COURS MAT 401, Printemps 2007

Alain Yger

6 février 2008

Table des matières

1 Séries numériques **1**

1.1 Deux concepts : suites et séries numériques 1

1.2 Comportement asymptotique 3

1.3 Séries à termes positifs ; critères de comparaison 9

1.3.1 Comparaison avec les séries géométriques 11

1.3.2 Comparaison avec les séries de Riemann 15

1.3.3 Confrontation série/primitive 17

1.4 Séries à termes quelconques non absolument convergentes 20

1.4.1 Le critère des séries alternées 20

1.4.2 L'intégration par parties discrète 22

1.4.3 Les critères d'Abel 24

1.5 Opérations sur les séries numériques 26

2 Rappels sur l'intégrale, intégrales impropres **33**

2.1 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de $\mathbb{R}$ 33

2.2 Intégrabilité des fonctions à valeurs complexes sur un intervalle 40

2.3 Semi-intégrabilité sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ 42

2.4 Changement de variables dans les intégrales impropres 46

2.5 L'intégrale curviligne sur un chemin C^1 par morceaux du plan 49

2.5.1 Chemins paramétrés du plan $\mathbb{R}^2$ 49

2.5.2 Intégrale curviligne 49

2.5.3 Un calcul très particulier d'intégrale curviligne 51

2.5.4 Une approche à la formule de Green-Riemann 54

3 Suites et séries de fonctions **59**

3.1 Suites, séries de fonctions ; convergence simple, uniforme 59

3.1.1 Les concepts de suite et série de fonctions 59

3.1.2 Convergence simple ; convergence uniforme 60

3.1.3 Les critères de Cauchy (simple et uniforme) 62

3.1.4 Convergence normale d'une série de fonctions 64

3.1.5 Régularité des fonctions et passage à la limite 65

3.2 Suites de fonctions et intégration 72

3.2.1 Intégration discrète 72

3.2.2 Intégration continue 74

4 Séries entières et séries de Fourier **79**

4.1 Séries entières 79

4.1.1 Définition et premiers exemples de classes de séries entières . . 79

4.1.2 Rayon, disque, cercle de convergence 81

4.1.3 Série dérivée, série primitive 82
4.1.4 Règle d'Abel pour les séries entières 88
4.1.5 Fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{C}$ et formule intégrale de Cauchy 92
4.1.6 Opérations sur les fonctions analytiques 101
4.1.7 Fonctions réelles analytiques sur un intervalle de $\mathbb{R}$ 102
4.1.8 Un "herbier" de fonctions réelles analytiques 103
4.2 Séries de Fourier 112
4.2.1 Le spectre d'une fonction T-périodique 112
4.2.2 Série de Fourier d'une fonction f 115
4.2.3 Conservation de l'énergie et théorème de Plancherel 125

5 Initiation à l'analyse complexe 129
5.1 Fonctions holomorphes et méromorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}$ 129
5.2 Le théorème des résidus 134
5.3 Calcul d'intégrales *via* la formule des résidus 136
5.3.1 Intégrales sur $[0, 2\pi]$ d'expressions rationnelles en les lignes trigonométriques 136
5.3.2 Une application importante : le théorème fondamental de l'algèbre 138
5.3.3 Calcul des intégrales de Fresnel 139
5.3.4 Calcul de l'intégrale de sinuscardinal 140
5.3.5 Le spectre des fractions rationnelles 142
5.3.6 D'autres exemples potentiels... 144

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Deux concepts : suites et séries numériques

Une *suite numérique* est par définition une application définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ (ou éventuellement l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à un seuil $n_0 \in \mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{C}$: par exemple les applications :

$$\begin{array}{rcl} n \in \mathbb{N} & \to & z^n \quad (z \in \mathbb{C}) \\ n \in \mathbb{N}^* & \to & n^{-z} = \exp(-z \log n) \\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} & \to & \dfrac{1}{n(n-1)} \end{array}$$

définissent des suites numériques ; on notera de manière abrégée une telle suite sous la forme $(u_n)_{n \geq n_0}$, n_0 désignant précisément le seuil en deça duquel le nombre u_n n'est plus défini. On dit que u_n est *le terme général* de la suite. Si le terme général de la suite est toujours un nombre réel, la suite est dite *à valeurs réelles*.

