Semestre 4, Année 2006-2007 SESSION 1

UE : MAT401

Date : 14 Mai 2007, Durée : 3h

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice I (séries entières, intégrales impropres)-80 pts

I.1 (10 pts) *Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, l'intégrale impropre*

$$\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

*est convergente (*log *désigne ici le logarithme néperien) ; on posera dans la suite de l'exercice*

$$\forall\, x \in [-1,1]\,,\ \mathrm{Li}(x) := -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt\,.$$

Les seuls points de l'intervalle fermé d'extrémités 0 et x posant problème pour la convergence de l'intégrale sont $t=0$ (si $x \in [-1,1[$) et $t = 0,1$ si $x=1$. Au voisinage de $t=0$, $\log(1-t) = -t + o(t)$, ce qui prouve que la fonction

$$t \in]-\infty, 1[\setminus\{0\} \longmapsto \frac{\log(1-t)}{t}$$

se prolonge en une fonction continue sur $]-\infty,1[$ (en prenant -1 comme valeur en $t=0$) ; le point $t=0$ ne pose donc aucun problème relativement à la convergence de l'intégrale impropre. Si $x=1$, l'extrémité $t=1$ pose problème, mais l'on sait que $\log(1-t)/t \sim \log(1-t)$ au voisinage de $t=1$ et que, pour $\epsilon \in]0,1[$, l'intégrale

$$\int_0^\epsilon \log u\, du$$

est une intégrale impropre convergente (car $|\log u| < u^{-1/2}$ au voisinage de 0_+ et que $u \mapsto u^{-1/2}$ est intégrable sur $]0,\epsilon[$ d'après le critère de Riemann puisque $1/2 < 1$) ; il en est de même par changement de variables pour l'intégrale impropre

$$\int_{1-\epsilon}^1 \log(1-t)\, dt$$

(le changement de variable consistant à poser $u = 1-t$) ; grâce au critère de comparaison, l'intégrale

$$\int_{1-\epsilon}^1 \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

est convergente et l'extrémité $t = 1$ ne pose donc pas de problème relativement à la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\,dt\,.$$

I.2 (10 pts) *Vérifier, pour tout $x \in]-1,1[$, la formule*

$$\mathrm{Li}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,. \tag{$\dagger$}$$

On sait que pour $t \in]-1,1[$,

$$\log(1-t) = -\int_0^t \frac{du}{1-u} = -\int_0^t \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u^n\Big)\,du = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\,.$$

On a donc, pour $t \in]-1,1[$,

$$\frac{\log(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}\,,$$

la convergence de la série au second membre étant normale sur tout segment d'extrémités 0 et x, x appartenant à $]-1,1[$ (attention cependant, la convergence n'est pas normale sur $[-1,1]$!). Puisque la convergence normale d'une série de fonctions sur un segment fermé borné $[a,b]$ implique la convergence uniforme de cette série sur ce même segment, on a, si $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt &= -\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}\Big)\,dt \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n+1}\,dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,,
\end{aligned}$$

d'où la formule voulue.

I.3 (10 pts) *En citant avec soin un résultat précis du cours, établir les deux formules*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}\,(-1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\
\mathrm{Li}\,(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

La série de fonctions $[\frac{x^n}{n^2}]_{n\geq 1}$ est normalement convergente sur $[-1,1]$ puisque

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \forall n \geq 1\,,\ \frac{|x^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

et que la série de Riemann $[n^{-2}]_{n\geq 1}$ converge ; la somme de cette série de fonctions, soit la fonction

$$x \in [-1,1] \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

est donc une fonction continue sur $[-1,1]$ (limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales, donc continues sur $[-1,1]$). Or la fonction

$$x \in [-1,1] \longmapsto -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

est aussi une fonction continue sur $[-1,1]$: la continuité sur $[-1,1[$ résulte du fait que la primitive d'une fonction continue est continue, la continuité en $x=1$ résulte du fait que

$$-\lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt = -\int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

en vertu par exemple du critère de Cauchy pour les intégrales impropres convergentes. Puisque

$$\mathrm{Li}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

pour tout $x \in]-1,1[$ (d'après **I.2**) et que les deux membres de cette égalité se prolongent en des fonctions continues sur $[-1,1]$, il y a aussi égalité des prolongements, donc les deux formules voulues (en $x=-1$ et $x=1$).

