Master CSI-UE / Master CSI-THCS-Analyse de Fourier

Devoir maison 2
à remettre avant le 10 décembre 2008 17h dans le casier de J. Esterle

[1]

Une séance de correction sera organisée le 12 Décembre 2007 à 10h

Exercice 1

1) En utilisant par exemple la transformée de Walsh rapide sur les colonnes et sur les lignes, calculer la transformée de Walsh de l'image numérisée à 16 pixels

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) Calculer les compressions à 25% et 50% de A.

Exercice 2

1) En appliquant la définition de la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$, montrer que si on pose $f(t) = e^{-|t|}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

2) Soit $a > 0$. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-an}$.

3) En utilisant une formule du cours, en déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2+n^2}$ pour $b \in \mathbb{R}$.

[1] Pour toute question concernant ce Devoir s'adresser à charles.dossal@math.u-bordeaux1.fr ou esterle@math.u-bordeaux.fr

Exercice 3

En utilisant la FFT décimation temporelle, calculer la transformée de Fourier discrète de

$$u = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1].$$

2) On note $v \underset{8}{*} w$ la convolution cyclique de $v = [v[0], ..., v[7]]$ et $w = [w[0], ...w[7]]$. Soit $h = [h[0], ..., h[7]]$.

Montrer que l'équation $u \underset{8}{*} v = h$ possède des solutions si et seulement si $h[1] = h[2] = h[3] = h[5] = h[6] = h[7] = 0$. Montrer qu'il existe alors une unique solution v telle que $|Supp(\hat{v})| \leq 2$.

3) Calculer cette solution par FFT inverse (décimation fréquentielleelle) si $h = [8, 0, 0, 0, -8, 0, 0, 0]$.

Exercice 4

1) On pose $g(x) = 0$ si $|x| < \pi$, $g(x) = 1$ si $\pi \leq |x| \leq 2\pi$, $g(x) = 0$ si $|x| > 2\pi$.

Dessiner le graphe de g, et calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{itx} dx.$$

2) On pose $f(t) = \frac{sin(2\pi t) - sin(\pi t)}{\pi t}$ pour $t \neq 0$, $f(0) = 1$. Donner la transformée de Fourier de f.

3) En utilisant le théorème d'échantillonnage de Shannon, déterminer pour quelles valeurs positives de δ on peut reconstituer toutes les valeurs de f à partir de la suite $(f[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$. Dans ce cas donner une formule explicite permettant de calculer $f(t)$ à partir de la suite $(f[\delta m])_{m \in \mathbb{Z}}$. Détailler le cas particulier $\delta = \frac{1}{4}$.