $A_p(\Sigma)$ et transformation de Laplace | 50 |
| 3.3 | Fonctions doucement décroissantes dans les algèbres $A_p(\Sigma)$ et $A_p(\mathbb{C})$; interpolation dans ces espaces | 55 |
| 3.4 | D'autres versions de ces "gap" théorèmes. | 57 |

Chapitre 1

Généralités sur les séries de Dirichlet

1.1 Définitions et exemples ; quatre abscisses, prolongement

Nous appellerons *série de Dirichlet* toute série de fonctions de la variable complexe z , de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}, \quad (1.1)$$

où $(\lambda_k)_k$ est une suite strictement croissante de nombres positifs, telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty. \quad (1.2)$$

Exemples.

1. L'étude des séries entières rejoint un cas particulier de celle des séries de Dirichlet ; si l'on prend $\lambda_k = k$ on voit que la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-kz}$$

correspond à la série entière

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k,$$

dans laquelle on a fait la substitution $x = e^{-z}$. Cependant, on verra plus loin de notables différences entre ces deux points de vue.

2. La série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

est la série de Dirichlet correspondant à la suite $(\log k)_k$. La somme de la série de Riemann (lorsque $\operatorname{Re} z > 1$) est la fonction ζ de Riemann. Il existe une relation classique entre cette fonction et la fonction Γ , définie elle pour $\operatorname{Re} \zeta > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

En effet, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout z de partie réelle strictement positive,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty (kt)^{z-1} e^{-kt} k dt = k^z \int_0^\infty e^{-kt} t^{z-1} dt,$$

d'où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\Gamma(z) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^z} \right) = \int_0^\infty t^{z-1} \left(\sum_{k=1}^n e^{-kt} \right) dt.$$

On en déduit (grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue), que pour tout z de partie réelle strictement supérieure à 1,

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt. \quad (1.3)$$

Mais la fonction

$$z \mapsto \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

est une fonction entière de la variable z , tandis que la fonction

$$t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$$

est holomorphe dans le disque de centre 0 et de rayon 2π , et se développe donc en série (la convergence étant uniforme dans tout disque fermé $\bar{D}(0, r)$, avec $r < 2\pi$, et en particulier dans le disque $\bar{D}(0, 1)$)

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k,$$

ce qui implique¹, toujours pour z de partie réelle strictement supérieure à 1,

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z + k - 1}.$$

Ainsi, la fonction

$$z \mapsto \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

se prolonge t'elle en une fonction méromorphe, à pôles simples aux entiers relatifs inférieurs ou égaux à 1. Quant à la fonction Γ , on rappelle que l'on a, pour tout z de partie réelle strictement positive

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}},$$

où γ est la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

1. Les b_k sont les nombres de Bernoulli.

Ceci est une conséquence du résultat bien connu suivant ² : dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, on a la formule d'Euler

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.\end{aligned}$$

La fonction $1/\Gamma$ est donc une fonction entière, avec zéros simples en $0, -1, -2, \dots$. Il résulte de (1.3) que la fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} , avec un pôle simple (avec résidu 1) au point $z = 1$. Nous reviendrons plus loin sur la description d'un autre procédé pour décrire le prolongement de ζ en dehors du demi-plan $\operatorname{Re} \zeta > 1$ où ζ est donnée comme la somme de la série de Dirichlet.

3. On a aussi comme exemple important les séries alternées du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

où le changement de signe jouera un rôle capital en ce qui concerne la convergence simple de la série. On a ici, pour tout z complexe de partie réelle strictement supérieure à 1,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = (1 - 2^{1-z})\zeta(z).$$

Mais, d'après ce que nous avons vu dans l'exemple 2, la fonction

$$z \mapsto (1 - 2^{1-z})\zeta(z)$$

se prolonge en une fonction entière à tout le plan complexe. Ainsi, la somme de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

(cette série converge, on le verra plus loin, pour tout z de partie réelle strictement positive) se prolonge-t-elle en une fonction entière (donc sans singularités) à tout le plan complexe.

4. Autre fonction importante ; on a, pour tout z de partie réelle strictement supérieure à 1,

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{d}{dz} \log \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^z},$$

où $\Lambda(k) = \log k$ si k est une puissance de nombre premier, $\Lambda(k) = 0$ sinon, et p_1, p_2, \dots , est la suite des nombres premiers, rangés dans l'ordre croissant. On a donc ici un autre exemple de série de Dirichlet, où la suite des coefficients est donnée par une fonction arithmétique, la fonction Λ . Cette dernière série de Dirichlet joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème Hadamard-de la Vallée Poussin dit *des nombres premiers*, qui assure $p_k \sim k / \log k$ lorsque k tend vers l'infini.

Nous avons la première proposition suivante, qui nous permet de définir l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet.

2. Pour une preuve de ce point, nous renvoyons par exemple à J. Dieudonné (*Calcul Infinitésimal*, pp. 129-130) ou à Berenstein-Gay (*Complex variables*, pp. 500-501).

Proposition 1.1 *Si la série de Dirichlet (1.1) converge simplement en un point z_0 du plan complexe, elle converge simplement en tout point du demi-plan $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, et de plus la convergence est uniforme dans tout secteur de la forme $|\arg(z - z_0)| \leq \theta^3$, où $\theta \in [0, \pi/2[$. En conséquence, ou bien la série converge partout, ou bien elle diverge partout, ou bien il existe un nombre réel x_c dit abscisse de convergence simple (ou tout simplement abscisse de convergence), tel que la série (1.1) converge pour $\operatorname{Re} z > x_c$, diverge pour $\operatorname{Re} z < x_c$.*

Preuve. On applique la transformation d'Abel et le critère de Cauchy. Supposons que la série converge en z_0 . Pour montrer qu'elle converge en tout z tel que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ et que la convergence est uniforme dans tout secteur $S_{z_0, \theta}$ du type $|\arg(z - z_0)| \leq \theta$, avec $\theta \in [0, \pi/2[$, il suffit de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N(\epsilon) \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $q \geq p \geq N$, pour tout z dans $S_{z_0, \theta}$, on ait

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k z} \right| < \epsilon. \quad (1.4)$$

Écrivons, pour $q \geq p$ deux entiers strictements positifs, et z dans $S_{z_0, \theta}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k z} &= \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k(z-z_0)} e^{-\lambda_k z_0} \\ &= \left(\sum_{k=p}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) (\tilde{a}_p + \cdots + \tilde{a}_k) \right) + b_q (\tilde{a}_p + \cdots + \tilde{a}_q), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\tilde{a}_k := a_k e^{-\lambda_k z_0}$ et $b_k := e^{-\lambda_k(z-z_0)}$ (la somme ne figure bien sûr pas si $q = p$). On a la majoration immédiate

$$\begin{aligned} |b_k - b_{k+1}| &= |e^{-\lambda_k(z-z_0)} - e^{-\lambda_{k+1}(z-z_0)}| = \left| (z - z_0) \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(z-z_0)} dt \right| \\ &\leq \frac{|z-z_0|}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0} (e^{-\lambda_k(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)} - e^{-\lambda_{k+1}(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0)}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Comme la série de Dirichlet converge en z_0 , on peut trouver $N = N(\epsilon)$ tel que, dès que $q \geq p$ sont deux entiers supérieurs à N , on a, pour tout k entre p et q ,

$$|\tilde{a}_p + \cdots + \tilde{a}_k| \leq \frac{\epsilon}{1 + \tan \theta}. \quad (1.7)$$

En reportant les inégalités (1.6) et (1.7) dans (1.5) et en utilisant le fait que dans une somme télescopique, les termes successifs se détruisent deux à deux, il vient

$$\left| \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k z} \right| \leq \frac{\epsilon}{1 + \tan \theta} \frac{|z - z_0|}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0} \leq \epsilon,$$

et l'on a bien ce que l'on voulait. Les autres affirmations de la proposition concernant la définition de l'abscisse de convergence sont évidentes. \diamond

Remarque. Si la série de Dirichlet converge simplement pour tout z , on dit que $x_c = -\infty$, si la série diverge pour tout z , on dit que $x_c = +\infty$.

Attention !! Il faut prendre garde au fait suivant : il est fort possible que, bien que l'abscisse de convergence soit $x_c > -\infty$, la somme de la série de Dirichlet puisse se

3. On note \arg la détermination de l'argument comprise entre $-\pi$ et π .

prolonger en une fonction holomorphe dans un demi-plan du type $\operatorname{Re} z > x$, avec $x < x_c$. C'est par exemple le cas pour la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

(exemple 2), où $x_c = 1$, mais le prolongement existe dans $\operatorname{Re} z > 0$. C'est aussi le cas (et l'exemple est encore plus frappant) pour la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}.$$

Ici $x_c = 0$ (car il y a convergence si $z \in]0, \infty[$ par le critère des séries alternées), et pourtant, on peut prolonger la somme à tout le plan complexe en une fonction entière. On appelle abscisse d'holomorphie x_h la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels x tels que la somme de la série de Dirichlet puisse se prolonger au demi-plan $\operatorname{Re} z > x$. Dans l'exemple 2, $x_h = 0$, $x_c = 1$, dans l'exemple 3, $x_h = -\infty$, $x_c = 0$. Le fait que x_h puisse être strictement inférieure à x_c induit une différence majeure entre la théorie des séries entières et celle des séries de Dirichlet. Alors que, pour les séries entières, la frontière du disque de convergence réalise un barrage au prolongement (il est impossible de prolonger la somme d'une série entière à un disque ouvert de rayon strictement supérieur au rayon de convergence), la droite $\operatorname{Re} z = x_c$ peut ne pas être un rempart contre le prolongement. C'est là *un fait majeur* à souligner. Par contre, la non compensation de signe (au niveau des coefficients) nous permet d'exhiber des singularités sur la droite verticale correspondant à l'abscisse de convergence. On a ainsi le

Lemme 1.1 *Soit une série de Dirichlet*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

où tous les a_k sont positifs ou nuls et $x_c \in \mathbf{R}$. Alors $x = x_c$ est un point singulier de la somme f de la série de Dirichlet et l'on a donc dans ce cas $x_h = x_c$.

Preuve. Si cela n'était pas vrai, on trouverait $x > x_c$ et $r > x - x_c$, tel que, dans $\{\operatorname{Re} z > x_c\} \cap \{|z - x| < r\}$,

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} (z - x)^l,$$

cette série de Taylor ayant un rayon de convergence égal à r . Mais on a aussi

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

près de x et donc, puisque la convergence est uniforme,

$$f^{(l)}(x) = (-1)^l \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^l e^{-\lambda_k x}.$$

On a donc, pour tout z dans $D(x, r)$, si f désigne le prolongement éventuel de la série de Dirichlet,

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^l e^{-\lambda_k x} \right) \frac{(x-z)^l}{l!}.$$

Prenons maintenant $z = y$ réel strictement entre $x - r$ et x_c . On a, en utilisant Fubini pour des fonctions positives,

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k x} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^l (x-y)^l}{l!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k x} e^{\lambda_k (x-y)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k y}. \end{aligned}$$

On aurait convergence de la série de Dirichlet en y , ce qui contredit la définition de x_c . Il y avait donc une singularité du prolongement en x_c . \diamond

Il est évident que si la série de Dirichlet (1.1) converge absolument en un point z_0 , alors, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$, on a

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq |a_k e^{-\lambda_k z_0}|,$$

ce qui prouve que la série de Dirichlet converge absolument (et même normalement) dans tout le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} z_0$. Par conséquent, soit la série de Dirichlet ne converge absolument en aucun point, soit elle converge absolument en tout point, soit il existe $x_a \in \mathbf{R}$, tel que la série de Dirichlet (1.1) ne converge absolument en aucun point de $\{\operatorname{Re} z < x_a\}$ et converge absolument en tout point de $\{\operatorname{Re} z > x_a\}$. Ce réel x_a est appelé abscisse d'absolue convergence pour la série de Dirichlet. Notons que l'on a toujours $x_c \leq x_a$. Lorsque la série ne converge absolument en aucun point, on dira que $x_a = -\infty$, si la série de Dirichlet converge absolument en tout point, on dira alors $x_a = +\infty$.

Il reste enfin une quatrième abscisse à définir, l'abscisse de convergence uniforme x_u . Par définition

$$x_u := \inf\{x \in \mathbf{R}, \text{ la série (1.1) converge uniformément dans } \operatorname{Re} z > x\}.$$

Clairement, on a $x_h \leq x_c \leq x_u \leq x_a$. Les inégalités peuvent être strictes. Par exemple, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$$

a une abscisse de convergence absolue $x_a = 1$ tandis que l'abscisse de convergence est $x_c = 0$, et que l'abscisse d'holomorphie x_h vaut $-\infty$.

Nous pouvons préciser l'écart entre les diverses abscisses si nous disposons d'une information sur la suite des exposants.

Proposition 1.2 *Si*

$$\mu = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\lambda_k},$$

alors $x_a - x_c \leq \mu$; *en particulier, si* $\mu = 0$, *comme c'est le cas pour les séries entières, $x_a = x_c = x_u$.*

Preuve. Si ϵ est un nombre strictement positif, on est certain, de part la définition de la limite supérieure, que, pour k assez grand,

$$\log k \leq \lambda_k \left(\mu + \frac{\epsilon}{2} \right). \quad (1.8)$$

Supposons maintenant que $\operatorname{Re} z_0 > x_c$ et que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0 + \mu + \epsilon$. On a alors

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq |a_k e^{-\lambda_k z_0}| e^{-\lambda_k(\mu+\epsilon)}.$$

Donc, pour k assez grand, il vient d'après (1.8),

$$|a_k e^{-\lambda_k z}| \leq |a_k e^{-\lambda_k z_0}| \frac{1}{k^{\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}}}.$$

Comme la suite $(|a_k e^{-\lambda_k z_0}|)_k$ est bornée (car tendant vers 0), la série de terme général $a_k e^{-\lambda_k z}$ est une série absolument convergente, comme la série de Riemann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2(\mu+\epsilon)}{2\mu+\epsilon}}}.$$

On a donc bien, pour ϵ arbitraire, $x_a \geq \operatorname{Re} z_0 + \epsilon$. D'où le résultat. \diamond

Dans certains cas, il est possible de déterminer l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet. Voici le résultat de Cahen-Landau.

Proposition 1.3 *Si le nombre*

$$l = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \left| \sum_{j=1}^k a_j \right|$$

satisfait $l > 0$, alors $x_c = l$; sinon, $-\infty \leq x_c \leq 0$.

Preuve. Si $l < 0$, la série de Dirichlet converge en $z_0 = 0$ (d'ailleurs vers 0), donc l'abscisse de convergence est dans ce cas négative ou nulle. On peut donc supposer $l \geq 0$.

Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de la limite supérieure, on a, pour tout k assez grand,

$$\left| \sum_{j=1}^k a_j \right| \leq e^{(l+\epsilon)\lambda_k}.$$

On a donc, pour tout entier strictement positif k ,

$$\left| \sum_{j=1}^k a_j \right| \leq K_\epsilon e^{(l+\epsilon)\lambda_k},$$

où $K = K_\epsilon$ est une constante positive. Soit x un nombre réel strictement supérieur à $l + 2\epsilon$. Reprenons la méthode d'Abel pour montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k x}$$

satisfait le critère de Cauchy. Si $q \geq p \geq 1$, on écrit

$$\sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k x} = \sum_{k=p}^{q-1} A_k (e^{-\lambda_k x} - e^{-\lambda_{k+1} x}) - A_{p-1} e^{-\lambda_p x} + A_q e^{\lambda_q x},$$

où $A_k = a_1 + \dots + a_k$; d'où l'estimation

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k x} \right| &\leq x \sum_{k=p}^{q-1} e^{(l+\epsilon)\lambda_k} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-tx} dt + e^{(l+\epsilon)\lambda_{p-1} - \lambda_p x} + e^{(l+\epsilon)\lambda_q - \lambda_q x} \\ &\leq x \sum_{k=p}^{q-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{(l+\epsilon-x)t} dt + e^{-\epsilon\lambda_p} + e^{-\epsilon\lambda_q} \\ &\leq x \int_{\lambda_p}^{\infty} e^{-\epsilon t} dt + 2e^{-\epsilon\lambda_p}. \end{aligned}$$

Pour p assez grand, cette quantité est arbitrairement petite, le critère de Cauchy s'applique donc et la série de Dirichlet converge en x . D'après la Proposition 1.2, l'abscisse de convergence est au moins égale à $l + 2\epsilon$. Comme ϵ est arbitraire, on a bien, dès que $l \geq 0$, $x_c \leq l$. Notons que ceci implique que si $l = 0$, alors $x_c \leq 0$.

Supposons maintenant que la série de Dirichlet (1.1) converge en un point z_0 tel que $\operatorname{Re} z_0 > 0$, on voit en appliquant encore une fois le procédé d'Abel que, pour tout entier $n > 1$,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k z_0} e^{\lambda_k z_0} \right| \leq K \sum_{k=1}^{n-1} (e^{\lambda_{k+1} \operatorname{Re} z_0} - e^{\lambda_k \operatorname{Re} z_0}) + K e^{\lambda_n \operatorname{Re} z_0} \leq 2K e^{\lambda_n \operatorname{Re} z_0},$$

où K est un majorant du module des sommes partielles de la série de Dirichlet $(a_k e^{-\lambda_k z_0})_k$. Ceci montre que l'on a nécessairement $l \leq \operatorname{Re} z_0$. Ceci nous montre donc que si $l > 0$, l'abscisse de convergence x_c satisfait $x_c \geq l$. Comme on sait aussi que si $l \leq 0$, $x_c \leq 0$, la proposition est démontrée. \diamond

Remarque 1.1 Lorsque $x_c > 0$, nous avons démontré que l'on avait en fait $x_c = l$.

Lorsque $x_c < 0$, on a aussi une information nous permettant de retrouver l'abscisse de convergence à partir de la suite des coefficients. On a en effet dans ce cas la

Proposition 1.4 Si l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet (1.1) est strictement négative, on a $x_c = l'$, où

$$l' = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right|}{\lambda_{n+1}}.$$

Preuve. Si l'on a $l' > 0$, on peut construire une sous suite d'entiers telle que

$$\frac{\log \left| \sum_{k=n_p+1}^{\infty} a_k \right|}{\lambda_{n_p+1}} > \frac{l'}{2}.$$

Ceci implique

$$\left| \sum_{k=n_p+1}^{\infty} a_k \right| \geq e^{\frac{l' \lambda_{n_p+1}}{2}},$$

et donc la série de Dirichlet (1.1) diverge en 0 car son terme général ne tend pas vers 0. On aurait donc $x_c > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons que la série de Dirichlet (1.1) converge en un point x_0 réel strictement négatif. Ceci signifie que la série de terme général $(a_k e^{-\lambda_k z_0})_k$ converge et en particulier que la suite

$$r_p(x_0) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z_0}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, pour p assez grand, on a $|r_k(x_0)| \leq 1$ pour tout $k \geq p$. On peut à nouveau utiliser Abel et écrire, si $q > p$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^q a_k &= (r_p(x_0) - r_{p+1}(x_0))e^{\lambda_{p+1}x_0} + \dots + (r_{q-1}(x_0) - r_q(x_0))e^{\lambda_q x_0} = \\ &= r_p(x_0)e^{\lambda_{p+1}x_0} - \sum_{k=p+1}^{q-1} r_k(x_0)(e^{\lambda_k x_0} - e^{\lambda_{k+1}x_0}) - r_q(x_0)e^{\lambda_q x_0}. \end{aligned}$$

On a donc l'estimation

$$\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \right| \leq 2e^{\lambda_{p+1}x_0}.$$

Ceci implique (en prenant le logarithme des deux membres) que $l' \leq x_0$. Ainsi on a toujours $l' \leq x_c$ lorsque $x_c \leq 0$.