I.4 (10 pts) *Calculer, pour $x \in]0,1[$, la dérivée de la fonction*

$$x \longmapsto \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x)$$

et en déduire la relation

$$\forall\, x \in]0,1[\,,\ \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x) = \mathrm{Li}\,(1) - \log(x)\log(1-x)\,. \qquad (\dagger\dagger)$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse et la règle de dérivation des fonctions composées, la dérivée sur $]-1,1[$ de

$$x \longmapsto \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x) = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\,dt - \int_0^{1-x} \frac{\log(1-t)}{t}\,dt$$

est la fonction

$$\begin{aligned} x \in]-1,1[\quad &\longmapsto \quad \frac{-\log(1-x)}{x} + \frac{\log(1-(1-x))}{1-x} = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{\log x}{1-x} \\ &= \quad -\frac{d}{dx}\Big[x \longmapsto \log x \times \log(1-x)\Big]\,. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante C telle que

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x) = C - \log x \times \log(1-x)\,.$$

En faisant tendre x vers 1 et en utilisant le fait que

$$\lim_{x \to 1^-} (\log x \times \log(1-x)) = 0\,,$$

on trouve

$$C = \mathrm{Li}\,(1) + \mathrm{Li}\,(0) = \mathrm{Li}\,(1)$$

et par conséquent la formule voulue.

I.5 (20 pts) *Après avoir calculé les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique f telle que $f(\theta) = \theta$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et utilisé la formule de Parseval (que l'on l'on énoncera précisément), montrer que* $\mathrm{Li}\,(1) = \pi^2/6$. *En utilisant judicieusement les formules (†) et (††), calculer ensuite (en fonction de π et de* $\log 2$*), la somme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n^2}\,.$$

Si $n \in \mathbb{Z}^*$, un calcul facile (intégration par parties) montre que

$$\begin{aligned} c_n(f) \quad &:= \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta e^{-in\theta}\,d\theta \\ &= \quad \frac{1}{2\pi}\Big[\theta \frac{e^{-in\theta}}{-in}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,d\theta = \frac{i}{n}\,, \end{aligned}$$

tandis que

$$c_0(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta d\theta = \pi$$

(attention, la fonction f dont on calcule ici la suite des coefficients de Fourier complexes n'est ni paire ni impaire !). D'après la formule de Plancherel (principe de conservation de l'énergie lors de la prise de spectre), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \pi^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta^2\, d\theta = \frac{4\pi^2}{3}\,,$$

d'où il résulte

$$\mathrm{Li}\,(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

On remarque (d'après la formule (†) établie au **I.2**) que

$$\mathrm{Li}\,(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n^2}\,.$$

D'après la formule (††) établie au **I.4** appliqée précisément à $x = 1/2$, on trouve

$$2\mathrm{Li}\,(1/2) = \mathrm{Li}\,(1) - (\log(1/2))^2 = \frac{\pi^2}{6} - (\log 2)^2\,.$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\log 2)^2}{2}\,.$$

I.6 (10 pts) *Vérifier (en utilisant l'expression* (†) *de* Li *établie au* **I.2***) pour tout* $x \in]-1,1[$*, la formule*

$$\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(-x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(x^2)\,,$$

puis en déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

On a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)x^n}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^{2p}}{4p^2} = \frac{\mathrm{Li}\,(x^2)}{2}\,.$$

En faisant tendre x vers 1 par valeurs inférieures, il vient

$$\mathrm{Li}\,(1) + \mathrm{Li}\,(-1) = \frac{\mathrm{Li}\,(1)}{2}\,,$$

d'où
$$\mathrm{Li}\,(-1) = -\frac{\mathrm{Li}\,(1)}{2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

I.7 (10 pts) *Montrer que la fonction*
$$x \in]-1,1[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+x^2}$$
est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et exprimer sur cet intervalle sa dérivée sous la forme de la somme d'une série de fonctions (cette question est indépendante du reste de l'exercice).