C'est sans doute avec le *paradoxe de Zénon* qu'apparaît (avec les questions qu'il engendre en analyse) le concept de *série numérique*. Rappelons ce paradoxe célèbre : un archer (se trouvant en un point A) lance une flèche dans la direction d'un point B. La flèche, que l'archer lance de A vers B, parcourt d'abord la moitié de la distance qui sépare A et B ; puis il la relance depuis son point d'impact, mais la force de son bras ayant diminué de moitié, la flèche ne parcourt plus cette fois que la moitié de la distance séparant le milieu de $[A, B]$ (où elle était arrivée au premier jet) de B ; le processus continue ainsi, la conclusion (qui constitue le dit paradoxe) est que la flèche n'atteindra de fait jamais son but ! On peut aussi formuler ce paradoxe plus sérieusement en énoncant une assertion mathématique qui est loin d'être si anodine que cela (elle a des conséquences intéressantes concernant par exemple la localisation dans le champ complexe des racines d'un polynôme à coefficients complexes en fonction précisément de ses coefficients) : si $\mathcal{E} = \{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^*$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \zeta_j = 0\,,$$

il existe toujours deux éléments distincts ξ et ζ de $\mathcal{E}$ tels que $|\xi|/|\zeta| \in [1/2, 2]$; pour voir cela, supposons que le cardinal de $\mathcal{E}$ vaille n et ordonnons les éléments des $\mathcal{E}$

dans l'ordre des modules décroissants :

$$|\zeta_1| \geq |\zeta_2| \geq ... \geq |\zeta_n| > 0\,;$$

si la conclusion de l'assertion se trouvait en défaut, on aurait :

$$|\zeta_1| > 2|\zeta_2| > 4|\zeta_3| > \cdots > 2^n|\zeta_n|\,.$$

Or

$$\zeta_1 = -\zeta_2 - \zeta_3 - \cdots - \zeta_n\,;$$

l'inégalité triangulaire donne :

$$|\zeta_1| \leq |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n| < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)|\zeta_1| = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}|\zeta_1|\,,$$

ce qui donne

$$|\zeta_1| < \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)|\zeta_1|\,,$$

conclusion contradictoire avec $|\zeta_1| > 0$.

L'axiomatique de $\mathbb{N}$ inclut le fait que tout entier n admet un successeur $n+1$; l'idée de série (on connait les concepts naïf de loi des séries, séries d'évènements, etc...) remonte bien sûr à l'antiquité et constituait (le paradoxe de Zénon en est un exemple) une perception analytique de l'infini.

Définition 1.1 *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ; on appelle <u>série numérique</u> de <u>terme général u_n</u> la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie selon la règle inductive :*

$$S_n = S_{n-1} + u_n\,, \quad n \geq n_0 + 1\,, \tag{1.1}$$

la condition initiale étant :

$$S_{n_0} = u_{n_0}\,;$$

la série de terme général u_n (que l'on notera aussi $[u_n]_{n\geq n_0}$) est donc la suite

$$[u_n]_{n\geq n_0} := \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}\,; \tag{1.2}$$

on dit que $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est la n-ème <u>somme partielle</u> (ou le <u>total cumulé</u> à l'ordre n) de la série de terme général u_n, $n \geq n_0$.

Notons tout de suite que le processus de "capitalisation" des u_k selon la règle (1.1) joue un rôle essentiel : si l'on imagine par exemple les entiers ordonnés suivant l'ordre :

$$0, 1, 3, 2, 5, 7, 9, 4, 11, 13, 15, 17, 6, 19, 21, 23, 25, 27, 8, 29, ...$$

et que l'on "capitalise" suivant cet ordre la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = (-1)^n$, on vérifiera que la suite ainsi définie par

$$\widetilde{S}_0 = u_0\,,\ \widetilde{S}_1 = u_0 + u_1\,,\ \widetilde{S}_2 = u_0 + u_1 + u_3$$
$$\widetilde{S}_3 = u_0 + u_1 + u_3 + u_2\,,\ \widetilde{S}_4 = u_0 + u_1 + u_3 + u_2 + u_5, ...$$

est une suite dont le terme général n'est pas borné tandis que la série de terme général u_n est, elle, une suite dont le terme général S_n appartient à $\{0, 1\}$ ($S_{2k} = 1, S_{2k+1} = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$). Les deux processus de "'capitalisation" de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnent naissance à des suites numériques de nature différente, ce qui montre bien que la règle de "capitalisation" imposée en (1.1) joue un rôle essentiel. On y reviendra.

1.2 Comportement asymptotique

Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique ; le comportement asymptotique (lorsque n tend vers l'infini) de la suite dont le terme général est $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ (dite aussi <u>*suite des sommes partielles*</u>) permet de classer les séries numériques en trois classes :

- les séries convergentes
- les séries divergentes
- les séries qui ne sont ni convergentes, ni divergentes.