Si $x_c < 0$, on a, d'après ce qui précède, $l' < 0$. On se donne ϵ strictement positif, tel que $l' + 2\epsilon$ reste strictement négatif et l'on considère x de partie réelle strictement négative et au moins égale à $l' + 2\epsilon$. On a, pour p assez grand, pour tout $k \geq p$,

$$\left| \sum_{k+1}^{\infty} a_k \right| \leq e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}}.$$

On note $r_k = a_{k+1} + \dots$. On reprend la méthode d'Abel pour estimer, si $q > p$ et p est assez grand

$$\left| \sum_{k=p+1}^q a_k e^{-\lambda_k x} \right|.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p+1}^q a_k e^{-\lambda_k x} &= (r_p - r_{p+1})e^{-\lambda_{p+1}x} + \dots + (r_{q-1} - r_q)e^{-\lambda_q x} = \\ &= r_p e^{-\lambda_{p+1}x} + \sum_{k=p+1}^{q-1} r_k (e^{-\lambda_{k+1}x} - e^{-\lambda_k x}) - r_q e^{-\lambda_q x}. \end{aligned}$$

Si l'on utilise l'estimation $r_k \leq e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}}$ pour $k \geq p$ et p assez grand, on trouve

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p+1}^q a_k e^{-\lambda_k x} \right| &\leq e^{-\lambda_{p+1}(x-l'-\epsilon)} + x \sum_{k=p+1}^{q-1} e^{(l'+\epsilon)\lambda_{k+1}} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-tx} dt + e^{\lambda_{q+1}(l'+\epsilon)-\lambda_q x} \\ &\leq e^{-\lambda_{p+1}(x-l'-\epsilon)} + x \sum_{k=p+1}^{q-1} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} e^{-t(x-l'-\epsilon)} dt + e^{-\lambda_{q+1}(x-l'-\epsilon)} \\ &\leq e^{-\lambda_{p+1}x} + x \int_{\lambda_{p+1}}^{\infty} e^{-et} dt + e^{-\lambda_{q+1}\epsilon}. \end{aligned}$$

Lorsque p tend vers l'infini, cette quantité tend vers 0 et on a donc prouvé la convergence en x de la série de Dirichlet. Ceci nous prouve donc que $l' \geq x_c$ et achève la preuve. \diamond

Un avatar des preuves développées précédemment concerne les estimations de la somme d'une série de Dirichlet à l'intérieur du demi-plan de convergence. Par exemple, si $L > x_c$, on a grâce à la méthode d'Abel

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k z} \right| \leq K \left(\frac{|z-L|}{\operatorname{Re} z - L} (e^{-\lambda_1(\operatorname{Re} z - L)} - e^{-\lambda_n(\operatorname{Re} z - L)}) + e^{-\lambda_n(\operatorname{Re} z - L)} \right), \quad (1.9)$$

où K désigne un majorant de la suite des modules des sommes partielles de la série (convergente) de terme général $a_k e^{-L\lambda_k}$. Par conséquent, si $L > x_c$, il existe une constante M telle que

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z \geq L \\ |\operatorname{Im} z| \geq 1 \end{cases} \implies \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \right| \leq M |\operatorname{Im} z|. \quad (1.10)$$

Mieux, comme il existe (par (1.9)) une constante K (dépendant seulement de L) telle que pour tout entier $n \geq 1$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} \right| \leq K \frac{|z - \frac{L+x_c}{2}|}{\operatorname{Re} z - \frac{L+x_c}{2}} e^{-\lambda_n (\operatorname{Re} z - \frac{L+x_c}{2})},$$

on a, si $\operatorname{Re} z \geq L$ et

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z},$$

$$\frac{|f(z)|}{|\operatorname{Im} z|} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| e^{-\lambda_1 \frac{L+x_c}{2}} + K \left(\frac{1}{|\operatorname{Im} z|} + \frac{1}{L - \frac{L+x_c}{2}} \right) e^{-\lambda_n (\operatorname{Re} z - \frac{L+x_c}{2})}.$$

On en déduit que uniformément par rapport à $x \geq L$, on a,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{|f(x+iy)|}{|y|} = 0. \quad (1.11)$$

Il s'agit d'une propriété de croissance modérée sur les lignes verticales du plan complexe. Une telle propriété assurera la convergence d'intégrales sur de telles lignes verticales.

Il est intéressant de remarquer que la connaissance de la somme d'une série de Dirichlet dans son demi-plan de convergence nous donne la liste à la fois des fréquences et des coefficients. On a la proposition importante suivante

Proposition 1.5 *Soit f la somme d'une série de Dirichlet dans son demi-plan de convergence $\operatorname{Re} z > x_c$. Soit $\gamma > \max(0, x_c)$. Alors la fonction de $]0, \infty[$ dans \mathbb{C}*

$$u \mapsto F(u) = \frac{1}{2i\pi} \operatorname{PV} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{u\zeta} d\zeta := \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{f(\zeta)}{\zeta} e^{u\zeta} d\zeta$$

est bien définie, est une fonction de la variable u présentant des discontinuités de première espèce aux points λ_k , avec

$$F(u) = \sum_{k=1}^n a_k, \quad u \in]\lambda_n, \lambda_{n+1}[. \quad (1.12)$$

Preuve. La preuve repose juste sur la remarque suivante; si $\gamma > 0$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{1}{\zeta} e^{u\zeta} d\zeta$$

existe pour tout $u \in \mathbb{R}$ et vaut 1 si $u > 0$, 0 si $u < 0$ et $1/2$ si $u = 0$. Pour voir cela, on applique le théorème de Cauchy avec comme contour la frontière orientée dans le sens convenable d'un rectangle $[\gamma, \tilde{\gamma}] \times [-R, R]$ lorsque $u < 0$, $[-\tilde{\gamma}, \gamma] \times [-R, R]$

($\tilde{\gamma} > 0$) lorsque $u > 0$. Par exemple, si $u > 0$, on a, après avoir fait tendre $\tilde{\gamma}$ vers $+\infty$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{e^{u\zeta}}{\zeta} d\zeta - 1 = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{-\infty}^{\gamma} \frac{e^{u(t+iR)}}{t+iR} dt - \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{e^{u(t-iR)}}{t-iR} dt \right).$$

Il suffit de majorer le module de cette expression et de constater que ce module tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Le calcul dans le cas $u < 0$ est similaire (les rectangles sont dans ce cas à droite et le contour n'enserme aucun pôle). Dans le cas $u = 0$, on peut faire le calcul à la main de

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma+iR} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{dt}{\gamma+it} = \frac{\gamma}{\pi} \int_0^R \frac{dt}{\gamma^2+t^2} = \frac{1}{\pi} \text{Arctg}(R/\gamma).$$

Cette quantité tend vers $1/2$ si R tend vers l'infini.

Revenons à la preuve de notre proposition. Fixons n et prenons u dans $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$. Posons

$$f_n(z) = e^{uz} f(z) - \sum_{k=1}^n a_k e^{(u-\lambda_k)z} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k e^{-(\lambda_k-u)z}.$$

On a, du fait des remarques ci dessus

$$\frac{1}{2i\pi} \text{VP} \int_{\gamma+iR} \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{(u-\lambda_k)\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Mais on peut écrire

$$f_n(z) = e^{-(\lambda_{n+1}-u)z} F_n(z),$$

où

$$F_n(z) := \sum_{k \geq n+1} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_{n+1})z}$$

est la somme d'une série de Dirichlet d'abscisse de convergence aussi égale à x_c . On applique une nouvelle fois la formule de Cauchy pour exprimer

$$\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{F_n(\zeta) e^{-(\lambda_{n+1}-u)\zeta}}{\zeta} d\zeta$$

en utilisant la frontière du rectangle $[\gamma, \tilde{\gamma}] \times [-R, R]$. Si nous fixons R et faisons tendre $\tilde{\gamma}$ vers l'infini, nous obtenons, tenant compte du contrôle (1.10)

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} \frac{F_n(\zeta) e^{-(\lambda_{n+1}-u)\zeta}}{\zeta} d\zeta = \\ & = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{F_n(t+iR)}{t+iR} e^{-(\lambda_{n+1}-u)(t+iR)} dt - \int_{\gamma}^{\infty} \frac{F_n(t-iR)}{t-iR} e^{-(\lambda_{n+1}-u)(t-iR)} dt. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le contrôle (1.11) qui nous assure que pour R assez grand, on a, pour tout $t \geq \gamma$,

$$\frac{|F_n(t \pm iR)|}{|t \pm iR|} \leq \epsilon.$$

Donc, si l'on fait tendre R vers $+\infty$, on a bien montré

$$\text{VP} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{F_n(\zeta) e^{-(\lambda_{n+1}-u)\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0,$$

ce qui achève bien la preuve de la proposition. \diamond

1.2 Densité de la suite des exposants.

On s'intéresse dans ce paragraphe à la suite des exposants $(\lambda_k)_k$ d'une série de Dirichlet. On dit que la suite est mesurable et de densité D si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D.$$

On parle pour les suites de *densité maximum*.

Définition 1.1 Une suite $(\lambda_k)_k$ de nombres réels positifs a une densité maximum égale à D lorsque l'ensemble $E[(\lambda_k)_k]$ des nombres tels δ tels que l'on puisse construire une suite de densité δ contenant la suite (λ_k) comme sous-suite est un ensemble borné. La borne supérieure de cet ensemble est appelée densité maximum. Si l'ensemble $E[(\lambda_k)_k]$ n'est pas borné, on dit que la suite $(\lambda_k)_k$ a une densité infinie.

Le calcul de la densité maximum d'une suite se fait grâce à un résultat de Polya.

Proposition 1.6 Soit $(\lambda_k)_k$ une suite de nombres réels positifs; pour tout $r > 0$, notons $N(r)$ le nombre de valeurs de la suite appartenant à l'intervalle $[0, r]$. Alors, la suite possède une densité maximum finie si et seulement si

$$\sup_{0 < \xi < 1} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r(1 - \xi)} < \infty.$$

Si tel est le cas, la densité maximum finie D vaut

$$D = \sup_{0 < \xi < 1} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r(1 - \xi)} < \infty. \quad (1.13)$$

Deux exemples d'application de cette proposition.

1. Si la suite $(\lambda_k)_k$ satisfait

$$\rho := \liminf_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0, \quad (1.14)$$

alors la suite $(\lambda_k)_k$ est à densité maximum finie. En effet, soit $\epsilon > 0$. Pour k assez grand (dépendant de ϵ), l'écart entre deux λ_k consécutifs est au moins égal à $(1 - \epsilon)\rho$; donc pour ξ fixé dans $]0, 1[$ et r assez grand (en fonction de ϵ et ξ), le nombre de valeurs λ_k appartenant à $[0, r]$ sans appartenir à $[0, \xi r]$ est au plus égal à $\frac{r(1-\xi)}{(1-\epsilon)\rho}$. Donc, pour r assez grand (ceci dépend de ξ et de ϵ , mais ce n'est pas grave),

$$\frac{N(r) - N(\xi r)}{r(1 - \xi)} \leq \frac{1}{(1 - \epsilon)\rho}.$$

Comme ϵ est arbitraire, on déduit de la Proposition 1.5 que la suite est à densité maximum finie, avec $D \leq \frac{1}{\rho}$.

2. La suite $(\log k)_k$ est une suite de densité infinie; en effet on a dans ce cas $N(r) - N(r\xi) \sim e^r - e^{\xi r} \sim e^r$ comme fonction de r lorsque ξ est fixé. Donc $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) - N(r\xi)}{r(1 - \xi)} = +\infty$. La plupart des séries de Dirichlet intervenant dans les problèmes issus de la dynamique et présentés ultérieurement auront une suite d'exposants de densité infinie.

Preuve de la Proposition 1.6. Supposons que la suite $(\lambda_k)_k$ ait une densité maximum finie D . Elle est donc sous suite d'une suite $(\tilde{\lambda}_k)_k$ de densité D . On note, pour $r > 0$, $n(r)$ le nombre de points de la suite $(\tilde{\lambda}_k)_k$ qui ne sont pas dans la suite $(\lambda_k)_k$, mais sont dans $[0, r]$. On a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) + n(r)}{r} = D$$

puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\tilde{\lambda}_k} = D$. On notera par la suite

$$\theta(r) := \frac{N(r) + n(r)}{r} - D.$$

Notons que la fonction n est une fonction croissante de r , d'où, si $r_1 > r_2$, et $\theta(r) = \frac{N(r) + n(r)}{r} - D$,

$$Dr_1 - N(r_1) + r_1\theta(r_1) \geq Dr_2 - N(r_2) + r_2\theta(r_2). \quad (1.15)$$

S'il existait une autre fonction croissante \tilde{n} telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) + \tilde{n}(r)}{r} = \tilde{D} < D,$$

alors, en adjoignant à la suite λ_k tous les nombres ν_l tels que

$$\nu_k = \inf\{x, \tilde{n}(x) = k\}, \quad k = 1, \dots, \infty$$

on construirait une suite dont la suite $(\lambda_k)_k$ serait une sous-suite et qui aurait une densité $\tilde{D} < D$, ce qui est impossible.

Fixons $\xi \in]0, 1[$. On a, par (1.15), pour tout $r > 0$,

$$Dr - N(r) + r\theta(r) \geq \xi Dr - N(\xi r) + \xi r\theta(\xi r),$$

soit encore

$$D - \frac{N(r) - N(\xi r)}{r(1 - \xi)} \geq \frac{\xi\theta(\xi r) - \theta(r)}{1 - \xi}. \quad (1.16)$$

De plus D est le plus petit nombre de tous les nombres \tilde{D} pour lesquels il est possible que (1.15) soit satisfaite pour tout $r_1 > r_2 > 0$ (avec \tilde{D} à la place de D , une fonction croissante \tilde{n} à la place de n , $\tilde{\theta}$ à la place de θ) et, *qu'en même temps*, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(r) = 0$.

Or le fait que $\tilde{\theta}$ tende vers 0 est équivalent au fait que pour tout $\xi \in]0, 1[$, on ait

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\xi\tilde{\theta}(\xi r) - \tilde{\theta}(r)) = 0.$$

On en déduit donc, si la suite à une densité maximum finie D , que D est le plus petit nombre tel que

$$D - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r) - N(\xi r)}{r(1 - \xi)} \geq 0,$$

et cela pour toute valeur de $\xi \in]0, 1[$. D'où la proposition. ⁴ \diamond

4. De fait, ce résultat peut être précisé car l'on peut remplacer dans (1.13) $\sup_{0 < \xi < 1}$ par $\lim_{\xi \rightarrow 1-}$; ce résultat est du à Polya, voir le traité de V. Bernstein, pp. 255-256.

1.3 Problèmes liés à la condensation de la suite des exposants.

Le fait que la suite $(\lambda_k)_k$ soit par exemple une suite mesurable telle que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D < \infty$$

n'exclut pas qu'il puisse y avoir des phénomènes d'accumulation de points, au sens où les points de la suite (λ_k) peuvent se présenter par paquets plutôt que de se présenter isolés. On peut par exemple prendre l'exemple suivant

$$\lambda_{k^2+l} = k^2 + le^{-k^2}, \quad l = 0, \dots, 2k; \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Cette suite, bien que de densité 1, présente des paquets de points *arbitrairement voisins*, paquets pouvant contenir un nombre *arbitrairement grand* de points. On ce doute bien que ces phénomènes de condensation seront appelés à jouer un rôle important concernant l'étude des séries de Dirichlet présentant les ensembles d'exposants correspondants. Nous devons donc introduire une notion quantifiant ces phénomènes de condensation. Nous le ferons tout d'abord pour les suites mesurables, puis nous essaierons d'envisager des situations plus générales.

a. Le cas des suites mesurables.

Pour rendre compte de manière quantitative du phénomène de condensation, nous disposons, pour une suite d'exposants telle que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D < \infty \tag{1.17}$$

de la possibilité de construire une fonction entière appartenant à l'algèbre des fonctions entières de type exponentiel, c'est à dire à l'algèbre

$$\text{Exp}(\mathbb{C}) := \{F \in H(\mathbb{C}), \exists A \geq 0, B \geq 0, |F(z)| \leq Ae^{B|z|}\},$$

telle que les nombres $\pm\lambda_k$, $k = 1, \dots$, en soient exactement les zéros. Ce sera cette fonction qui nous permettra de quantifier la notion de condensation.

Proposition 1.7 (Carlson) *Soit $(\lambda_k)_k$ une suite de réels strictement positifs telle que*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D.$$

Alors, la fonction

$$z \mapsto F(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$$

est une fonction entière dont les zéros sont les $\pm\lambda_k$, telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante positive $R(\epsilon)$, avec

$$|z| \geq R(\epsilon) \implies |F(z)| \leq e^{\pi(D+\epsilon)|z|}. \tag{1.18}$$

Preuve. La convergence du produit infini est assurée pour tout z puisque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(en effet, pour k assez grand, on a $\lambda \geq \frac{k}{D+\epsilon}$ du fait de l'hypothèse (1.17)). Comme il y a convergence normale sur tout compact de la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{\lambda_k^2},$$

la fonction F est bien une fonction entière. L'estimation est évidente :

$$|F(z)| \leq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_k^2}\right).$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour k assez grand ($k \geq k(\epsilon)$), on a $\lambda_k \geq \frac{k}{D+(\epsilon/2)}$. On a donc

$$|F(z)| \leq \prod_{k=1}^{k(\epsilon)-1} \left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_k^2}\right) \prod_{k \geq k(\epsilon)} \left(1 - \frac{(D + (\epsilon/2))(i\pi|z|)^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Or on connaît la formule classique, valable pour tout x complexe, et se déduisant aisément du développement ⁵

$$\cotan x = \frac{1}{x} + \sum_{k \geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2 \pi^2},$$

à savoir

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

valable pour tout $x \in \mathbb{C}$. On a donc

$$|F(z)| \leq \left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_1^2}\right)^{k(\epsilon)-1} \frac{\operatorname{sh} \pi(D + (\epsilon/2))|z|}{(D + (\epsilon/2))|z|} \leq e^{\pi(D+(\epsilon/2))|z|}.$$

Pour $|z| \geq R(\epsilon)$, on a

$$\left(1 + \frac{|z|^2}{\lambda_1^2}\right)^{k(\epsilon)-1} \leq e^{\frac{\pi D \epsilon |z|}{2}}.$$

La proposition est donc démontrée. \diamond

Remarque 1.2 Ces estimations de la fonction F sont grossières et peuvent être précisées le long de l'axe réel. Il est judicieux de comparer la croissance de F à celle de l'une ou l'autre des deux fonctions entières, toutes deux correspondant à des suites à densité D bien particulières

$$\cos \pi D z := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{1}{D}(k - \frac{1}{2})\right)^2}\right), \quad \frac{\sin \pi D z}{\pi D z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{k}{D}\right)^2}\right).$$

5. Voir Berenstein-Gay, exemple 2.6.17, p. 172, faire aussi l'exercice 8, p. 232.

La première suite est la suite $\mu_k = \frac{1}{D}(k - \frac{1}{2})$, la seconde est la suite $\tilde{\mu}_k = k/D$. Étant donnée une autre suite d'exposants mesurable et de densité D , il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un nombre $\gamma(\epsilon)$ (lui ne dépend que de D et ϵ), un nombre $R_0(\epsilon)$ (ne dépendant que du maximum des modules des nombres k/λ_k et de ϵ), tel que pour tout z dans le secteur tronqué

$$\{z, \operatorname{Re} z > 0, |\arg z| \leq \gamma(\epsilon), |z| \geq R_0(\epsilon)\}$$

la majoration

$$|F(z)| \leq e^{\epsilon|z|}.$$

La preuve de ce résultat résulte du théorème IV, p. 271, dans le livre de V. Bernstein (voir aussi pp. 278-279). Disons juste brièvement que lorsque z est hors de l'union des disques de centres les points k/D et de rayon $\frac{1}{4D}$, on estime dans un premier temps

$$\left| \frac{F(z)}{\frac{\sin \pi D z}{\pi D z}} \right| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}}{1 - \left(\frac{k}{D}\right)^2} \right|,$$

tandis que lorsque z est hors de l'union des disques de centres les points $\frac{1}{D}(k - \frac{1}{2})$, on estime au départ

$$\left| \frac{F(z)}{\cos \pi D z} \right| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}}{1 - \left(\frac{1}{D}(k - \frac{1}{2})\right)^2} \right|.$$

Nous utiliserons peu ce résultat mais il mérite d'être mentionné ici. Il existe aussi des minoration du type

$$|F(z)| \geq e^{-\epsilon|z|}$$

valables, elles dans le même secteur tronqué (dépendant de ϵ , de D et du sup des λ_k/k), mais valables cette fois hors d'un ensemble d'exclusion contenant les points $(\lambda_k)_k$ et plus difficile à décrire.