Comme
$$\frac{|x|^n}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}\,,\ \forall x \in [-1,1]\,,$$
la série de fonctions
$$x \in [-1,1] \longmapsto u_n(x) := \frac{x^n}{n^2+x^2}\,,\ n \geq 1$$
est normalement convergente sur $[-1,1]$, donc *a fortiori* sur $]-1,1[$. Chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et on a
$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(n^2+x^2) - 2x^{n+1}}{(n^2+x^2)^2} = \frac{x^{n-1}(n^3+(n-2)x^2)}{(n^2+x^2)^2}\,.$$
Si $a \in]0,1[$, on peut majorer $|u_n'|$ sur $[-a,a]$ par
$$\sup_{[-a,a]} |u_n'(x)| \leq \frac{a^{n-1}(n^3+|n-2|a^2)}{n^4}\,,$$
le terme majorant étant le terme général d'une série numérique convergente (on le voit avec le critère de d'Alembert par exemple puisque $a < 1$). La série de fonctions $[u_n']_{n\geq 1}$ converge donc normalement sur tout segment fermé borné $[\alpha,\beta]$ strictement inclus dans $]-1,1[$. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique donc et la fonction $\sum_{n\geq 1} u_n$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$, de dérivée la fonction
$$x \in]-1,1[\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(n^3+(n-2)x^2)}{(n^2+x^2)^2}\,.$$

Exercice II (intégrales curvilignes, intégrales impropres)-50 pts
On considère le sous-ensemble S du plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^3 + y^3 - 3xy = 0\}\,.$$

II.1 (10 pts) *Si $t > 0$, déterminer les coordonnées $(x(t), y(t))$ de l'unique point d'intersection (différent de l'origine) de S avec la droite d'équation $y = tx$. On conviendra de poser par la suite $x(0) = y(0) = 0$.*
Si $(x,y) = (x,tx)$ est un point de S, on a

$$x^3(1+t^3) = 3tx^2\,,$$

ce qui implique $x = 0$ ou $x = \dfrac{3t}{(1+t^3)}$; le cas $x = 0$ conduit à $y = tx = 0$, ce qui donne l'origine, solution ici écartée. Le seul point d'intersection (différent de $(0,0)$) de S avec la droite d'équation $y = tx$ a donc pour coordonnées

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}\,.$$

II.2 (15 pts) *Montrer que l'application $\gamma\ : t \in [0,+\infty[\mapsto (x(t), y(t))$ est injective ; vérifier*

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$$

et, après avoir étudié les variations de $t \longmapsto x(t)$ sur $]0,+\infty[$, représenter sommairement l'ensemble $\gamma(]0,+\infty[)$. On conviendra de poser par la suite $\gamma(+\infty) = (0,0)$.
Pour $t > 0$, on a $x(t) \neq 0$ (sinon, on aurait aussi $y(t) = 0$ et par conséquent $\gamma(t) = (0,0)$, ce qui est impossible). Si t_1 et t_2 sont strictement positifs et $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, on a donc $y(t_1)/x(t_1) = t_1 = y(t_2)/x(t_2) = t_2$. Comme de plus $\gamma(0) = (0,0) \neq \gamma(t)$ pour tout $t > 0$, l'application $\gamma\ : [0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}^2$ est bien injective. On vérifie aussi que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{3t}{1+t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^2}{1+t^3} = 0\,,$$

ce qui prouve que $\gamma(t)$ tend vers $(0,0)$ lorsque t tend vers $+\infty$. On a

$$x'(t) = \frac{3(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,,$$

d'où il suit que x croît d'abord (pour t entre 0 et $2^{-1/3}$) jusquà $x_{\max} = 2^{2/3} \simeq 1.59$, puis ensuite décroît vers sa limite 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Comme

$y(t) = tx(t)$, le tracé de l'ensemble $\gamma(]0, +\infty[)$ se présente comme une boucle (sans point double) dans le premier quadrant ; cet boucle enserre un domaine borné D (voir la figure ci-dessous).

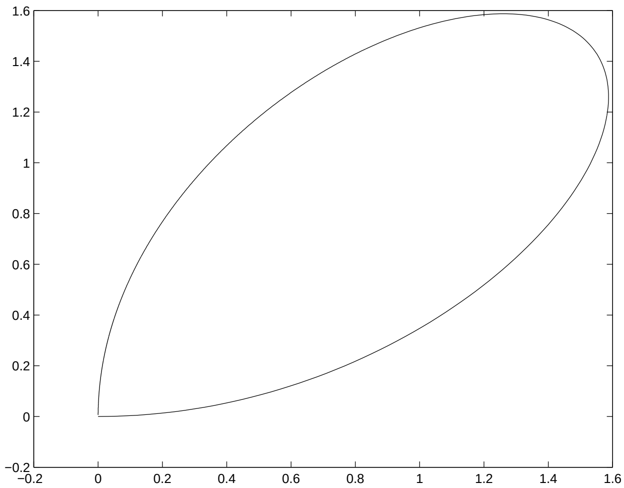

Figure 1: Tracé de $\gamma([0, +\infty[)$

II.3 (10 pts) *Vérifier que pour tout $t > 0$, $x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = x^2(t)$* [1], *puis montrer que l'intégrale impropre*

$$\int_0^\infty (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt$$

est convergente.

