Question 1

Soit u une fonction harmonique dans une couronne ouverte $\{R_1 < |z| < R_2\}$. On pose, pour tout $r > 0$,

$$f(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Montrer que $f(r) = a \log r + b$, où a et b sont deux constantes.

Si u est une fonction harmonique (donc C^∞) dans la couronne $\{R_1 < |z| < R_2\}$, la fonction

$$r \mapsto f(e^r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{r+i\theta})\, d\theta$$

est de classe C^1 et se différentie en utilisant le théorème (élémentaire ici) de dérivation des intégrales fonction d'un paramètre. On a

$$\frac{d}{dr}[u(e^r \cos\theta, e^r \sin\theta)] = e^r \langle \nabla u(e^r \cos\theta, e^r \sin\theta), \nu_\theta \rangle\,,$$

où $\nu_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ est le vecteur ν_{ext} au point

$$(e^r \cos\theta, e^r \sin\theta)$$

du bord du disque $D(0, e^r)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}[f(e^r)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(e^r\cos\theta, e^r\sin\theta)\, e^r\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(0,e^r)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(y)\, d\sigma(y).
\end{aligned}$$

La formule de la divergence implique que si

$$R_1 < e^{r'} < e^r < R_2,$$

on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D(0,e^r)} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(y)\, d\sigma(y) \\
&\qquad - \int_{\partial D(0,e^{r'})} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\text{ext}}}(y)\, d\sigma(y) \\
= \;& \int_{e^{r'}<|y|<e^r} \Delta u(y) d\lambda(y) = 0.
\end{aligned}$$

La dérivée de $r \mapsto f(e^r)$ est don constante, ce qui prouve que cette fonction est affine.

Question 2

Montrer que si P est un polynôme de Laurent, i.e. $P(z) = \sum_{-N}^{N} a_k z^k$, il existe une subdivision

$$R_0 = 0 < R_1 < ... < R_{m-1} < R_m = +\infty$$

de $]0,\infty[$ *telle que la fonction*

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta}|\,d\theta$$

soit une fonction affine de $\log r$ *sur chaque intervalle ouvert* $]R_k, R_{k+1}[$.

Le polynôme P a comme seul pôle (éventuel) 0 et comme zéros des points $\alpha_1, ..., \alpha_M$, $M \leq 2N$ (comptés avec leurs multiplicités) et que l'on peut ranger dans l'ordre des modules croissants

$$0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_M| < +\infty.$$

On pose $R_1 = \inf|\alpha_k|$, $R_2 = \inf\{|\alpha_k|, |\alpha_k| > R_1\}$, ..., $R_{j+1} := \inf\{|\alpha_k|, |\alpha_k| > R_j\}$, etc. On s'arrête dès que l'ensemble (fini) des zéros de P est épuisé. On prend alors $R_m = +\infty$. La fonction

$$z \mapsto \log|P(z)|$$

est harmonique dans chaque couronne

$$\{R_j < |z| < R_{j+1}\},$$

car si f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas, on a

$$\Delta[\log|f|] = \frac{1}{2}\Delta[\log|f|^2] = \frac{1}{2}\Delta[\log(f\overline{f})]$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta[\log(f\overline{f})] &= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\log(f\overline{f})\Big] \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}(1/\overline{f}) = 0. \end{aligned}$$

On sait donc (question 1) que, pour tout $j = 0, ..., m-1$, il existe des constantes α_j et β_j telles que, pour $r \in]R_j, R_{j+1}[$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(re^{i\theta})|\, d\theta = \alpha_j \log r + \beta_j.$$

On peut ici calculer α_j explicitement. Il s'agit de dériver, comme à la question 1,

$$g \ : r \mapsto \int_0^{2\pi} \log|P(e^{r+i\theta})|\, d\theta.$$

Différentions pour cela $r \mapsto \log|P(e^{r+i\theta})|$ à θ fixé. On peut écrire :

$$d\log|P| = \frac{1}{2}\Big(\frac{P'(z)}{P(z)}dz + \frac{\overline{P'(z)}}{\overline{P(z)}}\, d\overline{z}\Big).$$

Donc

$$d_r \log|P(e^{r+i\theta})| = e^r \mathrm{Re}\Big(\frac{P'(e^{r+i\theta})}{P(e^{r+i\theta})}e^{i\theta}\Big)\, dr.$$

On trouve donc que, si $R_j < e^r < R_{j+1}$,

$$\begin{aligned} g'(r) &= \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{P'(e^{r+i\theta})}{P(e^{r+i\theta})}\Big)e^{r+i\theta}d\theta\Big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,e^r)}\frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)}\,d\zeta\Big) \\ &= \operatorname{card}\{\alpha, P(\alpha)=0, 0<|\alpha|\le R_j\} - \operatorname{ordre}(0). \end{aligned}$$

On applique en effet ici le théorème de Rouché et les zéros de P sont comptés avec leur multiplicité.

Remarque. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que la fonction

$$r \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|P(e^{r+i\theta})|\,d\theta$$

est continue sur $]0,\infty[$. C'est donc une fonction affine par morceaux et la pente augmente au fur et à mesure que l'on dépasse les modules des zéros de P.