Le fait qu'existe une telle fonction F nous permet de définir la notion d'indice de condensation pour une telle suite d'exposants.

Définition 1.2 Si $(\lambda_k)_k$ est une suite d'exposants mesurable telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} = D,$$

on définit l'indice de condensation de la suite comme la quantité

$$\delta := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \frac{1}{|F'(\lambda_k)|},$$

où

$$F(z) := \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$$

est la fonction entière introduite dans la proposition 1.7.

Notons que, si $\delta < \infty$, on a, pour $\epsilon > 0$, pour k assez grand (dépendant de ϵ),

$$|F'(\lambda_k)| \geq e^{-(1+\epsilon)\delta\lambda_k}.$$

On sait aussi que la fonction F a une croissance contrôlée en $e^{\pi(D+\epsilon)|z|}$, c'est aussi le cas de ses dérivées successives (en utilisant la formule de Cauchy). En particulier, on a, pour une certaine constante A_ϵ ,

$$|F''(z)| \leq A(\epsilon)e^{\pi(D+\epsilon)|z|}.$$

Si l'on choisit $r(\lambda_k) \equiv \eta_\epsilon e^{-(1+\epsilon)\delta\lambda_k - \pi(D+\epsilon)\lambda_k}$, avec η indépendant de k mais suffisamment petit, alors le disque $D(\lambda_k, r(\lambda_k))$ ne contient qu'un seul zéro de F et de plus, on a sur la frontière de ce disque, une minoration dy type

$$|F(z)| \geq \eta'_\epsilon e^{-(2(1+\epsilon)\delta + \pi(D+\epsilon))|z|}$$

(cela résulte de l'inégalité des accroissements finis). Ceci implique que, pour un choix convenable de $\tilde{\eta}_\epsilon$ et C (en fait $C_\epsilon = 2\delta + \pi D + \epsilon$, avec ϵ arbitrairement petit), les composantes connexes de l'ensemble

$$S(F, \tilde{\eta}_\epsilon, C_\epsilon) := \{z \in \mathbb{C} \mid |F(z)| \leq \tilde{\eta}_\epsilon e^{-C|z|}\}$$

contiennent *au plus* un point de la suite $(\lambda_k)_k$. On verra plus loin que ceci s'interprète en disant que l'ensemble $\{F = 0\}$ est un *ensemble d'interpolation* pour l'algèbre Exp.

b. Groupements dans les suites d'exposants.

Soit une suite d'exposants $(\lambda_k)_k$. Nous envisageons dans cette section la possibilité de l'organiser en groupes pour essayer de comprendre différemment (et de façon plus directe et peut être plus intuitive) cette notion d'indice de concentration.

Définition 1.3 *Étant donnée une suite d'exposants $(\lambda_k)_k$, nous appellerons suite "serrée" de groupes extraits de la suite $(\lambda_k)_k$ toute suite*

$$\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k, \dots$$

de groupes d'exposants consécutifs extraits de la suite, chaque groupe \mathcal{G}_k s'écrivant, une fois ordonné dans l'ordre croissant

$$\mathcal{G}_k = \{\lambda_{\nu_k+1}, \dots, \lambda_{\nu_k+p_k}\},$$

l'épithète "serrée" correspondant aux deux contraintes suivantes sur l'évolution de ces groupes \mathcal{G}_k lorsque k tend vers l'infini

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{\lambda_{\nu_k+1}} &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{\nu_k+p_k}}{\lambda_{\nu_k+1}} &= 1. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Pour chaque groupe \mathcal{G}_k , nous pouvons définir un indice de condensation (il s'agit cette fois d'un ensemble fini) en utilisant la même idée que celle que nous venons d'utiliser au **3.a.**, à savoir

$$\delta(\mathcal{G}_k) := \sup_{1 \leq l \leq p_k} \frac{1}{\lambda_{\nu_k+l}} \log \left(\frac{(p_k - 1)!}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{p_k} |\lambda_{\nu_k+j} - \lambda_{\nu_k+l}|} \right). \tag{1.20}$$

Cela nous conduit à la définition suivante

Définition 1.4 On définit l'indice de condensation de la suite d'exposants $(\lambda)_k$ comme la borne supérieure, pour toutes les suites serrées $(\mathcal{G}_k)_k$ de groupes extraits de la suite $(\lambda_k)_k$, des quantités

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{G}_k).$$

Il s'agit certes là d'une définition qui n'est guère maniable. Son défaut est qu'elle ne rend pas compte des questions de condensation lorsque la densité maximum de la suite est infinie. Nous avons en effet la proposition suivante :

Proposition 1.8 L'indice de condensation d'une suite de densité maximum infinie est infini. Pour les suites mesurables, cette définition coïncide avec la définition 1.2 précédente.

Preuve. Nous ne donnerons pas tous les détails de la preuve, qui est un peu lourde. Nous renvoyons au traité de V. Bernstein (pp. 264-265 pour ce qui concerne les suites à densité infinie, pp. 287-289 pour ce qui concerne l'équivalence de nos deux définitions pour les suites mesurables).

Le cas de la densité infinie.

Soit $(\lambda_k)_k$ une suite d'exposants de densité infinie. D'après la proposition 1.5, il existe, pour chaque entier k , un nombre $\xi_k \in]0, 1[$ (même à $]1/2, 1[$ si l'on admet le résultat plus précis de Polya mentionné en note à la fin de la preuve de cette proposition), un nombre $r_k > 0$ tels que

$$N(r_k) - N(\xi_k r_k) > k(1 - \xi_k)r_k.$$

On peut d'ailleurs supposer que la suite $(r_k)_k$, comme la suite $(\xi_k r_k)_k$, tend vers $+\infty$. Soit

$$p_k = \left[\frac{\xi_k r_k}{\sqrt{\log k}} \right] + 1, \quad k = 2, 3, \dots,$$

Si l'on note $N_k = N(r_k) - N(\xi_k r_k)$, l'intervalle $[\xi_k r_k, r_k]$ contient au moins $\left[\frac{N_k}{p_k} \right]$ paquets de p_k points de la suite d'exposants consécutifs. L'un de ces groupes est forcément inclus (c'est une version analytique du fameux principe des tiroirs) dans un intervalle de longueur au plus

$$\frac{(1 - \xi_k)r_k}{\left[\frac{N_k}{p_k} \right]} \leq \rho_k \sim \frac{p_k}{k}.$$

On peut minorer l'indice de condensation d'un tel paquet \mathcal{G}_k suivant la formule (1.20) :

$$\delta(\mathcal{G}_k) \geq \frac{1}{\xi_k r_k} \log \left((p_k - 1)! (k/p_k)^{p_k - 1} \right) \geq \frac{p_k - 1}{\xi_k p_k} \log(k/e)$$

(au moins asymptotiquement) à cause de la formule de Stirling

$$\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi} e^{-t} t^{t - \frac{1}{2}}, \quad t \mapsto +\infty.$$

Avec le choix de p_k que nous avons pris, l'indice de condensation du paquet \mathcal{G}_k ainsi construit sera supérieur à

$$\frac{\log k - 1}{\sqrt{\log k}}.$$

Cette quantité tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini. Enfin, les conditions (1.19) sont satisfaites pour cette suite de paquets $(\mathcal{G}_k)_k$ car

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{\lambda_{\nu_k+1}} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{\xi_k r_k} = 0,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{\nu_k+p_k}}{\lambda_{\nu_k+1}} = 1$$

puisque

$$\frac{\lambda_{\nu_k+p_k} - \lambda_{\nu_k+1}}{\lambda_{\nu_k+1}} \leq \frac{p_k}{k} \frac{1}{\xi_k r_k} = \mathbf{o}(1).$$

Ceci achève la preuve de la première partie de notre proposition.

Le cas des suites mesurables.

Considérons un paquet de points consécutifs extraits de la suite des exposants $(\lambda_k)_k$. Associons à ce paquet \mathcal{G} (qui sera par exemple $\{\lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_{\nu+p}\}$) le polynôme

$$P_{\mathcal{G}}(z) = \prod_{j=1}^p (z - \lambda_{\nu+j}).$$

Notons, pour $j = 1, \dots, p$,

$$\eta_j = \frac{1}{(p-1)!} P'_{\mathcal{G}}(\lambda_{\nu+j}).$$

On rappelle (c'était la formule (1.20)) que l'indice de condensation associé au paquet est exactement

$$\delta(\mathcal{G}) := \sup_j \frac{1}{\lambda_{\nu+j}} \log \frac{1}{\eta_j}.$$

Posons

$$F_{\mathcal{G}}(z) := \prod_{l=1}^p \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{\nu+l}^2}\right).$$

On a, pour tout j entre 1 et p ,

$$\left| \frac{F'_{\mathcal{G}}(\lambda_{\nu+j})}{\eta_j} \right| = (p-1)! \prod_{l=1}^p \frac{\lambda_{\nu+l} + \lambda_{\nu+j}}{\lambda_{\nu+l}^2}.$$

Si l'on note

$$\tau = \tau(\mathcal{G}) = \frac{\lambda_{m+p}}{\lambda_{m+1}}$$

le rapport des exposants extrêmes du paquet, on a les estimations

$$1 < \prod_{l=1}^p \frac{\lambda_{\nu+l} + \lambda_{\nu+j}}{\lambda_{\nu+l}} < (1 + \tau(\mathcal{G}))^p, \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.21)$$

et, toujours grâce à la formule de Stirling,

$$\frac{1}{p-1} \left(\frac{p-1}{\lambda_{\nu+p}}\right)^p < (p-1)! \prod_{l=1}^p \frac{1}{\lambda_{\nu+l}} < \left(\frac{p}{\lambda_{\nu+1}e}\right)^p. \quad (1.22)$$

Supposons maintenant que l'on n'ait plus un seul paquet, mais une suite serrée de paquets extraits $(\mathcal{G}_k)_k$,

$$\mathcal{G}_k := \{\lambda_{\nu_k+1}, \dots, \lambda_{\nu_k+p_k}\},$$

la suite ν_k tendant bien sûr vers $+\infty$. Fixons $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. Si la suite d'exposants est mesurable et de densité D , alors on peut faire en sorte que, pour k assez grand, on ait

$$D - \epsilon < \frac{k}{\lambda_{\nu_k}} < D + \epsilon$$

et aussi

$$1 + \tau(\mathcal{G}_k) < (1 + \epsilon).$$

Combinant (1.21) et (1.22), on obtient, pour k assez grand, pour tout j entre 1 et p_k ,

$$\frac{1}{p_k - 1} \left(\frac{(D - \epsilon)(p_k - 1)}{e(\nu_k + p_k)} \right)^{p_k} \leq \left| \frac{F'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})}{\eta_{\nu_k+j}} \right| \leq \left(\frac{(1 + \epsilon)(D + \epsilon)p_k}{e\nu_k} \right)^{p_k},$$

d'où

$$\frac{1}{p_k} \left(\frac{(D - \epsilon)p_k}{2e(\nu_k + p_k)} \right)^{p_k} \leq \left| \frac{F'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})}{\eta_{\nu_k+j}} \right| \leq \left(\frac{(1 + \epsilon)(D + \epsilon)p_k}{e\nu_k} \right)^{p_k}.$$

Si l'on choisit k assez grand (on utilise toujours le fait que la suite de groupe est serrée), on en déduit que l'on peut faire en sorte que

$$e^{-2\epsilon\lambda_{k+1}} \leq \left| \frac{F'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})}{\eta_{\nu_k+j}} \right| < 1, \quad j = 1, \dots, p_k. \quad (1.23)$$

Mais si nous notons

$$F(z) = F_{\mathcal{G}_k}(z)H_{\mathcal{G}_k}(z),$$

on a, pour tout j entre 1 et p_k ,

$$F'(\lambda_{\nu_k+j}) = F'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})H_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j}).$$

Il nous reste à estimer supérieurement la module de $H_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})$, $j = 1, \dots, p_k$. Mais remarquons que pour k assez grand, tous ces points λ_{ν_k+j} , $j = 1, \dots, p_k$, appartiennent au domaine

$$U_k := \{z \in \mathbb{C}, \frac{\nu_k}{2D} \leq |z| \leq \frac{2\nu_k}{D}\}$$

et sont réels positifs.

On vérifie, si l'on a un tel point z , et que

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{G}_k}(z) &: = \prod_{j=1}^{p_k} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\nu_k+j}{D}\right)^2} \right) \\ \widetilde{K}_{\mathcal{G}_k}(z) &: = \prod_{j=1}^{p_k} \left(1 - \frac{z^2}{\left[\left(\nu_k+j-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{D}\right]^2} \right) \end{aligned}$$

alors, on a nécessairement, lorsque k est assez grand, l'une des deux estimations

$$|K_{\mathcal{G}_k}(z)| \geq e^{-\epsilon|z|}$$

$$\text{ou} \\ |\widetilde{K}_{\mathcal{G}_k}(z)| \geq e^{-\epsilon|z|}. \quad (1.24)$$

On a besoin, pour obtenir une telle inégalité, d'être certain que p_k/ν_k est arbitrairement petit, mais cette condition est ici automatiquement remplie si k est assez grand. Pas de difficulté ici, sinon techniques (la formule de Stirling revient à tour de bras); pour plus de détails sur cet argument, voir le livre de Bernstein, pp. 283-284. Notons que l'argument utilisé ici est le même que celui qui intervient dans la démonstration du Lemme de Cartan-Boutroux (voir le livre de Berenstein-Gay, pp. 360-361). La première inégalité (dans (1.24)) est satisfaite si le nombre $D|z|$ satisfait une des inégalités

$$\begin{cases} D|z| \leq \nu_k + \frac{3}{4} \\ \nu_k + j + \frac{1}{4} \leq D|z| \leq \nu_k + j + \frac{3}{4} \text{ pour un } j \text{ dans } \{1, \dots, p_k - 1\} \\ \nu_k + p_k + \frac{1}{4} \leq D|z| \end{cases}, \quad (1.25)$$

la seconde inégalité (toujours dans (1.24)) est elle satisfaite lorsque

$$\nu_k + j - \frac{1}{4} < D|z| < \nu_k + j + \frac{1}{4} \text{ pour un } j \text{ dans } \{1, \dots, p_k - 1\}. \quad (1.26)$$

Ces deux systèmes de conditions (1.25) et (1.26) sont exclusifs l'un de l'autre. On admettra qu'il existe $R_0(\epsilon)$ et $\gamma(\epsilon)$, indépendants du paquet \mathcal{G}_k , et tels que si z est tel que $\operatorname{Re} z \geq 0$, $|\arg z| \leq \gamma(\epsilon)$, a un module strictement supérieur à $|R_0(\epsilon)|$, alors on a

$$|\mathcal{H}_{\mathcal{G}_k}(z)| |K_{\mathcal{G}_k}(z)| \leq e^{\epsilon|z|}$$

dans le premier cas et

$$|\mathcal{H}_{\mathcal{G}_k}(z)| |\widetilde{K}_{\mathcal{G}_k}(z)| \leq e^{\epsilon|z|}$$

dans le second. Ceci résulte des majorations des fonctions du type F associées à des suites mesurables le long de l'axe réel⁶, suivant la remarque 1.2. En combinant ces estimations avec les minorations (1.24), on obtient, pour k assez grand, une estimation supérieure pour $H_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})$, $j = 1, \dots, p_k$, du type

$$|H_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})| \leq e^{2\epsilon\lambda_{\nu_k+j}}, \quad j = 1, \dots, p_k.$$

Il résulte de ces estimations que l'on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{G}_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \frac{1}{|F'(\lambda_k)|} + 2\epsilon.$$

Comme ϵ était arbitraire, nous avons bien montré

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{G}_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \frac{1}{|F'(\lambda_k)|}.$$

Cette étape ne réalise qu'une moitié de la démonstration de la proposition dans le cadre des suites mesurables. Pour montrer que le nombre

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \log \frac{1}{|F'(\lambda_k)|}$$

6. Ces fonctions F sont les fonctions associées à la suite $(\lambda_k)_k$, dans laquelle on a procédé à la substitution du groupe d'exposants $\{\lambda_{\nu_k+1}, \dots, \lambda_{\nu_k+p_k}\}$ soit par le groupe $\{\frac{1}{D}(\nu_k + j), j = 1, \dots, p_k\}$, soit par le groupe $\{\frac{1}{D}(\nu_k + j - \frac{1}{2}), j = 1, \dots, p_k\}$.

est bien la borne supérieure des $\limsup \delta(\mathcal{G}_k)$ pour toutes les suites serrées possibles, il faut en construire de particulières. C'est ce que fait V. Bernstein (voir pp. 256-259, et aussi p. 288) avec la constructions d'*ensembles de voisinage* de la suite $\{\lambda_k\}$. Ces ensembles de points sont constitués d'intervalles disjoints, I_1, \dots, I_k, \dots . La construction obéit aux règles suivantes, étant donné un choix de $0 < q \ll 1/D$:

- Chacun de ces intervalles contient au moins un point de la suite des exposants.
- Tous les points de la suite sont piégés.
- Si un intervalle de la suite contient k points, la longueur de cet intervalle est comprise entre $(k + 1)q$ et $2kq$.