Définition 1.2 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ la série numérique de terme général u_n, c'est-à-dire la suite de terme général $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. On dit que la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est*

- <u>*convergente*</u> *s'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) = S\,, \tag{1.3}$$

ce qui signifie, rappelons-le,

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k - S \right| < \epsilon\,;$$

on dit alors que S est la <u>*somme de la série*</u> *$[u_n]_{n\geq n_0}$ et l'on note :*

$$S = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k\,;$$

on note

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = R_n$$

le reste de la série convergente au cran n ;

- <u>*divergente*</u> *si l'on a*

$$\lim_{n\to\infty} |S_n| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| = +\infty\,, \tag{1.4}$$

ce qui signifie, rappelons-le,

$$\forall R > 0\,, \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| > R\,.$$

Remarque 1.1. Il existe des séries numériques qui ne sont ni convergentes, ni divergentes, par exemple la série de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$, est telle que S_n prend les valeurs 1 si n est pair, 0 si n est impair ; il ne saurait exister de S tel que (1.3) soit remplie. La condition (1.4) est aussi trivialement en défaut.

Remarque 1.2. Une autre école se range au point de vue qu'il convient de ranger toutes les séries numériques non convergentes dans une même classe, celle des séries divergentes. Nous privilègerons ici le point de vue consistant à identifier les séries divergentes comme les séries numériques dont la suite des totaux cumulés "explose" lorsque n tend vers l'infini (c'est ce que nous avons fait dans la définition 1.2).

La convergence d'une série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ impose une contrainte immédiate sur le comportement asymptotique de la suite sous-jacente $(u_n)_{n\geq n_0}$; on a en effet la

Proposition 1.1 *Si $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique convergente, alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, pour $n \geq n_0 + 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}\,;$$

si la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge, on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n\,;$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_n = S - S = 0$$

par linéarité de la prise de limite. $\diamondsuit$

Remarque 1.3 On utilise le plus souvent cette proposition *a contrario* pour vérifier la non-convergence d'une série ; notons que le fait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne tende pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini n'implique toutefois pas la divergence, mais seulement la non-convergence (voir la suite de terme général $(-1)^n$).

ATTENTION !! La proposition 1.1 n'admet pas, on le verra plus loin de réciproque.

Les exemples les plus simples de séries sont les *séries géométriques* :

Exemple 1.1 : les séries géométriques. Soient a et z deux nombres complexes avec $a \neq 0$; on appelle *série géométrique de premier terme a et de raison z* la série $[az^n]_{n\geq 0}$; le paradoxe de Zénon concerne le cas $a = 1$, $z = 1/2$. Si z est un nombre complexe de module différent de 1, on a

$$a\sum_{k=0}^{n} z^k = a\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

suivant une identité remarquable bien classique ; si z est de module 1, $z = e^{i\theta}$,

$$a\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = ae^{in\theta/2}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right),$$

la fonction de droite étant prolongée par continuité en la valeur $a(n+1)$ aux points $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (on se souvient de ce que $\sin\xi \sim \xi$ au voisinage de $\xi = 0$). On voit donc que :

- si $|z| < 1$, la série $[az^n]_{n\geq 0}$ est convergente de somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = \frac{a}{1-z}\,;$$

- si $|z| > 1$ ainsi que si $z = 1$, la série $[az^n]_{n\geq 0}$ est divergente ;
- si $|z| = 1$ et $z \neq 1$ (soit si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$), on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\left|a\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leq \frac{|a|}{\left|\sin(\theta/2)\right|}\,;$$

  on peut affirmer qu'il n'y a pas divergence ; il n'y a pas non plus convergence ; en effet, la suite $(az^n)_{n\geq 0}$ est dans ce cas une suite de nombres tous de module $|a|$ qui ne tend donc pas vers 0 ; on applique la proposition 1.1.

Profitant du prétexte consistant à fournir un contre-exemple à la réciproque de la proposition 1.1, nous allons mettre en évidence pour la première fois combien les notions de série et d'intégrale sont proches. Elles sont désignées par deux symboliques différentes, le Σ grec pour la somme d'une série, le $\int$ calligraphique de la Renaissance pour le calcul d'intégrale, mais matérialisent toutes les deux le même procédé de capitalisation, dans le cadre discret en ce qui concerne la notion de série (les termes à capitaliser sont indexés par $n \in \mathbb{N}$), dans le cadre continu en ce qui concerne la notion d'intégrale (les termes à capitaliser sont indexés par $t \in \mathbb{R}$). Nous retrouverons ce parallèle au chapitre 2 lorsque nous étudierons les intégrales impropres.

