K1 MA4021	Feuille d'exercices n° 2	2012

Théorème de convergence dominée (=TCD) sur $\mathbb{R}^1$.

EXERCICE 1.

1. Soit g_n une fonction définie sur $]0,1]$ par les relations
$$g_n(x) = n,\ x \in]0, \frac{1}{n}], \quad g_n(x) = 0,\ x \in]\frac{1}{n}, 1].$$
Pour tout $x \in]0,1]$, posons $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Calculer g. La convergence est-elle simple ? monotone ? uniforme ?
2. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx, \quad \int_0^1 g(x)dx.$ Le TCD est-il applicable dans cette situation ? Justifiez votre réponse.
3. Soit $f \in C([0,1])$. Démontrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g_n(x)dx = f(0).$$

EXERCICE 2.

1. Soit $0 \le \alpha < 1$ et
$$f_n(x) = \chi_{I_n} \cdot \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in]0,1],$$
où χ_I est la fonction indicatrice de l'intervalle I et $I_n = [1/(n+1), 1/n]$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$. Le TCD est-il applicable dans cette situation ?
2. Les mêmes questions pour $\alpha = 1$.

Volume et mesure de Lebesgue. Intégrale de Riemann sur $\mathbb{R}^d$.

EXERCICE 3.

1. Calculer les airs des régions données par les relations :
$\{(x,y) : 0 \le x, x \le y \le x+1, y \le 2\}$; $\{(x,y) : 0 \le x, x^3 \le y \le x^2\}$;
$\{(x,y) : x^2 \le y \le x^3, y \le 8\}$; $\{(x,y) : 0 \le y, x^2+y^2 \le 1\}$.
2. Calculer les airs de régions avec les frontières suivantes :
$4y = x^2 - 4x, x = y+3;\quad y^2 = 10x+5, y^2 = 9-6x.$

EXERCICE 4. Calculer les volumes des régions avec les frontières suivantes :
$y = x^2, y = 1, z = 0, z = x^2+y^2$; $z = 0, |x+y| < \pi/2, |x-y| < \pi/2, z = \cos x \cos y$;
$n\pi \le x^2+y^2 \le (n+1)pi, z = 0, z = \sin(x^2+y^2)$; $x+y+z = a, 4x+y = a, 4x+3y = 3a, y = 0, z = 0, a > 0$;
$x^2+y^2 = R^2, x+y+z = a, x+y+z = -a, a > 0.$

EXERCICE 5. Let $X = [0,a] \times [0,b]$, la partition $(X_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ est donnée par
$$X_{ij} = \left[\frac{ia}{n}, \frac{(i+1)a}{n}\right] \times \left[\frac{jb}{n}, \frac{(j+1)b}{n}\right]$$
et $(\xi_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ sont les centres de X_{ij}. Calculer les sommes de Riemann $\sum_{i,j} f(\xi_{ij}) m(X_{ij})$ et leur limite $\iint_X f(x)dx$ dans les situations suivantes ($x = (x_1, x_2)$) :
$f(x) = px_1 + qx_2,\ x \in X$; $f(x) = x_1x_2,\ x \in X$; $f(x) = e^{x_1+x_2}, x \in X$.

EXERCICE 6. Calculer :

1. $I_1 = \iint\limits_D (x+y)e^{-x}e^{-y}dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$,
2. $I_2 = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < x, x^2+y^2 > y\}$,
3. $I_3 = \iint\limits_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy$, où $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2+y^2 \geq 1\}$,
4. $I_4 = \iint\limits_D \frac{1}{y\cos(x)+1}dxdy$, où $D = [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]$,
5. $I_5 = \iiint\limits_D zdxdydz$, où $D = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 / y^2+z \leq 1, x^2+z \leq 1\}$.
6. $I_6 = \iint\limits_D xydxdy$, où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x,y > 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a,b > 0$.

EXERCICE 7. Changer l'ordre d'intégration dans l'intégrale $\iint_G f(x,y)dxdy$, où G est donné par les relations :
$y = x^2, x+y = 2$; $x = 0, x = -\sqrt{y}, x = -\sqrt{2-y}$;
$y = 0, x = \sqrt{y}, x+y = 6$; $x = 0, x = \sin y, x = \cos y$, $y \in [0,\pi/2]$;
$x = 0, x = 1, x = y^2, y = e^x$.

EXERCICE 8. Représenter et calculer le volume de

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq z \leq 1, x^2+y^2 \leq z^2+1\}.$$

EXERCICE 9. Calculer :

1. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$, où $D = [0,1]^2$,
2. $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, où D est le disque de centre $(0,1)$ et de rayon 1 du plan.
3. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, où $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2-2y \geq 0, x^2+y^2-1 \leq 0\}$.
4. $\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, où $D = \{(x^2+y^2)^2 \leq xy\}$.

EXERCICE 10. Soient $a,b > 0$. Calculer l'aire de l'ellipse $E = \{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ par deux méthodes différentes.
(On rappelle que l'aire d'un domaine D vaut $\iint_D dx\,dy$.)

EXERCICE 11. Soit $X_n = [0,n]^2 (= [0,n] \times [0,n]$, $Y_n = X_{n+1} \backslash X_n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{Y_n} f(x)dx = 0,$$

où $x = (x_1,x_2)$ et
$f(x) = (x_1^2+x_2^2)^{-\alpha}$, $\alpha < -\frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^4}$; $f(x) = (1+x_1x_2)^{-2}$;
$f(x) = e^{-|x_1-x_2|^2}$.