Le point important est que l'organisation des points de la suite d'exposants en paquets correspondants aux intervalles disjoints successifs d'un tel ensemble $E(q : (\lambda_k)_k)$ constitue une suite de groupements serrée. Nous laisserons cette construction technique de côté ici et admettrons la conclusion de la Proposition. \diamond

Chapitre 2

Effet de la suite des exposants sur le comportement de la série

2.1 Rappels d'Analyse complexe ; formule de Jensen, principe du minimum

Rappelons tout d'abord la relation entre la répartition des zéros d'une fonction holomorphe et sa croissance. À la lumière de la construction faite dans la section précédente, il est clair qu'une telle relation existe : une suite d'exposants de densité finie se présente comme l'ensemble des zéros d'une fonction de type exponentiel (par exemple). En fait, on a la

Proposition 2.1 (formule de Jensen) *Si g est une fonction holomorphe dans un disque $D(0, r_0)$ et est non nulle à l'origine, alors*

$$\int_0^{r_0} \frac{n_g(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(r_0 e^{i\theta})| d\theta - \log |g(0)|, \quad (2.1)$$

où $n_g(t)$ désigne le nombre de zéros de g dans le disque fermé de rayon t .

Cette formule de Jensen¹ est très importante car elle relie le comportement de la suite des zéros d'une fonction holomorphe à la croissance de cette fonction holomorphe. Dans l'optique que l'on suit ici, et qui consiste à attacher à la suite des exposants d'une série de Dirichlet une fonction holomorphe dont ces exposants soient les racines, elle jouera un rôle très important.

Le Principe du Minimum (ou Lemme de Cartan-Boutroux) nous précise où par exemple la fonction F associée dans le chapitre précédent à une suite d'exposants à densité n'est pas trop petite en module, ou tout du moins comment encercler de manière *quantitative* les paquets éventuels selon lesquels s'organise l'ensemble de des points $\pm\lambda_k$, $k = 1, \dots$. Nous avons vu dans ce précédent chapitre combien était délicate la minoration de F en certains points lorsque nous avons fait, pour les suites mesurables, une étude quantitative de la notion de condensation. Voici l'énoncé du lemme :

Lemme 2.1 (Cartan-Boutroux, dit aussi Principe du minimum) *Soit $R > 0$ et f une fonction holomorphe dans un disque de rayon $D(z_0, 2eR)$, continue jusqu'au*

1. Pour la preuve, voir le livre de Levin, pp. 14-15.

bord, avec $f(z_0) = 1$. Soit η un nombre positif inférieur ou égal à $3e/2$. Alors, pour tout z dans $\overline{D(z_0, R)}$, mais hors d'une union de disques dont la somme des rayons est au plus $4\eta R$, on a

$$\log |f(z)| \geq -\left(2 + \log \frac{3e}{2\eta}\right) \log \sup_{|\zeta|=2eR} |f(\zeta)|, \quad (2.2)$$

Preuve. Le lemme de Cartan-Boutroux sera pour nous un outil important. On se ramène dans un premier temps au cas où $z_0 = 0$. On note a_1, \dots, a_n les zéros de f dans le disque ouvert $D(0, 2R)$; quitte à perturber légèrement $2R$, on peut supposer que f ne s'annule pas sur le cercle de centre 0 et de rayon $2R$. On note

$$\varphi(z) = \frac{(-2R)^n}{a_1 \cdots a_n} \prod_{k=1}^n \frac{2R(z - a_k)}{(2R)^2 - \overline{a_k}z}.$$

Cette fonction vérifie $\varphi(0) = 1$ et

$$\sup_{|\zeta|=2R} |\varphi(\zeta)| \leq \frac{2R^n}{|a_1 \cdots a_n|}.$$

De plus, elle n'a pas de zéro dans le disque fermé de rayon $2R$. On peut utiliser l'inégalité de Carathéodory qui nous assure que si g est une fonction holomorphe dans un disque $D(0, r_0)$, et continue jusqu'au bord, alors, pour tout $r < r_0$, on a

$$\sup_{|\zeta| \leq r} |g(\zeta)| \leq \left(\sup_{|\zeta| \leq r_0} \operatorname{Re}(g(\zeta) - g(0)) \right) \frac{2r}{r_0 - r} + |g(0)|. \quad (2.3)$$

C'est une simple application de la formule de représentation variée de Cauchy

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} g(r_0 e^{i\theta}) \frac{z}{r_0 e^{i\theta} - z} d\theta + g(0)$$

que l'on prouvera en exercice² En utilisant (4.2) avec la fonction holomorphe $g = \log(\varphi/f)$ dans le disque de centre 0 et de rayon $2R$, on trouve

$$\log \left| \frac{f}{\varphi} \right| \geq -2 \sup_{|\zeta|=2eR} |f(\zeta)|. \quad (2.4)$$

On utilise maintenant un lemme crucial, dû à Cartan, et qui assure que si $H > 0$ et si a_1, \dots, a_n sont n points du plan complexe, alors, pour tout z hors d'une union de disques dont la somme des rayons est au plus $2H$, on a

$$|(z - a_1) \cdots (z - a_n)| \geq \left(\frac{H}{e}\right)^n.$$

On lira la preuve par exemple dans Berenstein-Gay, pp. 360-361. On a donc, pour tout z dans $\overline{D(0, R)}$, mais hors d'une union de disques dont la somme des rayons est au plus $4\eta R$,

$$(2R)^n |z - a_1| \cdots |z - a_n| \geq (2R)^n \left(\frac{2\eta R}{e}\right)^n.$$

² On peut aussi consulter le livre de B. Ja. Levin, *Distribution of zeroes of entire functions*, p. 17-18.

On a aussi

$$\prod_{k=1}^n |(2R)^2 - \overline{a_k}z| \leq (6R^2)^n.$$

Il en résulte, toujours pour un tel z , tel que $|z| \leq R$,

$$|\varphi(z)| \leq \frac{(2R)^n}{|a_1 \dots a_n|} \left(\frac{2\eta R}{e}\right)^n \frac{1}{(6R^2)^n} \geq \left(\frac{2\eta}{3e}\right)^n.$$

Appliquons maintenant la formule de Jensen à la fonction f , holomorphe dans le disque de rayon $2eR$. On a, puisque la fonction n_f est bien sûr croissante,

$$n = n_f(2R) \leq \int_{2R}^{2eR} \frac{n_f(t)}{t} dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(2eRe^{i\theta})| d\theta \leq \log \sup_{|\zeta|=2eR} |f(\zeta)|.$$

On a donc, pour tout z dans le disque fermé de rayon R et hors des disques d'exclusion

$$\log |\varphi(z)| \geq \log(2\eta/3e) \log \sup_{|\zeta|=2eR} |f(\zeta)|.$$

En combinant avec (2.4), on obtient bien (2.2) hors des disques d'exclusion. \diamond

Une application. Si l'on veut faire l'interpolation d'une fonction holomorphe h holomorphe dans un ouvert U de \mathbb{C} aux zéros d'une autre fonction F , elle aussi holomorphe dans U , qui sont encerclés par un lacet simple γ , la formule d'interpolation, qui s'écrit, lorsque les zéros sont simples

$$H(z) = \sum_{\alpha \in \text{int } \gamma, F(\alpha)=0} \frac{h(\alpha)}{F'(\alpha)} \frac{F(z) - F(\alpha)}{z - \alpha}, \quad (2.5)$$

s'écrit aussi, par la formule des résidus

$$H(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{F(\zeta)} \frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad (2.6)$$

et l'on voit qu'une minoration de $|F|$ sur le contour γ qui encercle les zéros est bien utile pour estimer la fonction interpolante H . Cette minoration nous est donnée via le principe du minimum. Notons que, si les exposants d'une série de Dirichlet sont les zéros simples d'une fonction holomorphe F (ou certains zéros de cette fonction holomorphe, comme par exemple celle que nous avons associé au chapitre 1 à une suite mesurable), alors, si $\{\lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_{\nu+p}\}$ est un paquet de points,

$$\sum_{j=1}^p \frac{h(\lambda_{\nu+j})}{F'(\lambda_{\nu+j})} e^{-\lambda_{\nu+j}z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)e^{-\zeta z}}{F(\zeta)} d\zeta,$$

où γ est un contour encerclant ces points à l'exclusion de tout autre zéro de F . On peut estimer par exemple une somme de termes de la forme

$$\sum_{j=1}^p \frac{h(\lambda_{\nu+j})}{P'(\lambda_{\nu+j})} e^{-\lambda_{\nu+j}z},$$

où $P(z) = (z - \lambda_{\nu+1}) \dots (z - \lambda_{\nu+p})$ (une telle somme se présente comme un "tronçon" d'une série de Dirichlet) en profitant du fait que les $\lambda_{\nu+j}$ sont réels et en utilisant un avatar de la formule de Taylor-Lagrange, qui nous permet d'affirmer

$$\left| \sum_{j=1}^p \frac{h(\lambda_{\nu+j})}{P'(\lambda_{\nu+j})} e^{-\lambda_{\nu+j}z} \right| \leq \frac{1}{(p-1)!} \sup_{[\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+p}]} \left| \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} [he^{-tz}] \right| \quad (2.7)$$

mais l'on peut aussi, si l'on souhaite éviter les dérivations, majorer le module d'une somme du type

$$\sum_{j=1}^p \frac{h(\lambda_{\nu+j})}{F'(\lambda_{\nu+j})} e^{-\lambda_{\nu+j}z}$$

(où F est une fonction holomorphe dont les zéros enserrés par un certain lacet γ sont exactement les points $\lambda_{\nu+j}$, $j = 1, \dots, p$) par

$$\left| \sum_{j=1}^p \frac{h(\lambda_{\nu+j})}{F'(\lambda_{\nu+j})} e^{-\lambda_{\nu+j}z} \right| \leq \frac{\text{longueur}(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{\min_{\gamma} |F|} \max_{\gamma} |h(\zeta) e^{-\zeta z}|. \quad (2.8)$$

2.2 Interpolation et indice de condensation

Dans ce paragraphe, nous montrerons que, si l'indice de condensation est grand, on peut choisir les coefficients de la série de Dirichlet de manière à ce que la différence entre les abscisses de convergence et d'holomorphie soit d'autant plus grande. Nous avons la

Proposition 2.2 *Supposons que $(\lambda_k)_k$ soit une suite d'exposants d'indice de condensation supérieur à δ . Alors il existe un choix de la suite des coefficients $(a_k)_k$ tel que pour la série de Dirichlet*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k z},$$

on ait $x_c - x_h \geq \delta$.

Preuve. On suppose que l'indice de condensation est supérieur ou égal à δ . On considère une suite serrée de paquets $(\mathcal{G}_k)_k$, consécutifs, disjoints, de la forme

$$\{\lambda_{\nu_k+1}, \dots, \lambda_{\nu_k+p_k}\},$$

avec $\lambda_{\nu_{k+1}+1} \geq 2\lambda_{\nu_k+1}$ et $\delta(\mathcal{G}_k) \mapsto \delta' \geq \delta$ (la première clause n'est pas restrictive). On introduit le polynôme

$$P_{\mathcal{G}_k}(z) := \prod_{j=1}^{p_k} (z - z_{\nu_k+j})$$

et la somme d'interpolation correspondant au paquet

$$S_k(z) = (p_k - 1)! \sum_{j=1}^{p_k} \frac{1}{P'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})} e^{-\lambda_{\nu_k+j}z}.$$

Le module de cette somme s'estime via l'inégalité (2.7). Si z est un point dans un compact K inclus dans $\text{Re } z > -\delta + 2\epsilon$, on a, pour tout $\epsilon > 0$, pour k assez grand (fonction seulement de ϵ et du compact K), l'estimation

$$|S_k(z)| \leq |z|^{p_k-1} e^{\lambda_{\nu_k+p_k}(\delta-2\epsilon)} \leq e^{\lambda_{\nu_k+1}(\delta-\epsilon)} \quad (2.9)$$

puisque la suite de paquets est supposée serrée. Considérons maintenant la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta_k \lambda_{\nu_k+1}} S_k(z).$$

Comme, pour k assez grand $\delta_k \geq \delta - \frac{\epsilon}{2}$, il y a, du fait des inégalités (2.9), convergence normale de cette série dans le compact K , et par conséquent, convergence de la série dans tout le demi-plan $\operatorname{Re} z > -\delta$.

Mais on peut écrire formellement

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta_k \lambda_{\nu_k+1}} S_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}. \quad (2.10)$$

Il suffit de poser

$$a_n = (p_k - 1)! \frac{e^{-\lambda_{\nu_k+1} \delta_k}}{P'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})} \text{ si } n = \nu_k + j, \quad j = 1, \dots, p_k,$$

et $a_n = 0$ sinon. Mais on a, par définition de l'indice de condensation d'un paquet,

$$\exists j_k \in \{1, \dots, p_k\}, \quad e^{\delta_k \lambda_{\nu_k+j_k}} = \frac{(p_k - 1)!}{|P'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j_k})|},$$

tandis que

$$\forall j \in \{1, \dots, p_k\}, \quad e^{\delta_k \lambda_{\nu_k+j}} \geq \frac{(p_k - 1)!}{|P'_{\mathcal{G}_k}(\lambda_{\nu_k+j})|}.$$

Comme p_k/λ_{ν_k+1} tend vers 0, on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |b_k|}{\lambda_k} = 0.$$

D'autre part, les λ_k qui interviennent réellement dans la série de Dirichlet (2.10) forment une suite de densité nulle, donc une suite telle que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\lambda_k} = 0 \quad (2.11)$$

(comme c'est le cas pour la suite des exposants d'une fonction entière), du fait de la lacunarité que nous avons supposé sur la suite $(\lambda_{\nu_k+1})_k$ et parce que la suite de paquets est une suite serrée. Nous avons dans ce cadre une formule exactement analogue à la formule de Cauchy-Hadamard donnant le rayon de convergence d'une série entière, à savoir

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}};$$

l'abscisse de convergence (qui est aussi dans ce cas celle de convergence absolue d'après la Proposition 1.2) d'une série de Dirichlet $\sum a_k e^{-\lambda_k z}$ telle que (2.11) est remplie est donnée par

$$x_c = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |a_k|}{\lambda_k}.$$

C'est un exercice facile qu'on laisse ici à faire. Appliquant ce résultat dans notre cadre, on voit que l'abscisse de convergence de notre série de Dirichlet (2.10) est égale à 0. Comme un autre procédé sommatoire (par groupement de termes) de la même série nous donne une série convergente dans $\operatorname{Re} z > -\delta$, on a bien, pour la série que l'on vient de construire $x_c - x_h \geq 0 - (-\delta) \geq \delta$ et la proposition est démontrée. \diamond

2.3 Autres effets de l'interpolation des coefficients ; un théorème de Cramer

L'idée d'interpolation de la suite des coefficients que nous venons d'utiliser lors de la preuve de la proposition précédente est aussi l'idée clef dans la preuve du théorème suivant, dû à Cramer (1918).

Théorème 2.1 (Cramer) *Soit une série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ ayant une abscisse de convergence finie x_c , de somme f dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > x_c$. Soit Φ une fonction entière telle que, pour tout $\epsilon > 0$, on ait, pour $|z|$ assez grand (dépendant de ϵ)*

$$|\Phi(z)| \leq e^{(B+\epsilon)|z|}. \quad (2.12)$$

Alors la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z}$$

a une abscisse de convergence $\tilde{x}_c \leq x_c + B$ et sa somme F se représente dans le demi-plan $\operatorname{Re} z \geq x_c + R$ (lorsque $R > B$) par la formule intégrale

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} f(z - \zeta) H(\zeta) d\zeta, \quad R > B, \quad (2.13)$$

où H est la fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, B)}$ donnée dans ce domaine par

$$H(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{z^{k+1}}. \quad (2.14)$$

Remarque 2.1 *C'est la première fois qu'apparaît (avec la formule de représentation (2.13)) la possibilité de représenter la somme d'une série de Dirichlet sous une autre forme que la somme d'une série (soit la série originelle, soit la série calculée via un processus de resommation comme dans la section précédente par exemple). Apparaît aussi ici pour la première fois l'opération de convolution dont on verra qu'elle sera amenée à jouer un grand rôle par la suite.*

Remarque 2.2 *Fixons z_0 tel que $\operatorname{Re} z_0 > x_c + R + 1$ avec $R > B$ et réécrivons la pseudo-formule de convolution (2.13) sous la forme*

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta-z|=R} f(\zeta) H(z + \zeta) d\zeta. \quad (2.15)$$

Si z est dans le disque ouvert $D(z_0, 1/2)$, alors le disque $\overline{D(z, R)}$ reste inclus dans le disque fermé $D(z_0, R + 1)$, lui-même entièrement dans le domaine $\operatorname{Re} z > x_c$ où la fonction f est définie (et holomorphe) et l'on peut, avec la formule de Cauchy, écrire

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta-z_0|=R+1} f(\zeta) H(z + \zeta) d\zeta, \quad |z - z_0| < 1/2. \quad (2.16)$$

Une connaissance plus précise des singularités de la fonction H à l'intérieur du disque $\overline{D(0, B)}$ conditionnerait la possibilité, avec la formule (2.16) (qui reste valide

dans tout le demi plan $\operatorname{Re} z > x_c + R + 1$ par prolongement analytique), de prolonger la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z}$$

à gauche au delà de la barrière $\operatorname{Re} z = x_c + B$. On peut aussi remarquer que si f se prolonge holomorphiquement hors de son demi-plan de convergence, la formule (2.13) autorise dans un certain domaine le prolongement de la somme de la fonction F . On peut prolonger analytiquement F le long d'une courbe issue d'un point du demi-plan $\operatorname{Re} z > B + x_c$ tant que le cercle de rayon B centré au point courant de cette courbe reste dans le domaine où f admet un prolongement holomorphe. En particulier, l'abscisse d'holomorphie \tilde{x}_h de la nouvelle série de Dirichlet est majorée par $x_h + B$, si x_h est l'abscisse d'holomorphie de la série initiale.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant les inégalités de Cauchy, on voit que pour tout $k \geq 0$, pour tout $r > 0$ assez grand

$$\frac{|\Phi^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{\sup_{|\zeta|=r} |\Phi(\zeta)|}{r^k} \leq \frac{e^{r(B+\epsilon)}}{r^k}.$$

Le minimum de la fonction

$$t \in]0, \infty[\mapsto \frac{e^{t(B+\epsilon)}}{t^k}$$

est atteint en $t = \frac{k}{B+\epsilon}$; par conséquent, si k est assez grand

$$\frac{|\Phi^{(k)}(0)|}{k!} \leq \min_{]0, \infty[} \frac{e^{t(B+\epsilon)}}{t^k} = e^k \left(\frac{B+\epsilon}{k} \right)^k.$$

Grâce à la formule de Stirling, on voit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k(\epsilon)$ assez grand, tel que, pour tout $k \geq k(\epsilon)$,

$$\frac{|\Phi^{(k)}(0)|}{k!} \leq \frac{(B+2\epsilon)^k}{k!}.$$

Il résulte de cela que la série de fonctions de z

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{z^{k+1}}$$

est normalement convergente dans $\{|z| > B\}$ et définit donc dans ce domaine une fonction holomorphe H . Cette convergence normale implique la convergence uniforme sur tout cercle $\{|z| = R\}$, avec $R > B$, et l'on a, pour tout z dans \mathbb{C} , si $R > B$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} e^{z\zeta} H(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{(k)}(0) \int_{|\zeta|=R} \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} z^k = \Phi(z). \quad (2.17)$$

Prenons maintenant z dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > B$ et fixons $R > B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en utilisant (2.17),

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{-\lambda_k(z-\zeta)} \right) H(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z}. \quad (2.18)$$

Mais la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

converge uniformément dans le disque de centre z et de rayon R si $\operatorname{Re} z > R + x_c$ car ce disque est un compact du demi-plan ouvert de convergence. Si z est ainsi fixé, la série de fonctions

$$\zeta \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k(z-\zeta)}$$

converge vers $\zeta \mapsto f(z - \zeta)$ uniformément sur $\{|\zeta| = R\}$. On peut passer à la limite quand n tend vers l'infini dans (2.18), ce qui à la fois montre la convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z}$$

en un tel z et donne la formule (2.13). \diamond

Remarque 2.3 *Si l'on prend comme exemple la fonction*

$$\Phi(z) = \sin(Bz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

on voit que la fonction H est définie dans $\{|z| > B\}$ par

$$H(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{B}{z}\right)^{2n+1} = \frac{B}{z^2 + B^2}.$$

Cette fonction se prolonge à une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{-iB, iB\}$. On peut donc, dans la formule de représentation (2.13), remplacer

$$\int_{\{|\zeta|=R\}} f(z - \zeta) H(\zeta) d\zeta$$

par

$$\frac{1}{2i\pi} \left(\int_{|\zeta+iB|=\epsilon} f(z - \zeta) H(\zeta) d\zeta + \int_{|\zeta-iB|=\epsilon} f(z - \zeta) H(\zeta) d\zeta \right).$$

Si l'on suppose que la fonction f définit une fonction holomorphe uniforme dans un domaine S (on a retiré à \mathbb{C} les points singuliers de f et toutes les coupures du plan qu'il est nécessaire de faire pour rendre f uniforme), alors, la fonction F introduite dans la formule (2.13) se prolonge en une fonction holomorphe dans la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \{S^c + \{-iB, iB\}\}$ contenant le demiplan $\operatorname{Re} z > x_c + B$. On voit donc que l'on peut obtenir pour la fonction F un domaine de prolongement analytique beaucoup plus grand que celui décrit a priori par la Remarque 2.2.