On a

$$\frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t)} = \frac{d}{dt}[y(t)/x(t)] = 1$$

lorsque $t > 0$ puisque $y(t) = tx(t)$ et que $x(t) \neq 0$ sur $]0, +\infty[$. La convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,dt$$

résulte de ce que, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{9t^2}{(1+t^3)^2} \sim \frac{9}{t^4}$$

[1] On a pris soin de corriger ici la faute de frappe de l'énoncé : $x(t)y'(t) - x'(t)y(t)$ et non $x(t)y'(x) - x'(t)y(t)$!

et du fait que $t \longmapsto t^{-4}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ grâce au critère de Riemann ($4 > 1$).

II.4 (15 pts) *Calculer*

$$\int_0^{\infty} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\, dt$$

et en déduire la surface du domaine borné entouré par le lacet $\gamma([0, +\infty])$.

On a, par la formule de changement de variables (ici $u = t^3$) dans les intégrales impropres,

$$\int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\, dt = 3 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = 3\Big[\frac{-1}{1+u}\Big]_0^{\infty} = 3\,.$$

D'après la formule de Green-Riemann,

$$\int_\gamma (xdy - ydx) = 2 \iint_D dxdy = 2 \times \text{aire}\,(D)$$

(en prolongeant γ à $[0, +\infty]$, on a fait de γ un lacet simple dont le support enserre le domaine borné D) ; ce lacet est en effet ici parcouru dans le sens trigonométrique car $y(t)/x(t) = t$ croît avec t. L'aire de D vaut donc $3/2$. Nous avons calculé ici l'aire de la boucle d'une *strophoïde*.

Exercice III (séries de Fourier et séries numériques)

III.1 (15 pts) *Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients de Fourier complexes valent*

$$c_k(f) = \begin{cases} \dfrac{\text{signe}\,(k)}{i \log |k|} \text{ si } |k| \geq 2 \\ 0 \text{ si } k = -1, 0, 1\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

Montrer que la fonction $F\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}\,,\ F(\theta) = \int_0^\theta f(u)\, du$$

est continue, 2π-périodique, et même de classe C^1 par morceaux.

Si $\theta_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$F(\theta_0 + h) - F(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} f(u)\, du\,.$$

Comme f est continue par morceaux, elle est bornée en module au voisinage de θ_0 (par une constante $m(\theta_0)$) et l'on a, pour $|h|$ assez petit

$$|F(\theta_0 + h) - F(\theta_0)| \leq m(\theta_0)|h|\,,$$

ce qui prouve que F est continue en θ_0. La fonction F est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, sur un segment $[a,b]$ sur lequel $f_{]a,b[}$ admet un prolongement continu $\tilde{f}$, F a pour dérivée sur $[a,b]$ (à droite en a, à gauche en b) la fonction $\tilde{f}$. Ainsi la fonction F est-elle C^1 par morceaux (le partitionnement étant celui qui correspond à la fonction f supposée continue par morceaux). De plus

$$\begin{aligned} F(\theta+2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(u)du = F(\theta) + \int_\theta^{\theta+2\pi} f(u)du \\ &= F(\theta) + \int_0^{2\pi} f(u)\,du = F(\theta) \end{aligned}$$

puisque f est 2π-périodique (d'où l'avant-dernière égalité) et que $c_0(f)=0$ (d'où l'égalité finale) ; la fonction F est donc aussi 2π-périodique (attention, le fait que f le soit ne suffit pas !).

