K1 MA4021 **Feuille d'exercices n° 1** **2012**

Révisions - Intégrale de Riemann

Rappel théorique (Définition de l'intégrale de Riemann) : Soient

- un intervalle $[a,b]$ fermé et borné ;
- une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;
- une division Δ de l'intervalle $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
  Le diamètre de la division Δ se définit par $diam\,\Delta = \|\Delta\| = \max_{i=1,n}(x_i - x_{i-1})$;
- un système de n points intermédiaires $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

On définit la somme de Riemann associée à la division Δ et au points $(\xi_i)_{i=1,n}$

$$\sigma(f,\Delta,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

On dit que la fonction f est Riemann intégrable si et seulement si il existe une valeur I_f telle que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ de sorte que, pour toute division Δ avec $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$,

$$|\sigma(f,\Delta,\xi_i) - I_f| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(x)dx = I_f$ et on l'appelle l'intégrale Riemann de f.

EXERCICE 1.

1. Donner une interprétation géométrique de sommes de Riemann et de l'intégrale de Riemann.
2. Calculer avec la définition $\int_a^b x^n dx$.

EXERCICE 2. En utilisant les sommes de Riemann pour une fonction à choisir, trouver les limites

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n} \right)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right)$.

EXERCICE 3.

1. Soit $x > 0$. Montrer que la limite suivante existe : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}}$.
2. En déduire que $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$ pour $x > 0$ quelconque.

EXERCICE 4.

1. Etablir les égalités suivantes, où $x \in \mathbb{R}$ et $n > 0$ entier :
$$\sum_{p=1}^{n} \sin\frac{x}{2n}\sin\frac{px}{n} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2n} - \cos\frac{2n+1}{2n}x\right), \quad \sum_{p=1}^{n} \sin\frac{x}{2n}\cos\frac{px}{n} = \frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2n} + \sin\frac{2n+1}{2n}x\right).$$
2. Utliser ces résultats pour établir pour $x > 0$ quelconque :
$$\int_0^x \sin t\,dt = 1 - \cos x, \quad \int_0^x \cos t\,dt = \sin x.$$

EXERCICE 5. (Intégration de fonctions continues) Montrer que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

EXERCICE 6. (Fonction qui n'est pas Riemann intégrable) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1] \cap Q$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable (L'intégrale de Lebesque corrige à ce défaut, car f est Lebesgue intégrable et $\int_a^b f(x)dx = 0$).

EXERCICE 7.

1. Pour $f \in C^1([a,b])$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin nt\,dt = 0$.
2. Démontrer le même résultat pour une fonction f continue sur $[a,b]$.

EXERCICE 8. (Formule de Leibniz-Newton) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose Riemann intégrable et on suppose aussi qu'elle admette une primitive $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ (F continue sur $[a,b]$, dérivable sur (a,b) et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a,b)$). En utilisant le théorème d'accroissement finis, montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

EXERCICE 9. Calculer

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx, \qquad \int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx, \quad \int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx,$$
$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)(x-4)}dx, \qquad \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx, \quad \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}dx,$$
$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx, \qquad \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx, \quad \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx,$$
$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}dx.$$

EXERCICE 10. Calculer

$$\int \frac{1}{x(1+\log x)^3}dx, \quad x \in]\frac{1}{e}, +\infty[, \qquad \int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

EXERCICE 11. Calculer

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |\sin x|\cos x dx, \qquad \int_e^5 \log t dt, \quad \int x^a \log x dx,\ a \in \mathbb{R}, \quad \int e^{ax}x^3 dx,$$
$$\int \sin\log x dx, \qquad \int_0^{2\pi} \cos 2x \sin 3x dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos 4x \cos 3x dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^6 x dx,$$
$$\int_0^{2\pi} \cos^5 x dx, \qquad \int \arctan x dx, \quad \int_0^{\pi/8} (x^2+7x-5)\cos 2x dx, \quad \int e^x \cos x dx.$$

EXERCICE 12. Calculer

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx, \qquad \int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx, \quad \int \frac{1}{1+\tanh x}dx,$$
$$\int t^4(1+t^5)^5 dt, \qquad \int \frac{\log t}{t}dt, \quad \int \cos 2x(\sin 2x)^4 dx,$$
$$\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}dx.$$

EXERCICE 13.

1. Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = 2$.
2. La même question pour $x = -2$.