2.4 La transformation de Laplace et l'indicatrice de Polya

Au paragraphe précédent, nous avons associé à une fonction entière satisfaisant les conditions

$$\forall \epsilon > 0, \exists C(\epsilon), |\Phi(z)| \leq C(\epsilon) e^{(B+\epsilon)|z|} \quad (2.19)$$

une fonction holomorphe dans $\{|z| > B\}$, donnée dans ce domaine par

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z^{n+1}},$$

si

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Remarquons que, si z est un point tel que $\operatorname{Re} z > B$, on a

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-tz} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} t^n e^{-tz} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z^{n+1}} = H(z). \quad (2.20)$$

L'intervention somme-intégrale est licite ci-dessus car on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| t^k \leq C(\epsilon) e^{(B+\epsilon)t}$$

pour tout $\epsilon > 0$. On reconnaît bien avec (2.20) le formalisme de la transformation de Laplace. Si nous remplaçons la demi-droite $[0, \infty[$ par une demi-droite L_u issue de 0 et dirigée par un vecteur unitaire u ($|u|=1$) nous pouvons aussi remarquer que pour z dans tout demi-plan

$$\Pi_{u, \bar{D}(0, B)} := \{\operatorname{Re} zu > B\},$$

il y a convergence de l'intégrale curviligne

$$\int_{L_u} \Phi(t) e^{-zt} dt.$$

Une application immédiate de la formule de Cauchy dans un secteur angulaire (on prend le secteur triangulaire limité par les trois points $0, \rho, u\rho$, avec $\rho > 0$, puis l'on fait tendre ρ vers l'infini) nous montre que l'on a aussi, pour tout $z \in \Pi_{u, \bar{D}(0, B)} \cap \Pi_{1, \bar{D}(0, B)}$,

$$\int_{L_u} \Phi(t) e^{-tz} dt = \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-tz} dt = H(z).$$

De ce fait, la fonction H se prolonge à l'union de tous les demi-espaces $\Pi_{u, \bar{D}(0, B)}$, lorsque $u \in (\mathbb{R}^2)^*$. Cette union coïncide certes ici avec $\{|z| > B\}$, mais l'on va voir qu'une estimation plus précise de la croissance de la fonction Φ peut nous autoriser à élargir le domaine de d'holomorphie de la fonction H .

Proposition 2.3 *Supposons qu'il existe un convexe compact K de \mathbb{R}^2 tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon)$ tel que*

$$|\Phi(z)| \leq C(\epsilon) e^{H_K(z) + \epsilon|z|},$$

où

$$H_K(z) := \sup_{\zeta \in K} \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle.$$

Alors, la fonction H se prolonge à l'union de tous les demi-espaces

$$\Pi_{u, K} := \{z, \operatorname{Re}(zu) > H_K(u)\}, \quad u \in (\mathbb{R}^2)^*,$$

c'est à dire au complémentaire de K .

Preuve. Il suffit de remarquer que dans chaque demi-plan $\Pi_{u,K}$, on peut définir une fonction holomorphe par

$$H_u : z \mapsto \int_{L_u} \Phi(t) e^{-tz} dt$$

et que, si $|u_1| = |u_2| = 1$ et $0 < \text{Arg}(\overline{u_2}/\overline{u_1}) < \pi$, H_{u_1} et H_{u_2} coïncident dans $\Pi_{u_1,K} \cap \Pi_{u_2,K}$. On utilise pour cela la formule de Cauchy dans un secteur angulaire déterminé par les trois points $0, \rho, u\rho$, avec $\rho > 0$ amené à tendre vers $+\infty$; on laisse cette vérification en exercice³. Les prolongements se recollent donc et réalisent un prolongement de H à l'union des demi-espaces $\Pi_{u,K}$. D'autre part, l'intersection de tous les complémentaires des $\Pi_{u,K}$ est aussi l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant K et coïncide donc avec le convexe compact K , intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent. \diamond .

Exemple. Si l'on considère la fonction $z \mapsto \sin(Bz)$, on voit que l'on peut prendre $K = [-iB, iB]$ et que par conséquent, B se prolonge à $\mathbb{C} \setminus [-iB, iB]$.

On peut se demander comment définir plus intrinsèquement le domaine d'holomorphic de la fonction H . Pour ce faire, il est important de comprendre sous un autre angle l'espace des fonctions entières et de type exponentiel. Nous aurons besoin du concept suivant

Définition 2.1 *On appelle fonctionnelle analytique sur un ouvert Ω du plan complexe tout élément du dual de l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans Ω , équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Comme l'espace des fonctions entières est un sous-espace fermé de l'espace des fonctions continues, il résulte du théorème de Hahn-Banach que l'on peut prolonger toute fonctionnelle analytique T en une forme linéaire continue \tilde{T} sur $\mathcal{C}(\Omega)$, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Or le théorème de représentation de Riesz⁴ nous assure qu'un élément \tilde{T} de $\mathcal{C}'(\Omega)$ se représente grâce à une mesure $\mu_{\tilde{T}}$ (non unique) à support compact dans \mathbb{R}^2 , par

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x, y) d\mu_T(x, y), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Il existe donc toujours au moins un compact K tel que, pour tout ouvert borné ω de Ω contenant K , il existe une constante $\kappa(\omega)$, telle que

$$|\langle T, h \rangle| \leq \kappa(\omega) \sup_{\omega} |h|, \quad h \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Un tel compact K est appelé *porteur* pour la fonctionnelle T ; la notion de porteur ne définit pas un objet unique; par exemple, l'enveloppe convexe holomorphe de K dans Ω , définie par

$$\widehat{K}_{\Omega} := \{z \in \Omega, |h(z)| \leq \sup_K |h| \quad \forall h \in \mathcal{H}(\Omega)\}$$

est aussi un porteur pour T . Cependant, nous avons le lemme important suivant

3. Pour plus de détails, voir le livre de Berenstein-Gay, *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*, pp. 59-63.

4. Voir un cours de théorie de l'intégration.

Lemme 2.2 (et Définition) *L'intersection de deux porteurs convexes compacts pour une fonctionnelle analytique sur un ouvert convexe Ω est encore un porteur. En particulier, l'intersection de tous les porteurs convexes compacts est un porteur convexe compact minimal (au sens de l'inclusion), appelé support convexe de la fonctionnelle.*

Preuve. Nous esquissons ici juste la preuve. Si K_1 et K_2 sont deux convexes compacts porteurs pour la fonctionnelle T , nous pouvons représenter T par des mesures portées respectivement par un voisinage ouvert ω_1 de K_1 ou un voisinage ouvert ω_2 de K_2 . Nous pouvons donc définir la transformée de Cauchy de T comme la fonction

$$z \mapsto \widehat{T}(z) := \frac{1}{\pi} \langle T_\zeta, \frac{1}{z - \zeta} \rangle$$

pour z hors de ω_1 ou z hors de ω_2 . Il est facile de constater que l'action de T sur une fonction $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ s'écrit

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_1} \widehat{T}(\zeta) h(\zeta) d\zeta$$

où γ_1 est un lacet inclus dans Ω et entourant ω_1 , ou aussi

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_2} \widehat{T}(\zeta) h(\zeta) d\zeta,$$

si γ_2 est un lacet inclus dans Ω et entourant ω_2 . La transformée de Cauchy se prolonge en une fonction holomorphe au complémentaire de l'intersection des deux convexes K_1 et K_2 . On peut déformer le lacet γ_1 en un lacet γ_0 entourant l'intersection de K_1 et K_2 (ici la convexité intervient). On a donc la formule de représentation

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2i} \int_{\gamma_0} \widehat{T}(\zeta) h(\zeta) d\zeta \tag{2.21}$$

et, comme le lacet γ_0 peut être inclus dans un voisinage ω arbitraire de $K_1 \cap K_2$, on a bien la conclusion voulue en majorant le module de $\langle T, h \rangle$ avec la formule de représentation (2.21). \diamond

Étant donnée une fonctionnelle analytique T dans un ouvert convexe Ω , on peut lui associer sa *Transformée de Fourier-Borel* $\mathcal{F}[T]$; cette fonction est la fonction entière définie par

$$\mathcal{F}[T] = \langle T_\zeta, e^{z\zeta} \rangle .$$

Si K est un porteur convexe pour T , rappelons que l'on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists C(\epsilon) \geq 0, \text{ tel que } |F(z)| \leq C(\epsilon) e^{H_K(z) + \epsilon|z|}, \quad z \in \mathbb{C} .$$

Nous avons le résultat important suivant

Proposition 2.4 *La transformation de Fourier-Borel réalise un isomorphisme au niveau des espaces topologiques entre l'espace des fonctionnelles analytiques sur Ω et l'espace des fonctions entières $\text{Exp}(\Omega)$ défini comme*

$$\text{Exp}(\Omega) := \bigcup_{\substack{K \subset \subset \Omega \\ K \text{ convexe}}} \{ \Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), N_{K,\epsilon}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\Phi(z)| e^{-H_K(z) - \epsilon|z|} < \infty, \forall \epsilon > 0 \}$$

(donc union d'espaces Exp_K sur lesquels les normes $N_{K,\epsilon}$ induisent une structure d'espace de Fréchet) et équipé avec la topologie de limite inductive d'espaces de Fréchet.

Preuve. On a vu que la transformation de Fourier-Borel réalisait une application continue de l'espace $\mathcal{H}'(\Omega)$ dans l'espace $\text{Exp}(\Omega)$ (on laisse la continuité à vérifier en exercice). On se propose d'exhiber une application inverse. Pour cela, on suppose que Φ est dans un certain Exp_K , avec K convexe compact dans Ω . On définit une fonctionnelle T de la manière suivante; soit γ une courbe de Jordan dans $\Omega \setminus K$ enserrant K . On pose, pour tout $h \in \mathcal{H}(\Omega)$,

$$\langle T, h \rangle = \int_{\gamma} H(z)h(z)dz$$

où H est la fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus K$ associée à Φ par la proposition 2.3. Cette définition ne dépend pas (du fait de la formule de Cauchy) du choix de γ . Si l'on calcule

$$\mathcal{F}[T](z) = \langle T_{\zeta}, e^{z\zeta} \rangle,$$

on peut remplacer γ par un cercle de rayon assez grand et utiliser le fait que, si $|z| > R$,

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k k!}{z^{k+1}} \quad (2.22)$$

si

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Comme la convergence de la série est uniforme sur le cercle de rayon R , on peut (c'est un calcul déjà fait lors de la preuve du théorème de Cramer 2.1) montrer que

$$\mathcal{F}[T](z) = \langle T_{\zeta}, e^{z\zeta} \rangle = \Phi(z).$$

La fonctionnelle T a donc pour transformée de Fourier-Borel Φ ; une telle fonctionnelle est unique, car si l'on a

$$\langle T_{\zeta}, e^{z\zeta} \rangle = \langle \tilde{T}_{\zeta}, e^{z\zeta} \rangle$$

pour tout z , on a $\langle T_{\zeta}, \zeta^n \rangle = \langle \tilde{T}_{\zeta}, \zeta^n \rangle$ pour tout entier n . La convexité de Ω implique la densité de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$ ⁵. Les polynômes sont donc denses dans $\mathcal{H}(\Omega)$ et l'on a $T = \tilde{T}$ et la proposition est démontrée.

Nous pouvons exprimer en fonction de la croissance de Φ le domaine où peut se prolonger la fonction H ; en effet, on a la

Proposition 2.5 (et définitions) *Soit Φ une fonction entière satisfaisant les conditions (2.19) pour une constante $B \geq 0$. Alors, si*

$$h_{\Phi}(z) := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\Phi(rz)|}{r}, \quad z \in \mathbb{C}^*$$

(cette fonction est appelée *indicatrice de Lindelöf* de Φ), alors la fonction H se prolonge en une fonction holomorphe à l'union de tous les demi-espaces

$$\Pi_{\theta}^{\Phi} := \{z, \text{Re}(ze^{i\theta}) > h_{\Phi}(e^{i\theta})\}.$$

5. Ceci est une conséquence du fait qu'un convexe est holomorphiquement convexe, voir le livre de Berenstein-Gay, *Complex Variables*, pp. 213-219, et du théorème d'approximation de Runge (voir la référence précédente et le livre *Complex Analysis and Special Topics...*, proposition 1.3.3.

Le convexe fermé défini comme

$$C_\Phi := \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \{z, \operatorname{Re}(ze^{i\theta}) \leq h_\Phi(e^{i\theta})\}$$

est appelé *diagramme conjugué de Polya* de la fonction Φ . De plus, si K est le support convexe de la fonctionnelle $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ dont Φ est la transformée de Fourier-Borel, on a $h = H_K$.

Preuve. La fonction Φ est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ de support convexe K (d'après la proposition 2.4 et le lemme 2.2). Le complémentaire de K est le plus grand complémentaire de convexe où l'on peut prolonger la fonction H . Mais, pour chaque $\theta \in [0, 2\pi]$ fixé, la fonction

$$\int_{L_\theta} \Phi(t)e^{-tz} dt$$

est bien définie dans le demi-plan

$$\{\operatorname{Re}(ze^{i\theta}) > h_\Phi(e^{i\theta})\}$$

à cause de la définition de la fonction h_Φ . Ces fonctions réalisent un prolongement de H , définie à priori hors d'un disque de rayon R assez grand (c'est toujours la formule de Cauchy dans les secteurs triangulaires qui permet de recoller ces définitions de demi-plan à demi-plan) au complémentaire du convexe compact

$$\widetilde{K} = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} \{z, \operatorname{Re}(ze^{i\theta}) \leq h_\Phi(e^{i\theta})\},$$

et l'on a, puisque $K \subset \widetilde{K}$,

$$H_K(e^{i\theta}) \leq h_\Phi(e^{i\theta}).$$

Comme on peut représenter Φ avec la formule

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma H(\zeta)e^{z\zeta} d\zeta, \tag{2.23}$$

où γ est un lacet arbitraire enserrant le convexe compact K hors duquel H est holomorphe, on a avec (2.23), puisque γ peut être choisi arbitrairement proche de K ,

$$|\Phi(re^{i\theta})| \leq C \exp(r(H_K(e^{i\theta}) + \epsilon)).$$

On a donc, avec la définition de h_Φ ,

$$h_\Phi(e^{i\theta}) \leq H_K(e^{i\theta}) + \epsilon, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Comme ceci est vrai pour ϵ arbitraire,

$$H_K(e^{i\theta}) = h_\Phi(e^{i\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

et la proposition est démontrée. \diamond

Ainsi donc, nous pouvons énoncer le

Théorème 2.2 (Polya-Cramer) *Si T désigne une fonctionnelle analytique sur \mathbb{C} de support convexe K , de transformée de Fourier-Borel Φ , et*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

une série de Dirichlet d'abscisse de convergence finie x_c , dont la somme se prolonge en une fonction holomorphe f dans un ouvert Ω du plan complexe, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z} \quad (2.24)$$

se prolonge à l'unique composante connexe non bornée de l'ensemble

$$\mathbb{C} \setminus \{z_1 + z_2, z_1 \notin \Omega, z_2 \in K\}$$

qui contient tout un demi-plan $\operatorname{Re} z > a$, $a \in \mathbf{R}$. De plus, si K est contenu dans un disque fermé $\overline{D}(0, B)$, l'abscisse de convergence de la série (2.24) est inférieure ou égale à $x_c + B$ et l'on a, pour tout z de partie réelle supérieure ou égale à $x_c + R$, avec $R > B$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k) e^{-\lambda_k z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} f(z - \zeta) \widehat{T}(\zeta) d\zeta, \quad (2.25)$$

où \widehat{T} désigne la transformée de Cauchy de la fonctionnelle T .

2.5 D'autres formules de représentation intégrale

Nous avons vu dans la section précédente comment la formule de représentation intégrale (2.25) autorise le prolongement de la somme de la série de Dirichlet (2.24). Nous allons proposer dans cette section une autre formule de représentation intégrale, basée aussi sur la convolution dans le champ complexe, et permettant le prolongement de la somme d'une série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

dont on sait simplement que l'ensemble des points où la série converge simplement est non vide. Nous supposons aussi que la suite des exposants est telle que pour tout $\beta > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n e^{-\beta \lambda_k \log \lambda_k} = \mathbf{O}(e^{\epsilon \lambda_n}). \quad (2.26)$$

Nous commencerons par un petit lemme :

Lemme 2.3 *Pour tout $\alpha > 0$, la série de Dirichlet*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_k)} e^{-\lambda_k z}$$

a une abscisse de convergence absolue égale à $-\infty$, par conséquent la somme de cette série définit une fonction entière Φ_α dans tout le plan complexe.

Preuve. Il résulte de la Proposition 1.2 que pour que la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k z}$$

ait une abscisse de convergence absolue égale à $-\infty$, il faut et il suffit que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on ait

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \log \left(\sum_{k=1}^n |b_k| e^{\lambda_k h} \right) \leq 0. \quad (2.27)$$

Si cette dernière condition (2.27) est remplie et si la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

converge au moins en un point z_0 , il est évident de vérifier que l'on a, pour tout h réel,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \log \left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| e^{\lambda_k h} \right) \leq 0,$$

et que par conséquent la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k e^{-\lambda_k z}$$

converge absolument en tout point de \mathbb{C} . Pour prouver le lemme, il nous suffit donc de prouver (2.27) lorsque

$$b_k = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_k)}, \quad \alpha > 0.$$

On rappelle ici la formule de Stirling, qui nous assure, lorsque $h \in \mathbb{R}$ et $\beta \in]0, \alpha[$, que, lorsque k est assez grand, on a, pour une certaine constante strictement positive $\gamma_{\beta, h}$,

$$\Gamma(1 + \alpha \lambda_k) \sim \sqrt{2\pi} \exp \left[\left(\frac{3}{2} + \alpha \lambda_k \right) \log(1 + \alpha \lambda_k) - (1 + \alpha \lambda_k) \right] \geq \gamma_{\beta, h} e^{\lambda_k (h + \beta \log(\lambda_k))}.$$

Mais l'hypothèse (2.26) implique précisément la validité de (2.27) lorsque $b_k = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha \lambda_k)}$. Cela conclut la preuve de notre lemme. \diamond

Toujours sous les mêmes hypothèses, nous avons la formule de représentation intégrale suivante.