III.2 (15 pts) *En utilisant la formule d'intégration par parties, montrer que les coefficients de Fourier complexes de F sont donnés si $k \neq 0$ par*

$$c_k(F) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|k|\,\log|k|} \text{ si } |k| \geq 2 \\ 0 \text{ si } k = \pm 1 \end{cases}$$

et si $k=0$ par[2]

$$c_0(F) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} uf(u)\,du\,.$$

On a, si $k \neq 0$, en effectuant une intégration par parties après avoir découpé $[0,2\pi]$ en segments $[a_l, a_{l+1}]$, $l=0,\dots,N-1$ tels que $f_{]a_l,a_{l+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_l,a_{l+1}]$ ($a_0=0$, $a_N=2\pi$),

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{N-1}\Big[F(\theta)\frac{e^{-ik\theta}}{-ik}\Big]_{a_l}^{a_{l+1}} + \frac{1}{2i\pi k}\sum_{l=0}^{N-1}\int_{a_l}^{a_{l+1}} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[F(\theta)\frac{e^{-ik\theta}}{-ik}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2i\pi k}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \\ &= 0 + \frac{c_k(f)}{ik} = \frac{c_k(f)}{ik}\,. \end{aligned}$$

[2] Il y avait ici une erreur dans l'énoncé car il manquait un facteur $1/2\pi$ au second membre ; il n'en a pas été tenu compte dans la correction.

On en déduit les formules voulues pour $k \neq 0$ puisque

$$\frac{\text{signe}\,(k)}{i^2 k \log |k|} = -\frac{1}{|k| \log |k|}$$

pour tout entier k différent de $-1, 0, 1$ et que $c_{\pm 1}(F) = c_{\pm 1}(f) = 0$. Pour $k = 0$, on trouve toujours suivant le même principe d'intégration par parties après découpage de $[0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
c_0(F) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^\theta f(u)du \Big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \Big(\Big[F(\theta)\theta \Big]_{a_l}^{a_{l+1}} - \int_{a_l}^{a_{l+1}} f(u)udu \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(\Big[F(\theta)\theta \Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(u)udu \Big) \\
&= F(2\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uf(u)\, du \\
&= F(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uf(u)\, du \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uf(u)\, du\,.
\end{aligned}$$

III.3 (10 pts) *Quelle est la nature de la série numérique* $\Big[\dfrac{1}{n \log n}\Big]_{n \geq 2}$ *?*

La fonction décroissante

$$t \in]1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{t \log t}$$

ayant pour primitive sur cet intervalle

$$x \longmapsto \log(\log x)$$

(qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$), le critère de comparaison série *versus* intégrale s'applique et assure que la série de Bertrand $\Big[\dfrac{1}{n \log n}\Big]_{n \geq 2}$ est divergente.

III.4 (20 pts) *Enoncer le théorème de Jordan-Dirichlet (en un point $\theta_0 \in \mathbb{R}$) pour une fonction continue par morceaux et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. La fonction continue et 2π-périodique F peut-elle avoir une dérivée à gauche et à droite en $\theta = 0$?*

Voici l'énoncé précis du théorème de Jordan-Dirichlet : si la fonction F admet une dérivée à gauche et à droite au point θ_0 (c'était la clause de sécurité à ne pas oublier !), alors

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_k(F) e^{ik\theta_0} \Big) = \frac{F(\theta_0^-) + F(\theta_0^+)}{2} \,,$$

où $F(\theta_0^-)$ désigne la limite en θ_0 de la restriction de F à $]-\infty, \theta_0[$ et $F(\theta_0^+)$ la limite en θ_0 de la restriction de F à $]\theta_0, +\infty[$. Si ce résultat s'appliquait ici en $\theta = 0$, on trouverait

$$0 = F(0) = -2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u f(u)\, du \,,$$

ce qui est absurde d'après le **III.3**. Il est donc impossible que F ait une dérivée à gauche et à droite en $\theta = 0$.

III.5 (10 pts) *Peut-il vraiment exister une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique dont les coefficients de Fourier sont donnés comme au* **III.1** *par (*) ?*

D'après **III.1**, si f existait, F devrait être C^1 par morceaux, donc en particulier avoir une dérivée à gauche et à droite en 0, ce qui contredirait le résultat obtenu au **III.4**. Il ne peut donc exister de telle fonction f satisfaisant à $(*)$[3].

[3] On aurait aussi pu voir cela directement en remarquant que, pour une telle fonction f, on aurait eu $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 = +\infty$, ce qui aurait contredit le théorème de Plancherel ; c'était plus court, mais le but du jeu était de tester les connaissances autour du théorème de Jordan-Dirichlet.