Exemples 1.2.

• Le premier exemple que nous allons étudier ici est celui de la *série harmonique* $[1/n]_{n\geq 1}$; le terme général $u_n = 1/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et pourtant la série diverge ! C'est donc un contre-exemple à la réciproque de la proposition 1.1. Pour le voir, on trace sur un graphique le graphe de la fonction décroissante positive $x \longmapsto 1/x$ sur $]0, +\infty[$ (il s'agit d'une branche d'hyperbole).

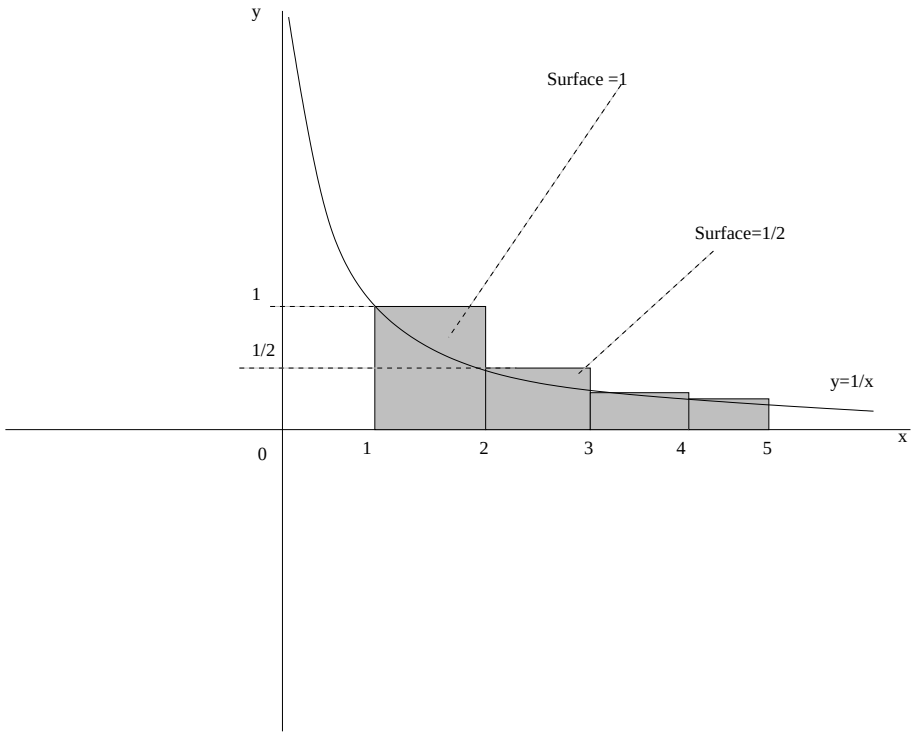

FIG. 1.1 – Divergence de la série harmonique

On remarque que la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

se "visualise" comme la surface d'un histogramme sur $[1, n+1]$ (celui hachuré sur la figure 1.1 pour $n = 4$), histogramme dont le bord supérieur est au dessus du graphe de $x \longmapsto 1/x$ sur $[1, n+1]$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \log(n+1)\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty$, la série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ diverge.

• En revanche, prenons la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$ et traçons cette fois sur un graphique le graphe de la fonction décroissante positive $x \longmapsto 1/x^2$ sur $]0, +\infty[$.