Proposition 2.6 (formule de resommation de Marcel Riesz) *Soit f la somme d'une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $x_c < +\infty$ et dont la suite des exposants vérifie les hypothèses (2.25). Pour tout z tel que $\operatorname{Re} z > x_c$, pour tout $\alpha > 0$, on a les formules de représentation intégrale*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t} \Phi_{\alpha}(z - \alpha t) e^t dt = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^{\alpha t}} \Phi_{\frac{1}{\alpha}}(z - t) e^{\alpha t} dt. \quad (2.28)$$

Remarques. Notons que la formule (2.28) est encore une formule de représentation intégrale où l'opération de convolution joue un rôle essentiel. Notons aussi que l'hypothèse (2.26) est une hypothèse peu restrictive sur la suite des fréquences. Les suites de fréquences du type $\lambda_n = \log n$ ou plus généralement les suites telles que

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma e^{-C\lambda_k}, \quad k \mapsto \infty,$$

y satisfont. Notons enfin que la fonction entière impliquée dans l'opération de convolution régie par la formule (2.28) est cette fois la fonction entière

$$\zeta \mapsto e^{-\alpha\zeta + \alpha\zeta}$$

dont la croissance est en $Ae^{Bp(z)}$, où $p(z)$ n'est plus le poids $|z|$ (comme pour le type exponentiel, relié à la théorie des fonctionnelles analytiques), mais cette fois le poids $p(z) = e^{\alpha|z|}$. C'est évidemment le contrôle de croissance de la fonction Φ_α qui autorisera une éventuelle déformation de contour qui nous permettra éventuellement de prolonger la fonction f . La difficulté ici par rapport à la formule de représentation proposée dans l'énoncé de Polya-Cramer est que l'intégration se fait sur un contour non borné, et non plus sur un cercle; par contre, on convole avec cette fois une fonction entière (la fonction Φ_α) et non une fonction présentant des singularités à gauche d'une ligne verticale (la fonction f dans la formule (2.25)).

Preuve. On passe d'une formule de représentation à l'autre en faisant le changement de variable $t = u/\alpha$ dans la première intégrale. On exprime ensuite la seconde formule de représentation ainsi obtenue en faisant jouer à $1/\alpha$ le rôle de α . On se contentera donc de prouver ici la première formule de représentation intégrale.

Introduisons la suite de fonctions sur $]0, \infty[$

$$p_n(t) = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)} \int_0^t e^{-u} u^{\alpha\lambda_n} du, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Par définition de la fonction Γ , soit

$$\Gamma(\xi + 1) = \int_0^\infty u^\xi e^{-u} du, \quad \operatorname{Re} \xi > -1,$$

on a bien sûr, pour tout $n \geq 1$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = 1.$$

Mais, si l'on suppose que t est tel que

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_{n+1})} \leq t^{\alpha(\lambda_n - \lambda_{n+1})},$$

on a aussi, pour tout $u \in]0, t[$,

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_{n+1})} \leq u^{\alpha(\lambda_n - \lambda_{n+1})},$$

et par conséquent $p_{n+1}(t) \leq p_n(t) < 1$. Si l'inégalité contraire

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_{n+1})} \geq t^{\alpha(\lambda_n - \lambda_{n+1})},$$

est remplie, alors, on a aussi, pour $u \in]t, +\infty[$,

$$\frac{\Gamma(1 + \alpha\lambda_n)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_{n+1})} \geq u^{\alpha(\lambda_n - \lambda_{n+1})},$$

et par conséquent

$$1 - p_{n+1}(t) \geq 1 - p_n(t),$$

soit encore $p_{n+1}(t) \leq p_n(t)$. Pour tout t fixé dans $]0, \infty[$, la suite $(p_n(t))_n$ est donc décroissante.

On dispose donc d'une suite de fonctions $(p_n)_{n \geq 1}$ sur $]0, +\infty[$, toutes à valeurs dans $]0, 1[$, telles que,

- Pour tout $n \geq 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = 1$
- Pour tout $t \in]0, \infty[$, la suite $n \mapsto p_n(t)$ est monotone décroissante.

On dispose aussi, si z est un nombre complexe fixé, telle que $\operatorname{Re} z > x_c$, d'une série convergente, de terme général $(a_k e^{-\lambda_k z})$.

Un théorème Taubérien (que l'on fera en exercice en utilisant comme toujours dans ce cas le procédé sommatoire d'Abel), nous assure que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k(t) e^{-\lambda_k z} \right), \tag{2.29}$$

la convergence des séries dans le membre de droite de (2.29) étant aussi assurée par ce même théorème Taubérien (attribué à Perron⁶). On a donc, pour un tel z tel que $\operatorname{Re} z > x_c$,

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k e^{-\lambda_k z}}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} \int_{-\infty}^{\log t} e^{-e^u} e^{\alpha\lambda_k u} e^u du \right).$$

Mais la série

$$\zeta \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} e^{-\lambda_k \zeta}$$

converge uniformément (car son abscisse de convergence absolue vaut $+\infty$) sur la droite verticale $\operatorname{Re} \zeta = \operatorname{Re} z$, donc sur l'ensemble décrit par les $z - \alpha u$, lorsque $u \in]-\infty, \log t]$. L'intervention série intégrale est donc licite et on a

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\log t} e^{-e^u} \Phi_{\alpha}(z - \alpha u) e^u du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^u} \Phi_{\alpha}(z - \alpha u) e^u du,$$

ce qui est la formule voulue. \diamond

Il est possible de transformer la formule de représentation intégrale afin de faire apparaître la transformation de Laplace qui jouait un rôle important dans le théorème de Polya-Cramer. Fixons $\alpha > 0$ et supposons que z soit un point où par exemple la formule

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t} \Phi_{\alpha}(z - \alpha t) e^t dt$$

est valide (c'est à dire que l'intégrale figurant à droite est convergente absolument). Nous pouvons, si $z = \sigma + i\tau$, poser

$$e^z = \left[e^{\frac{\sigma}{\alpha}} e^{\frac{i\tau}{\alpha}} \right]^{\alpha},$$

6. Pour la preuve, chercher dans le livre de E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*. Encore une fois, c'est très simple, il suffit d'appliquer le procédé d'Abel et le critère de Cauchy.

soit $e^z = w^\alpha$, avec

$$w = e^{\frac{\sigma}{\alpha}} e^{\frac{i\tau}{\alpha}} = r e^{\frac{i\tau}{\alpha}}, \quad r > 0.$$

Si $t \in \mathbb{R}$, posons $e^t = w\xi$, soit $\xi = e^t/w$, ce qui fait que ξ parcourt la demi-droite issue de l'origine et d'argument (modulo 2π) $-i\tau/\alpha$. Remarquons que l'on a aussi

$$|\xi| = \rho_z(t) = e^{t - \frac{\sigma}{\alpha}}.$$

On a, avec ces nouvelles notations,

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(z - \alpha t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} e^{-\lambda_k(z - \alpha t)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} \xi^{\lambda_k \alpha}. \end{aligned}$$

La fonction ϕ_α de ξ ainsi définie est une fonction multiforme et l'on peut considérer l'égalité

$$f(\log w^\alpha) = \int_{L_{e^{-i\frac{\log w^\alpha}{\alpha}}}} \phi_\alpha(\xi) e^{-w\xi} d\xi, \quad (2.30)$$

où $L_{e^{-i\frac{\log w^\alpha}{\alpha}}}$ est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur $e^{-i\frac{\log w^\alpha}{\alpha}}$, comme une égalité en termes de fonctions multiformes. Si la détermination de $\log w^\alpha$ est le nombre $\sigma + i\tau$, alors on doit poser dans la définition de $\phi_\alpha(\xi)$, si $\xi = \rho e^{-i\tau/\alpha}$, $\rho > 0$, est un point de $L_{e^{-i\frac{\log w^\alpha}{\alpha}}}$,

$$\xi^{\alpha\lambda_k} := \rho^{\alpha\lambda_k} e^{-i\tau\lambda_k}$$

pour que les notations dans la formule (2.30) ci-dessus respectent la cohérence de la formule (2.28) dont elle est issue.

Si l'on pose

$$h_\alpha(\tau) = \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} \rho^{\alpha\lambda_k} e^{-i\tau\lambda_k} \right|}{\rho},$$

il y a convergence de l'intégrale dans (2.30) lorsque $w = r e^{i\tau/\alpha}$, avec $r > h_\alpha(\tau)$; cette intégrale diverge si $0 < r < h_\alpha(\tau)$. Ceci peut encore s'écrire, puisque $|w|^\alpha = e^\sigma = r^\alpha$ en disant que l'intégrale converge si $\sigma > \alpha \log h_\alpha(\tau)$ et diverge lorsque $\sigma < \alpha \log h_\alpha(\tau)$. Or

$$\begin{aligned} \alpha \log h_\alpha(\tau) &= \alpha \log \left[\limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} \rho^{\alpha\lambda_k} e^{-i\tau\lambda_k} \right|}{\rho} \right] = \\ &= \alpha \log \left[\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log^+ |\Phi_\alpha(\sigma + i\tau - \alpha t)|}{e^{t - \frac{\sigma}{\alpha}}} \right] = \\ &= \limsup_{s \rightarrow +\infty} \left[\alpha \log \log^+ |\Phi_\alpha(-s + i\tau)| - s \right] = \sigma_\alpha(\tau). \end{aligned}$$

Cette fonction $\tau \mapsto \sigma_\alpha(\tau)$ sera appelée à jouer un rôle important pour la description des singularités du prolongement de f .

Afin de préciser ce point, donnons la

Définition 2.2 *Soit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

une série de Dirichlet telle que $x_c < \infty$ et f sa somme. Pour tout $\tau \in \mathbf{R}$, soit $x_h(\tau)$ l'abscisse du premier point singulier de f que l'on rencontre lorsque l'on essaye de prolonger f analytiquement (depuis le demi-plan $\operatorname{Re} z > x_c$) le long de la droite $\mathbf{R} + i\tau$; on appelle étoile horizontale de la fonction f le domaine simplement connexe défini comme

$$\{\sigma + i\tau \in \mathbf{C}, \sigma > x_h(\tau)\}.$$

Il est clair que l'étoile horizontale de f contient le demi-plan de convergence $\{\operatorname{Re} z > x_c\}$ et que la fonction f se prolonge à une fonction holomorphe dans son étoile horizontale. La formule de représentation (2.28) nous permet de préciser l'étoile horizontale de convergence.

Théorème 2.3 (Marcel Riesz) *Soit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

une série de Dirichlet d'abscisse de convergence finie, et telle que la suite des exposants satisfait la condition (2.26). On a alors, pour tout $\tau \in \mathbf{R}$,

$$x_h(\tau) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \limsup_{s \rightarrow +\infty} \left[\alpha \log \log^+ |\Phi_\alpha(-s + i\tau)| - s \right],$$

où, pour $\alpha > 0$, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$\Phi_\alpha(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} e^{-\lambda_k z}.$$

Preuve. Fixons $\tau \in \mathbf{R}$ et considérons la fonction $F_{\alpha,\tau}$ qui associe au nombre complexe w l'intégrale

$$\int_L e^{-w\xi} \phi_\alpha(\xi) d\xi,$$

où, comme toujours,

$$\phi_\alpha(\rho e^{-i\tau/\alpha}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(1 + \alpha\lambda_k)} \rho^{-\alpha\lambda_k} e^{i\lambda_k \tau}.$$

Cette fonction $F_{\alpha,\tau}$ est définie (et holomorphe) dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}(we^{-i\tau/\alpha}) > h_\alpha(\tau)\}$. Si l'on pose $e^s = w^\alpha = e^{u+iv}$, on trouve que la condition $\operatorname{Re}(we^{-i\tau/\alpha}) > h_\alpha(\tau)$ se lit

$$\operatorname{Re}(e^{\frac{u}{\alpha} - i(\tau-v)/\alpha}) > h_\alpha(\tau),$$

ou encore

$$u - \alpha \log h_\alpha(\tau) \geq -\alpha \log \cos \frac{v - \tau}{\alpha}, \quad |v - \tau| \leq \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Soit maintenant dans le plan des $s = u + iv$ la courbe paramétrée Γ_α d'équation

$$u = \log \cos \frac{v}{\alpha}, \quad |v| \leq \frac{\pi\alpha}{2}$$

et \overline{D}_α le domaine fermé limité par cette courbe. La fonction f (qui correspond si l'on revient au plan des s à la fonction $F_{\alpha,\tau}$) est holomorphe à l'intérieur du domaine $\sigma + i\tau - \overline{D}_\alpha$ si $\sigma > \sigma_\alpha(\tau)$ et a des singularités à l'intérieur de ce domaine si $\sigma < \sigma_\alpha(\tau)$. On conclut donc qu'un point z est intérieur au domaine de validité de la formule

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^t} \Phi_\alpha(z - at) e^t dt$$

si et seulement si f est holomorphe dans le domaine $z - \overline{D}_\alpha$. Mais, de la définition de l'étoile horizontale \mathcal{E} de la série de Dirichlet, il vient qu'un point z est tel que f est holomorphe dans $z - \overline{D}_\alpha$ si et seulement si z est dans $[(\text{int } \mathcal{E})^c + \overline{D}_\alpha]^c$.

Nous avons donc deux manières de décrire l'ensemble des points $z = \sigma + i\tau$ du plan complexe où la formule (2.25) est valable :

- D'une part, c'est l'ensemble des points de la forme $z = \sigma + i\tau$, avec $\sigma > \sigma_\alpha(\tau)$;
- D'autre part, c'est, d'après ce qui précède, le complémentaire de l'ensemble

$$(\text{int } \mathcal{E})^c + \overline{D}_\alpha$$

Voici comment on conclut à la preuve du théorème de Riesz. Si $\sigma > x_h(\tau)$, alors le point $\sigma + i\tau$ est intérieur à l'étoile horizontale de la série de Dirichlet ; si α est assez petit (en fait plus petit que $2\delta/\pi$, où δ est la distance de $\sigma + i\tau$ au fermé $(\text{int } \mathcal{E})^c$), le point $\sigma + i\tau$ n'appartient pas à $(\text{int } \mathcal{E})^c + \overline{D}_\alpha$, car cet ensemble est inclus dans $(\text{int } \mathcal{E})^c + \overline{D}(0, \frac{\pi\alpha}{2})$. Pour α assez petit, on a donc $\sigma > \sigma_\alpha(\tau)$, ce qui prouve par conséquent

$$x_h(\tau) \geq \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sigma_\alpha(\tau).$$

On a d'autre part

$$x_h(\tau) \leq \liminf_{\alpha \rightarrow 0} \sigma_\alpha(\tau)$$

car si $x_h(\tau) > \sigma_\alpha(\tau)$ pour une certaine valeur de α , la fonction f serait holomorphe au point $x_h(\tau) + i\tau$, ce qui contredirait la définition de l'abscisse $x_h(\tau)$, correspondant à l'abscisse de la première singularité rencontrée lorsque l'on essaye de prolonger analytiquement f le long de la droite $\text{Im } z = \tau$. On a donc démontré notre théorème. \diamond

On sait donc relier les singularités du prolongement de la somme de notre série de Dirichlet originelle à l'étude de la croissance, dans le champ complexe, et le long des lignes horizontales (en allant vers $-\infty$), du module de la somme d'une famille d'autres sommes de séries de Dirichlet (en l'occurrence les Φ_α , lorsque $\alpha > 0$), toutes d'abscisse de convergence absolue égale à $+\infty$. En particulier, la somme de notre série de Dirichlet se prolonge à tout le plan complexe en une fonction entière si et seulement si, pour tout $\tau \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \limsup_{s \rightarrow +\infty} [\alpha \log \log^+ |\Phi_\alpha(-s + i\tau)| - s] = -\infty.$$

Un exemple. Profitons de cette section pour donner un exemple très important, celui de la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^z}\right),$$

où p_1, p_2, \dots , est la liste des nombres premiers. On a, si $\operatorname{Re} z > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^z},$$

où μ est la *fonction de Moebius* définie par

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 \\ \mu(n) = (-1)^k \text{ si } n = p_1 p_2 \dots p_k, p_i \neq p_j \\ \mu(n) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Prouver que les zéros de la fonction ζ sont tous à gauche de la droite $\operatorname{Re} z = 1/2$ reviendrait à prouver, que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \limsup_{s \rightarrow +\infty} [\alpha \log \log^+ |\Phi_\alpha(-s + i\tau)| - s] \leq \frac{1}{2},$$

où

$$\Phi_\alpha(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{\Gamma(1 + \alpha \log k) k^z}.$$

Bien sûr, cette fonction n'étant nullement explicite, ni calculable, cette approche pour une preuve de la célèbre *Hypothèse de Riemann* (les zéros de ζ dans la bande $\operatorname{Re} z \in [0, 1]$ sont tous sur la droite $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$) semble désespérée.

L'idée qui nous a permis de prolonger la fonction ζ dans l'exemple 2 du paragraphe 1.1 peut être généralisée. On part de la formule donnant la définition de la fonction Γ ,

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} u^{\xi-1} e^{-u} du, \operatorname{Re} \xi > 0.$$

Si nous supposons que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

est une série de Dirichlet avec $x_c < \infty$, posons

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\mu_k z}, \mu_k := e^{\lambda_k}, k \in \mathbb{N}.$$

La fonction F est aussi la somme d'une série de Dirichlet, dont la suite des exposants est obtenue en exponentiant la suite des exposants de la série de Dirichlet originelle. Au contraire de ce que nous venons de faire précédemment, on joue cette fois avec les exposants et non avec les coefficients de la série de Dirichlet. Cette nouvelle série de Dirichlet converge dans le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$; elle converge même dans tout le plan si $x_c < 0$. On a alors la formule de représentation suivante pour la somme f de la série de Dirichlet originelle.

Proposition 2.7 *Pour tout z de partie réelle strictement supérieure à $\max(x_c, 0)$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} F(t) t^{z-1} dt. \quad (2.31)$$

Preuve. La preuve formelle de l'identité (2.31) se fait comme suit : on a, pour tout $t > 0$,

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\mu_k t}.$$

On note que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (t\mu_k)^{z-1} e^{-\mu_k t} \mu_k dt = e^{\lambda_k z} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-\mu_k t} dt,$$

d'où, pour tout $k \geq 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$a_k e^{-\lambda_k z} \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} (a_k e^{-\mu_k t}) dt. \quad (2.32)$$

En additionnant formellement, pour toutes les valeurs de k , les formules (2.32), on trouverait bien la formule (2.31); il faut simplement justifier que l'interversion sommation-intégrale est licite.

On utilise pour cela, si σ est un nombre réel strictement supérieur à x_c et $t > 0$, les estimations

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=p}^q a_k e^{-\mu_k t} \right| &= \left| \sum_{k=p}^q a_k e^{-\lambda_k \sigma} \mu_k^{\sigma} e^{-\mu_k t} \right| \\ &\leq K_{\sigma} \left| \int_{\mu_p}^{\mu_q} \frac{d}{du} (e^{-ut} u^{\sigma}) du \right| + K_{\sigma} \mu_q^{\sigma} e^{-\mu_q t} \\ &\leq K_{\sigma} \sigma \int_{\mu_p}^{\mu_q} e^{-ut} u^{\sigma-1} du + K_{\sigma} t \int_{\mu_p}^{\mu_q} e^{-ut} u^{\sigma} du + K_{\sigma} \mu_q^{\sigma} e^{-\mu_q t} \\ &\leq K_{\sigma} \Gamma(\sigma + 1) \left(\frac{t}{2} \right)^{-\sigma-1} e^{-\frac{\mu_p t}{2}} + K_{\sigma} \mu_q^{\sigma} e^{-\mu_q t} \end{aligned}$$

(en séparant $ut = \frac{ut}{2} + \frac{ut}{2}$), valables pour $q > p \geq 0$. En faisant tendre q vers l'infini, on obtient, pour tout $p \geq 0$,

$$\left| \sum_{k=p}^{\infty} a_k e^{-\mu_k t} \right| \leq \widetilde{K}_{\sigma} t^{-\sigma} e^{-\frac{\mu_p t}{2}}.$$

Ceci prouve bien la convergence absolue de l'intégrale dans (2.30) et justifie l'interversion somme-intégrale puisque σ peut être choisi arbitraire (mais toujours tel que $\sigma > x_c$). Notre proposition est donc démontrée. \diamond

Remarque 2.4 On lit la formule (2.31) en disant encore que la fonction

$$z \mapsto f(z) \Gamma(z)$$

est la Transformée de Mellin de F . La formule inverse s'écrit

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{VP} \left(\int_{\gamma+i\mathbb{R}} \Gamma(\zeta) f(\zeta) \zeta^{-z} d\zeta \right) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[\gamma-iR, \gamma+iR]} \Gamma(\zeta) f(\zeta) \zeta^{-z} d\zeta, \quad (2.33)$$

avec $\gamma > \max(x_c, 0)$ (VP pour Valeur Principale). C'est une conséquence des estimations de croissance de f le long des lignes verticales, de la formule d'inversion de Laplace, et du théorème de Cauchy appliqué à des contours rectangulaires.

Comme application de cette formule de représentation (2.31), nous donnerons ici la proposition suivante :

Proposition 2.8 (Hardy-Fekete) *Supposons que la série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ ait une abscisse de convergence finie x_c et que la fonction F définie comme la série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k z}$, $\mu_k = e^{\lambda_k}$, (d'abscisse de convergence à priori au moins 0) se prolonge du demi-plan $\{\operatorname{Re} z > x_c\}$ en une fonction méromorphe à l'origine (l'ordre du pôle étant $q \geq 0$). Alors la somme f de la série de Dirichlet originelle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ se prolonge en une fonction méromorphe dans \mathbb{C} , avec comme seuls pôles éventuels des pôles simples aux points $q, q-1, \dots, 2, 1$; en particulier, si $q = 0$, c'est à dire si F est holomorphe à l'origine, f se prolonge en une fonction entière.*

Preuve. La preuve de cette proposition est calquée sur l'étude que nous avons fait dans l'exemple 2 de la section 1.1 pour étudier le prolongement de la fonction zéta de Riemann. On part de la formule de représentation (2.31), valable dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > x_c\}$, soit

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} F(t)t^{z-1} dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x F(t)t^{z-1} dt + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_x^{+\infty} F(t)t^{z-1} dt,$$

où l'on a fixé $x > 0$, pour l'instant arbitraire. On voit en utilisant par exemple les estimations (1.9) que la fonction F , somme d'une série de Dirichlet d'exposants les $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, satisfait pour t réel assez grand

$$|F(t)| \leq e^{-\gamma t}$$

pour une certaine constante $\gamma > 0$ (par exemple $\gamma = \frac{e^{\lambda_1}}{2}$). Il s'ensuit que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)} \int_x^{+\infty} F(t)t^{z-1} dt$$

est une fonction entière (rappelons que $1/\Gamma$ est entière). Écrivons, au voisinage de 0,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-q},$$

où $a_0 \neq 0$ et le rayon de convergence de la série $\sum_k a_k z^k$ est strictement positif. On a alors, pour tout entier N positif,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x F(t)t^{z-1} dt = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^N \frac{a_k x^{k-q+z}}{k-q+z} + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k t^{k-q} t^{z-1} \right) dt.$$

Mais l'on a, puisque le rayon de convergence de la série $\sum_k a_k z^k$ est non nul,

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k t^{k-q} \right| \leq C t^{N+1-q}$$

pour tout $t \in [0, x]$ si x est choisi assez petit. La fonction

$$z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k t^{k-q} t^{z-1} \right) dt$$

représente donc une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > -(N + 1 - q)\}$ tandis que

$$z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^N \frac{a_k x^{k-q+z}}{k - q + z}$$

représente une fonction méromorphe dans le plan, avec pôles éventuels (simples) aux points $q, q - 1, \dots, 1$; c'est une fonction entière si $q = 0$; en effet, la fonction $1/\Gamma$ s'annule à l'ordre 1 en $0, -1, -2, \dots$. En faisant tendre N vers l'infini, on obtient bien la conclusion de notre proposition. Notons au passage que si F peut s'écrire, sur un intervalle $]0, \epsilon[$, sous la forme

$$F(t) = \frac{1}{t^q} G(t),$$

où G est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine telle que $G(0) \neq 0$ et $q \in]0, +\infty[$, alors f ne saurait se prolonger en une fonction entière : en effet, si $q \notin \mathbb{N}^*$, on devrait avoir pour que cela soit le cas $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tandis que, si $q \in \mathbb{N}^*$, on devrait avoir toujours dans ce cas $a_0 = \dots = a_{q-1} = 0$, ce qui contredirait le fait que l'origine est un point singulier de F . \diamond

Exemples. L'exemple typique d'application de cette proposition est bien sûr celui de la fonction ζ de Riemann. On a cependant des exemples plus subtils. Nous en donnerons un dans le but d'introduire l'approche que nous développerons au chapitre 3. Soit Φ est une fonction holomorphe dans un cône $\Gamma_\alpha = \{|\arg z| \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\}$ avec croissance contrôlée de la manière suivante : il existe $B \in [0, \pi[$ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists C(\epsilon) > 0 \text{ t.q. } |\Phi(z)| \leq C(\epsilon) e^{B|\operatorname{Im} z| + \epsilon|z|}, \quad z \in \Gamma_\alpha. \quad (2.34)$$

Alors la somme de la série de Dirichlet alternée

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\Phi(k)}{k^z}$$

se prolonge en une fonction entière dès que cette série possède une abscisse de convergence non nulle. C'est une conséquence de la proposition 2.8 et du fait que la fonction

$$z \mapsto \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \Phi(k) e^{-kz} \quad (2.35)$$

se prolonge, sous les hypothèses de croissance imposées à Φ , du demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$, en une fonction holomorphe au voisinage de l'origine (en fait au voisinage du segment $] -i(\pi - B), i(\pi - B)[$ de l'axe imaginaire). Pour voir cela, on doit penser évidemment au théorème de Polyá-Cramer et à une pseudo-formule de convolution permettant de représenter (et par là même de prolonger) la somme de la série de Dirichlet (2.35) à partir de la connaissance explicite de la somme de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-kz} = \frac{1}{1 + e^z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons à l'énoncé et à la démonstration du théorème III, p. 103 (chapitre 5) du livre de Bernstein (que, faute de temps, nous ne pouvons traiter ici). Notre chapitre 3 sera une approche plus moderne de ce point de vue.

Chapitre 3

Interactions entre singularités analytiques et suite des coefficients

Étant donnée une série entière convergente dans le disque de rayon R , donc telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R},$$

on sait que, dès que la somme de la série se prolonge à un ouvert contenant $\overline{D(0, R)}$, la suite des coefficients vérifie en fait

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R + \epsilon}$$

pour un certain $\epsilon > 0$.

Plus intrigant : si la série est lacunaire, c'est à dire

$$a_k \neq 0 \iff k = p_j, \dots, j = 1, 2, \dots$$

et

$$\#\{j, p_j \leq k\} = \mathbf{o}(k), \quad k \mapsto \infty,$$

alors le fait que la somme de la série se prolonge au voisinage d'un seul point du cercle $\{|z| = R\}$, alors on a la même conclusion (c'est le Fabry gap theorem).

Il y a donc des répercussions au niveau du comportement de la suite des coefficients du fait que la somme de la série puisse se prolonger à un domaine a priori plus grand que son domaine initial de convergence. Ce sont des résultats de ce type que nous allons étudier relativement cette fois aux séries de Dirichlet.

3.1 Une idée clef de L. Ehrenpreis

Étant donnée une série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$, on peut, et cette idée était déjà en germe dans l'utilisation de la fonction F du théorème de Carlson lorsque la suite des exposants était mesurable, voir les λ_k comme une partie de l'ensemble des zéros d'une fonction entière Φ dont l'étude de *l'indicateur de croissance* (ou ce qui lui en tient lieu si l'on sort du cadre des fonctions de type exponentiel) à l'infini sera un facteur déterminant dans le rôle qu'elle sera amené à jouer.

Le cas intéressant sera celui où, de part les indications fournies par l'étude de sa croissance à l'infini, cette fonction Φ pourra être considérée comme la *transformée de Laplace* en un certain sens d'une fonctionnelle T sur un espace $A_p(\Pi^+)$ de fonctions holomorphes à croissance contrôlée (p désigne ici un poids contrôlant cette croissance) dans le demi-plan ouvert $\Pi^+ := \{\text{Re } z > 0\}$, c'est à dire

$$\Phi(z) = \langle T_\zeta, \exp(-z\zeta) \rangle .$$

Supposons que l'on sache définir une opération de *convolution* (ce qui est naturel) entre un élément f de $A_p(\Pi^+)$ (donc une fonction holomorphe dans Π^+ avec croissance précisée dans ce demi-espace) et un élément T de son dual, suivant la règle classique suivant laquelle on définit habituellement l'opération de convolution, soit

$$T * f(z) = \langle T(z + \zeta), f(\zeta) \rangle , \tag{3.1}$$

pour peu bien sûr que le membre de droite de (3.1) soit bien défini.

Pour être plus précis ici, nous définirons, étant donné le poids p (pour l'instant sous-harmonique, mais sur lequel nous ferons des hypothèses supplémentaires ultérieurement), l'espace $A_p(\Pi^+)$ comme l'espace des fonctions holomorphes dans Π^+ et telles que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout cône $C(z_0, \psi_0)$ du type

$$C(z_0, \psi_0) := z_0 + \{z, |\arg z| \leq \psi_0\}, \text{ Re } z_0 > 0, \psi_0 < \frac{\pi}{2},$$

il existe une constante $C(\epsilon, z_0, \psi_0)$ telle que

$$\forall z \in C(z_0, \psi_0), |F(z)| \leq C(\epsilon, z_0, \psi_0)e^{\epsilon p(z)} .$$

Alors, tout élément T du dual de l'espace $A_p(\Pi^+)$ ainsi défini se représente (via par exemple le théorème de Hahn-Banach, mais certainement pas de manière unique) à l'aide d'une fonction mesurable u_T de support un cône convexe

$$C_T = c(T) + \{z, |\arg(z)| \leq \alpha(T) < \frac{\pi}{2}\} \subset \subset \Pi^+, \quad c(T) > 0,$$

et telle qu'il existe des constantes A_T et B_T avec

$$\forall z \in C_T, |u_T(z)| \leq A_T e^{-B_T p(z)} . \tag{3.2}$$

Le crochet de dualité est alors matérialisé par

$$\langle T, g \rangle = \int_{\Pi^+} u_T(\zeta) g(\zeta) dx dy .$$

Ces précisions étant apportées, nous voyons que l'opération formelle (3.1) nous permet, étant donnée $f \in A_p(\Pi^+)$ et $T \in (A_p(\Pi^+))'$ (représentée par une fonction mesurable u_T comme ci-dessus portée par le cône C_T), de définir (via (3.1)) $T * f$ comme une fonction holomorphe dans le domaine où

$$C_T \subset \{z\} + \Pi^+,$$

soit $z \in c(T) + \Pi^+$, où

$$\Pi^- := \{z, \text{Re } z < 0\} .$$

Supposons maintenant que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

soit égale à 0. La série converge donc dans Π^+ , et, l'on peut, compte tenu des estimations du type (1.9), assurer qu'il y a, si le poids qui contrôle la croissance des éléments de $A_p(\Pi^+)$ dans le demi-plan Π^+ est convenable (c'est à dire $|z| = o(p(z))$ par exemple), convergence de la série de Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ dans l'espace de fonctions holomorphes à poids $A_p(\Pi^+)$. Comme les λ_k sont des zéros de la transformée de Laplace de T , on a nécessairement

$$T * f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle T(z+\zeta), e^{-\lambda_k \zeta} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle T(\zeta), e^{-\lambda_k \zeta} \rangle e^{\lambda_k z} = 0, \quad z \in c(T) + \Pi^-.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons prolonger T en une forme linéaire continue sur $A_p(\mathbb{C})$, espace des fonctions entières F satisfaisant les hypothèses suivantes

$$\forall \epsilon > 0, \exists R(\epsilon) \text{ t.q. } |z| \geq R(\epsilon) \implies |F(z)| \leq e^{\epsilon p(z)}.$$

Imaginons d'autre part que la fonction f se prolonge en une fonction holomorphe \tilde{f} par exemple à \mathbb{C} tout entier, le prolongement \tilde{f} étant dans $A_p(\mathbb{C})$.

Il est important de remarquer qu'alors la fonction $T * \tilde{f}$ est bien définie sur \mathbb{C} tout entier comme une fonction entière. Voici pourquoi : supposons que z soit un point d'un ouvert relativement compact U du plan complexe ; il existe toujours un compact K_U tel que

$$(C_T \setminus K_U) - U \subset \Pi^+$$

(faire un dessin pour se convaincre) ; en écrivant

$$C_T = K_U \cup (C_T \setminus K_U),$$

on peut écrire,

$$T * \tilde{f} = \int_{K_U} \tilde{f}(\zeta - z) u_T(\zeta) dx dy + \int_{C_T \setminus K_U} \tilde{f}(\zeta - z) u_T(\zeta) dx dy$$

et voir que, comme K_U est un compact sur lequel \tilde{f} est bornée, la fonction

$$z \mapsto \int_{K_U} \tilde{f}(\zeta - z) du_T(\zeta)$$

est bien une fonction entière, tandis que

$$z \mapsto \int_{C_T \setminus K_U} \tilde{f}(\zeta - z) du_T(\zeta)$$

est elle holomorphe sur U puisque la condition

$$(C_T \setminus K_U) - U \subset \Pi^+$$

est réalisée. Ainsi donc $T * \tilde{f}$ est entière ; comme cette fonction est nulle sur Π^- , elle est nulle partout. Le prolongement \tilde{f} de f est donc une solution entière de l'équation de convolution $T * \tilde{f} = 0$.

C'est à ce stade qu'intervient un principe crucial : celui de la représentation des solutions entières d'une équation de convolution. Il s'agit d'un cas particulier de ce que l'on appelle habituellement le *Principe fondamental d'Ehrenpreis*.

Ce principe est l'extension naturelle au cadre des équations de convolution apparaissant dans notre contexte du classique principe d'Euler selon lequel *toute solution d'une équation différentielle homogène et à coefficients constants se représente comme une somme d'exponentielle-polynômes solutions*.

Dans notre nouveau contexte, notre équation de convolution est

$$T * \tilde{f} = 0,$$

où T est cette fois considérée comme élément de $A_p(\mathbb{C})$. Dire que le principe fondamental est valide dans un tel contexte, c'est affirmer que toute solution dans $A_p(\mathbb{C})$ de cette équation de convolution se représente de manière unique sous la forme

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k, \mu_k \in \mathcal{G}_k} c_{k,l} z^l \exp(-\mu_k z) \right), \quad (3.3)$$

où les μ_k sont les zéros (éventuellement multiples) de la transformée de Laplace de T , organisés en paquets \mathcal{G}_k , la convergence de la série (3.3) a lieu, et là est le point essentiel, pour la topologie de $A_p(\mathbb{C})$.

Nous invoquerons aussi un principe similaire pour affirmer que, dans $A_p(\Pi^+)$, il y a aussi une formule de représentation

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{k, \tilde{\mu}_k \in \tilde{\mathcal{G}}_k} c_{k,l} z^l \exp(-\tilde{\mu}_k z) \right), \quad (3.3)'$$

où les $\tilde{\mu}_k$ sont cette fois des zéros de la transformée de Laplace de T , considérée comme fonctionnelle de $A_p(\Pi^+)$, la convergence ayant lieu cette fois dans $A_p(\Pi^+)$. La fonction f est une fonction moyenne-périodique dans $A_p(\Pi^+)$ qui admet deux développements (3.3) et (3.3)'. Le développement (3.3)' correspond avec le développement en série de Dirichlet convergente et coïncide, puisqu'il s'agit du développement de la même fonction moyenne-périodique, avec le développement (3.3).

Ceci se répercute en des contraintes de décroissance rapide au niveau de la suite des coefficients $c_{k,l}$, donc au niveau de la suite des coefficients $(a_k)_k$ de la série de Dirichlet f puisque \tilde{f} et f coïncident dans Π^+ , et donc ont le même développement en série dans $A_p(\Pi^+)$. Ce sont ces contraintes que nous allons préciser dans les sections suivantes.

3.2 Algèbres $A_p(\Sigma)$ et transformation de Laplace

Considérons un poids sous-harmonique p dans \mathbb{C} qui vérifie la condition

$$|z - \zeta| \leq 1 \implies p(z) \leq K_1 p(\zeta) + K_2$$

et tel que $|z| = \mathbf{o}(p(z))$. Le modèle de poids avec lequel nous travaillerons dans ce paragraphe sera $p(z) = |z|^\rho$, $\rho > 1$. Notons que la suite $(-\log k)_k$ apparait elle comme la suite des zéros d'une fonction entière dont la croissance est en $e^{e^{|z|}}$ et que par conséquent les algèbres à poids que nous étudierons dans ce paragraphe ne sont pas couvertes par ces exemples. Cependant, les méthodes utilisées peuvent suggérer des idées dans cette voie et nous mentionnerons dans la section 3.4 des résultats de L. Ehrenpreis concernant les singularités des séries de Dirichlet à exposants précisément les éléments de cette suite $(-\log k)_k$.

Soit Σ un cône de \mathbb{C} , de sommet en 0, du type

$$\Sigma := \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

On note $A_p(\Sigma)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans Σ et telles que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout cône $C(z_0, \psi_0)$ du type

$$C(z_0, \psi_0) := z_0 + \{z, |\arg z| \leq \psi_0\} \subset\subset \Sigma,$$

il existe une constante $C(\epsilon, z_0, \psi_0)$ telle que

$$\forall z \in C(z_0, \psi_0), |F(z)| \leq C(\epsilon, z_0, \psi_0)e^{\epsilon p(z)}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment dans le cas particulier où $\Sigma = \Pi^+$, un élément T du dual de cette algèbre (lorsque celle-ci est équipé de la topologie limite inductive naturelle) sera réalisé par une fonction mesurable u_T supportée par un cône

$$C_T = c(T) + \{z, |\arg(z)| \leq \alpha(T) < \varphi\} \subset\subset \Pi^+, \quad c(T) > 0,$$

et telle qu'il existe des constantes A_T et B_T avec

$$\forall z \in C_T, |u_T(z)| \leq A_T e^{-B_T p(z)}.$$

On définit la *Transformée de Laplace* d'un élément T de $A_p(\Sigma)'$ comme la fonction entière

$$z \mapsto \langle T_\zeta, e^{-\zeta z} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nous avons alors, via cette transformée de Laplace, un isomorphisme topologique entre $A_p(\Sigma)'$ et une certaine algèbre de fonctions entières à croissance précisée.

Afin de décrire cette croissance, introduisons les notations suivantes : si $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\alpha \in]0, \varphi[$

$$\beta(\theta; \alpha) := \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha] \cap [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \\ \cos(\pi - \alpha - \theta) & \text{si } \theta \in [\frac{\pi}{2} - \alpha, \pi - \alpha] \\ 1 & \text{si } \theta \in [\pi - \alpha, \pi + \alpha] \\ \cos(\pi + \alpha - \theta) & \text{si } \theta \in [\pi + \alpha, \frac{3\pi}{2} + \alpha] \end{cases}$$

On a alors la proposition

Proposition 3.1 *Si $p(z) = |z|^\rho$, $\rho > 1$, la transformée de Laplace réalise un isomorphisme topologique entre le dual de $A_p(\Sigma)$ et l'espace $\mathcal{L}(A_p(\Sigma)') = A_p(\widehat{\Sigma})'$ des fonctions entières Φ telles qu'il existe $B > 0$ et $\alpha \in]0, \varphi[$ avec*

$$\sup_{\substack{r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \left(|\Phi(re^{i\theta})| \exp[-Br^\sigma \beta(\theta; \alpha)^\sigma + \frac{1}{B}r \cos \theta] \right) < \infty, \quad (3.4)$$

où σ désigne l'exposant conjugué de ρ soit

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho} = 1.$$

Preuve. Soit T un élément du dual de $A_p(\Sigma)$, représenté via le théorème de Hahn-Banach par une fonction mesurable u_T supportée par un cône C_T de la forme

$$c(T) + \{|\arg z| \leq \alpha(T) < \varphi\}.$$

On a l'estimation

$$|\langle T_\zeta, e^{-z\zeta} \rangle| \leq \text{constante } A_T \exp(\max_{\zeta \in C_T} \operatorname{Re}(-\zeta z) - B_T |z|^\rho). \quad (3.5)$$

Si $\zeta = c(T) + \tau e^{i\psi}$ est un point de C_T , avec $|\psi| \leq \alpha(T)$, on a, si $z = r e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\operatorname{Re}(-\zeta z) = -c(T)r \cos \theta + \tau r \cos(\theta + \psi). \quad (3.6)$$

Comme $|\psi| \leq \alpha(T)$, on a $\cos(\theta + \psi) < 0$ si $\psi \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha(T)[\cup]\frac{3\pi}{2} + \alpha(T), 2\pi]$, tandis que

$$\max_{|\psi| \leq \alpha(T)} (-\cos(\psi + \theta)) = \beta(\theta; \alpha(T))$$

pour toutes les autres valeurs de θ . Si l'on calcule le maximum sur $]0, \infty[$ de la fonction

$$\tau \mapsto \tau r \beta(\theta; \alpha(T)) - A_T \tau^\rho - c(T)r \cos(\theta),$$

on trouve que ce maximum est atteint lorsque

$$r \beta(\theta; \alpha(T)) - \rho A_T \tau^{\rho-1} = 0,$$

soit

$$\tau = \left(\frac{r \beta(\theta; \alpha(T))}{\rho A_T} \right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Si l'on reporte cette valeur de τ dans l'estimation (3.5) (le membre de droite y étant exprimé avec (3.6)), on trouve exactement

$$|\langle T_\zeta, e^{-\zeta z} \rangle| \leq B_T \exp \left[\gamma_\rho \frac{r^\sigma \beta(\theta; \alpha(T))^\sigma}{A_T^{\frac{1}{\rho-1}}} - c(T) \operatorname{Re}(z) \right],$$

où γ_ρ est une constante dépendant de ρ , ce qui donne exactement une estimation du type (3.4).

Il reste à prouver la réciproque. Pour cela, nous invoquerons la théorie des distributions dans \mathbb{R}^2 . On peut considérer (toujours via le théorème de Hahn-Banach) un élément T de $(A_p(\Sigma))'$ comme une distribution \tilde{T} dans \mathbb{R}^2 de support inclus dans un cône du type

$$c(T) + \{|\arg \zeta| \leq \alpha(T) < \varphi\}$$

(une telle représentation n'est pas unique car elle dépend de l'élément u_T utilisé pour représenter la fonctionnelle T). Cette distribution n'est pas à support compact, mais est un élément du dual de l'espace $\tilde{A}_p(\Sigma)$ des fonctions ξ de classe C^∞ dans \mathbb{R}^2 qui vérifient, pour tout cône

$$C = c + \{|\arg \zeta| \leq \alpha\}, \quad c > 0, \quad \alpha < \varphi,$$

des condition de croissance du type

$$|\xi(z)| \leq K_1(C, \epsilon) e^{\epsilon|z|^\rho}, \quad z \in C, \quad \epsilon > 0$$

(on reprend la définition de $A_p(\Sigma)$, mais on oublie cette fois l'holomorphic des objets). On peut définir la transformée de Laplace de \tilde{T} , considérée comme élément du dual de cet espace. Cette transformée de Laplace est définie dans \mathbb{C}^2 par

$$(z_1, z_2) \mapsto \langle \tilde{T}_{(x,y)}, e^{-xz_1 - yz_2} \rangle .$$

Cette fonction est une fonction entière et l'on sait caractériser (par un théorème du type Paley-Wiener), parmi les fonctions entières, celles qui sont ainsi transformées de Fourier d'éléments de $\tilde{A}_p(\Sigma)$. On admettra ici que les transformées de Fourier des éléments de cet espace de distributions sont les fonctions entières de deux variables F telles qu'il existe un cône

$$C = c + \{|\arg \zeta| \leq \alpha < \varphi\}$$

avec

$$|F(z_1, z_2)| \leq A \exp \left(\max_{(x,y) \in C} \left(-\operatorname{Re}(xz_1 + yz_2) - A(x^2 + y^2)^{\frac{\rho}{2}} \right) \right) \quad (3.7)$$

pour un certain choix de constantes A, B^1 . Si l'on considère une fonction entière Φ d'une variable vérifiant (3.4), on peut lui associer une fonction entière $\tilde{\Phi}$ de deux variables cette fois telle que

$$\tilde{\Phi}(z, iz) = \Phi(z, z)$$

de manière à ce que les estimations (3.7) soient satisfaites. On voit (par le théorème de Paley-Wiener invoqué plus haut) que $\tilde{\Phi}$ est la transformée de Laplace d'une distribution \tilde{T} de $\tilde{A}_p(\Sigma)$, distribution qui induit par restriction au sous-espace fermé $A_p(\Sigma)$, un élément T du dual de $A_p(\Sigma)$, tel que $\Phi = \mathcal{L}(T)$. Cela achève la preuve de la proposition. \diamond

De cette proposition, on déduit à quoi est isomorphe le dual de l'espace $A_p(c - \Sigma)$ où $c > 0$, défini sur le même principe que $A_p(\Sigma)$, mis à part que les cônes $C(z_0, \psi_0)$ intervenant dans la définition sont cette fois les cônes intérieurs au cône "renversé" $c - \Gamma$. Il suffit de remarquer que si S est un élément du dual de $A_p(c - \Sigma)$ représenté par une fonction mesurable u_S portée par un cône $c'(S) - \{|\arg z| \leq \alpha(S) < \varphi\}$, $c'(S) < c$, alors la fonction

$$\zeta \mapsto u(-\zeta - c)$$

(elle a support dans $c - c'(S) + \{|\arg z| \leq \alpha(S)\}$) définit un élément du dual de $A_p(\Sigma)$. L'algèbre $A_p(c - \Sigma)$ s'identifie donc, via la transformée de Laplace, à l'espace $\mathcal{L}(A_p(c - \Sigma)') = A_p(\widetilde{c - \Sigma})$ des fonctions entières Ψ telles qu'il existe $c' > 0, B > 0, \alpha \in]0, \varphi[$, avec

$$\sup_{\substack{r > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[}} \left(|\Psi(re^{i\theta})| \exp \left[-Br^\sigma \beta(\theta + \pi; \alpha)^\sigma - (c - c')r \cos \theta \right] \right) < \infty. \quad (3.8)$$

1. Pour les théorèmes du type Paley-Wiener, dont les plus classiques sont ceux caractérisant les transformées de Fourier des distributions dans \mathbf{R}^n à support dans un convexe compact de \mathbf{R}^n , ou les distributions dans $L^2([0, \infty[^n)$, on se reportera par exemple au traité de Gelfand-Shilov, *Théorie des distributions*, tome 1, Dunod.

Revenons maintenant à l'opération de convolution ; étant donné un élément T dans $A_p(\Sigma)'$, représentable par une fonction u_T portée par le cône

$$C = c(T) + \{|\arg z| \leq \alpha(T) < \varphi\}.$$

Nous pouvons définir $T * f(z)$ par la formule (3.1) pour tout $z \in c - \Sigma$ et vérifier (on laisse ce point en exercice) que la fonction

$$z \mapsto T * f(z)$$

ainsi construite est une fonction de $A_p(c(T) - \Sigma)$. Mieux ; l'opération

$$T* : f \mapsto T * f$$

définit l'action d'un opérateur continu de $A_p(\Sigma)$ dans $A_p(c(T) - \Sigma)$ (ces espaces étant équipés de leurs topologies limite inductive déjà définies). L'opérateur $T*$ a donc un adjoint

$$T*{}' : A_p(c(T) - \Sigma) \mapsto A_p(\Sigma)$$

défini par les règles standard de définition de l'adjoint d'un opérateur, soit

$$\langle (T*{})'g, f \rangle = \int g(z) \left(\int u_T(z + \zeta) f(\zeta) d\xi d\eta \right) dx dy.$$

On a donc

$$\mathcal{L}((T*{})'g)(z) = \int g(z) \left(\int u_T(z + \zeta) e^{-\zeta z} d\xi d\eta \right) dx dy = \mathcal{L}T(z) \mathcal{L}(f)(-z).$$

Ainsi l'opérateur de multiplication par $\hat{T} = \mathcal{L}T$ induit un opérateur continu de l'algèbre de fonctions entières avec croissance précisée

$$\mathcal{L}(A_p(c(T) - \Sigma))^v := \{f(-z), f \in \mathcal{L}(A_p(c(T) - \Sigma))\}$$

à valeurs dans l'algèbre de fonctions entières avec croissance précisée

$$\mathcal{L}(A_p(\Sigma)).$$

Il est aussi important de noter ici que l'on peut définir la transformée de Laplace sur le dual de $A_p(\mathbb{C})$. Ce dual s'identifie à l'espace des fonctions entières F telles que

$$|F(z)| \leq Ae^{B|z|^\sigma}$$

pour un choix convenable de A et B . On laisse ce point en exercice ; le point essentiel est que la *transformée de Legendre* de la fonction convexe $z \mapsto |z|^\rho$, définie par

$$z \mapsto \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} (\operatorname{Re}(z\zeta) - |\zeta|^\rho)$$

est précisément la fonction

$$z \mapsto |z|^\sigma,$$

où σ est l'exposant conjugué de ρ .

3.3 Fonctions doucement décroissantes dans les algèbres $A_p(\Sigma)$ et $A_p(\mathbb{C})$; interpolation dans ces espaces

Le poids considéré dans cette section est toujours le poids

$$p(z) = |z|^\rho, \quad \rho > 1.$$

Étant donné un cône Σ comme dans la section précédente, une fonctionnelle T de $A_p(\Sigma)$, représentable par une fonction mesurable de support dans un cône

$$c(T) + \{|\arg z| \leq \alpha(T)\} \subset \Sigma,$$

il est naturel de penser que des conditions suffisantes assurant la surjectivité de l'opérateur

$$f \in A_p(\Sigma) \mapsto T * f \in A_p(c - \Sigma)$$

seront données (on pense à la résolution d'un problème de division une fois transposé le problème par Laplace) en termes de minoration de la transformée de Laplace de T (que l'on notera indifféremment \widehat{T} ou $\mathcal{L}T$).

Définition 3.1 Une fonctionnelle T de $A_p(\Sigma)$, représentable par une fonction mesurable de support dans un cône

$$c + \{|\arg z| \leq \alpha\} \subset \Sigma,$$

est dite Σ - doucement décroissante si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de rayons $(r_k)_k$ tendant vers $+\infty$, des constantes $A(\epsilon) > 1$ et $D(\epsilon) > 0$, avec $r_{k+1} \leq Ar_k$, telles que

$$|\widehat{T}(z)| \geq D(\epsilon)e^{-\epsilon|z|}$$

sur le bord de toute couronne

$$\begin{aligned} H_k^\alpha &= \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, r_k \leq r < r_{k+1}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha(T)] \cup [\frac{3\pi}{2} + \alpha(T), 2\pi]\} = \\ &= H^{\alpha(T)} \cap \{z, r_k \leq |z| \leq r_{k+1}\}. \end{aligned}$$

où

$$H^{\alpha(T)} := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha(T)] \cup [\frac{3\pi}{2} + \alpha(T), 2\pi]\}.$$

Sous ces hypothèses, on peut démontrer que si Φ est dans $\mathcal{L}(A_p(\Sigma)')$ et Φ/\widehat{T} est entière, le quotient est dans $\mathcal{L}(A_p(c(T) - \Sigma)')$. Notons que, si $\Sigma = \mathbb{C}$, ceci se fait sans hypothèse particulière sur \widehat{T} , puisque nous avons à notre disposition le principe du minimum. Ici, on doit utiliser de manière plus subtile les choses et la condition introduite dans la définition ci-dessus est précisément celle qui permet de contourner la difficulté créée par le fait que le contrôle de croissance exigé n'est plus radial. Pour la preuve, comme pour une présentation de ces méthodes, on renvoie à [BS]².

La première conséquence de cette définition est la propriété suivante :

2. C. A. Berenstein, D. Struppa, Dirichlet series and convolution equations, Publications RIMS, Kyoto, 24, 5, 1988, 783-810.

Proposition 3.2 Soit T une fonctionnelle de $A_p(\Sigma)$, représentable par une fonction mesurable de support dans un cône

$$c(T) + \{|\arg z| \leq \alpha(T)\} \subset \subset \Sigma,$$

et Σ - doucement décroissante. Alors l'opérateur de convolution par T est surjectif de $A_p(\Sigma)$ dans $A_p(c(T) - \Sigma)$.

Nous pouvons en fait décrire plus précisément dans ce cas l'espace quotient

$$\frac{\mathcal{L}(A_p(\Sigma)')}{\widehat{T} \mathcal{L}(A_p(c(T) - \Sigma)')}$$

au moins dans un cas particulier. Supposons qu'outre le fait que T soit Σ -doucement décroissant, il existe $\epsilon_0 > 0$ et $D_0 > 0$ tels que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, les composantes connexes de l'ensemble

$$S(\widehat{T}; \epsilon, D) := \left\{ z, \left\{ \begin{array}{l} |\mathcal{L}(T)(z)| \leq D e^{-\epsilon|z|} \text{ si } z \in H^{\alpha(T)} \\ |\mathcal{L}(T)(z)| \leq D e^{-\epsilon|z|^\sigma} \text{ sinon} \end{array} \right. \right\}$$

ne contiennent chacune *qu'au plus un seul zéro* de \widehat{T} . Une telle condition annexe s'énonce encore en disant que l'ensemble $\{\widehat{T} = 0\}$ est un *un ensemble d'interpolation* relativement au poids p . Alors, si

$$V = \{\mathcal{L}(T) = 0\} = \{\mu_k = \rho_k e^{i\theta_k}, k \in \mathbf{N}^*\},$$

on a un isomorphisme topologique entre le quotient

$$\frac{\mathcal{L}(A_p(\Sigma)')}{\widehat{T} \mathcal{L}(A_p(c - \Sigma)')}$$

et l'espace des suites a_k telles que, pour tout $B > 0$

$$|a_k| = \mathbf{O}\left(\exp[B|\rho_k|^\sigma \beta(\theta_k; \alpha(T))^\sigma - \frac{1}{B}\rho_k \cos \theta_k]\right).$$

On déduit de la représentation de cette algèbre quotient le fait que, sous ces hypothèses, toute fonction de $A_p(\Sigma)$ qui est T -moyenne périodique se représente avec un unique développement en série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\mu_k z},$$

la convergence ayant lieu dans $A_p(\Sigma)$ et la suite des coefficients $(a_k)_k$ se pliant aux contraintes de décroissance (3.9). C'est ce principe que nous pouvons utiliser pour énoncer par exemple le

Théorème 3.1 Soit p le poids $p(z) = |z|^\rho$, $\rho > 1$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$$

une série de Dirichlet d'abscisse de convergence négative ou nulle, telle que les fréquences soient incluse dans l'ensemble des zéros d'une fonction de $\mathcal{L}(A_p(\Pi^+)')$;

on suppose que l'antécédent de cette fonction par Laplace est une fonctionnelle Π^+ -doucement décroissante et que les conditions d'interpolation (toujours relatives à Γ) mentionnées ci-dessus sont remplies. Alors, si la somme de la série de Dirichlet se prolonge en une fonction de $A_p(\mathbb{C})$, la suite des coefficients $(c_k)_k$ satisfait les estimations

$$\forall B > 0, |a_k| = \mathbf{O}(e^{-B\lambda_k^\sigma}).$$

Preuve. C'est une conséquence de l'approche développée dans l'introduction et des techniques présentées dans cette section.

3.4 D'autres versions de ces "gap" théorèmes.

Nous terminerons ce cours en citant un résultat de L. Ehrenpreis dans le même esprit, concernant cette fois les séries de type Riemann.

Proposition 3.3 *Soit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^z}$$

une série de Dirichlet convergent dans $\operatorname{Re} z > 1$. On suppose que la somme de cette série se prolonge en une fonction entière f telle que

$$|f(z)| \leq C \exp[e^{\beta|z| \log |z|}]$$

avec $C > 0$ et $0 < \beta < 1$. Alors, on a, pour tout $B > 0$

$$|a_k| = \mathbf{O}(e^{-B|k|})$$

lorsque k tend vers l'infini.

On trouvera la preuve de ce résultat dans le livre de L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables*, Wiley Interscience, 1970 (chapitre 12, et plus particulièrement p. 426). Elle est inspirée de l'approche que nous venons de développer pour le poids $p(z) = |z|^\rho$, $\rho > 1$. Notons que l'on ne peut tolérer $\beta = 1$, comme le montre l'exemple de la série de Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z},$$

dont la somme se prolonge à tout le plan en une fonction entière de croissance

$$|f(z)| \leq C \exp[e^{|z| \log |z|}]$$

pour un certain $C > 0$.