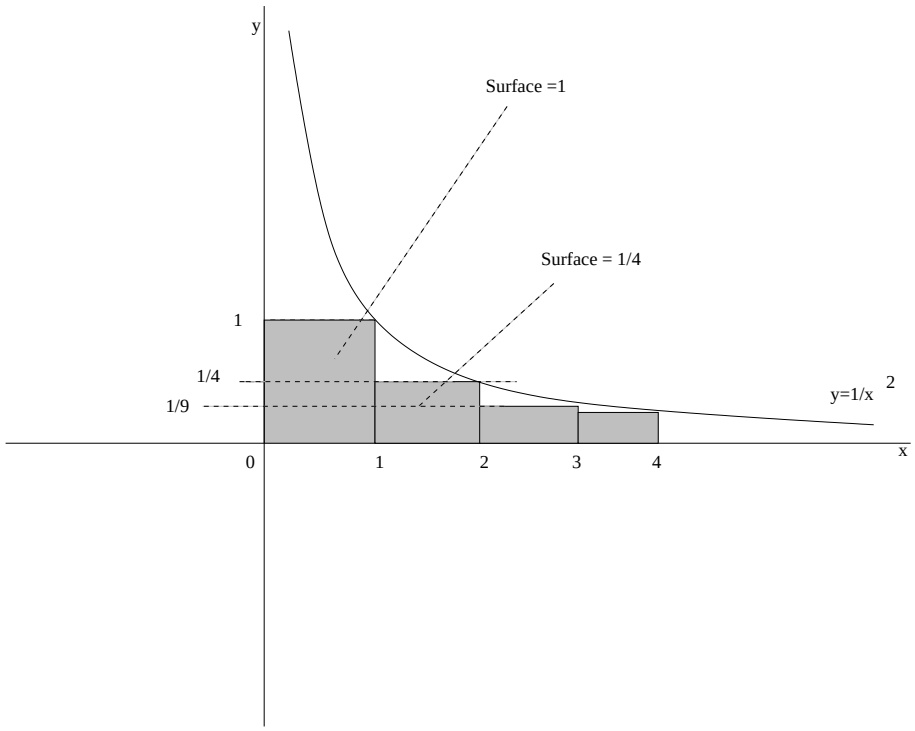

FIG. 1.2 – Convergence de la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$

On remarque cette fois que la somme

$$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

se "visualise" comme la surface d'un histogramme sur $[1, n]$ (celui hachuré sur la figure 1.2 pour $n = 4$), histogramme dont le bord supérieur est cette fois en dessous du graphe de $x \longmapsto 1/x^2$ sur $[1, n]$. On a donc cette fois en comparant les surfaces

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

La suite de terme général

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est donc une suite croissante majorée par 2, ce qui prouve que la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$ est une série convergente, de somme inférieure ou égale à 2 (en fait, la somme vaut $\pi^2/6$, on le verra plus tard au chapitre 4 de ce cours *via* l'analyse de Fourier).

Quand bien même la proposition 1.1 n'a pas, ce serait trop beau, de réciproque, il est cependant très important (comme d'ailleurs pour les suites) de disposer d'un critère permettant *a priori* d'assurer la convergence d'une série numérique sans connaître de candidat potentiel à la valeur de sa somme. On rappelle qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, c'est-à-dire satisfait le <u>*critère de Cauchy*</u> (version "suites numériques") :

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que } \forall n, p \geq N(\epsilon)\,,\ |u_p - u_n| < \epsilon\,. \qquad (\mathbf{C_0})$$

Ce résultat se transporte au cadre des séries numériques en le <u>*critère de Cauchy*</u> (version "séries numériques") suivant :

Proposition 1.2 *La série numérique de terme général u_n, $n \geq n_0$, est convergente si et seulement si*

$$(\mathbf{C}) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > n \geq N(\epsilon),\ |u_{n+1} + \cdots + u_p| < \epsilon\,. \tag{1.5}$$

Preuve. On applique simplement le critère $(\mathbf{C_0})$ à la suite de terme général

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,. \qquad \diamondsuit$$

Une application très importante du critère de Cauchy est le théorème bien utile suivant :

Théorème 1.1 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique telle que la série numérique*

$$[|u_n|]_{n\geq n_0}$$

(c'est-à-dire la série de terme général $|u_n|$) soit une série convergente, de somme Σ ; la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est alors convergente, de somme S avec $|S| \leq \Sigma$. Une série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ telle que la série de terme général $|u_n|$, $n \geq n_0$, soit convergente est dite <u>absolument convergente</u> et le théorème s'énonce donc en disant simplement que <u>toute série numérique absolument convergente est convergente</u>.

Attention !! C'est bien dommage, <u>le théorème 1.1 n'admet pas de réciproque</u> ! Considérons en effet la série $[(-1)^n/n]_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = (-1)^n/n$. Cette série n'est pas absolument convergente car la série $[|u_n|]_{n\geq 1}$ est dans ce cas la série harmonique qui diverge (exemples 1.2, premier exemple). En revanche, si k est un entier strictement positif, on a

$$u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{4k^2}\,.$$

Si $n = 2p+1$ est un entier impair strictement supérieur à 1, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = -1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k(2k+1)} + \frac{1}{n+1}\,;$$

comme la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$ est convergente (exemples 1.2, deuxième exemple), la série de terme général $\frac{1}{2n(2n+1)}$ est aussi convergente et de somme S et la suite des sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq 1}$ converge vers $S-1$, ce qui prouve que la série $[u_n]_{n\geq 1}$ est bien convergente sans être absolument convergente !

Preuve du théorème 1.1. Si la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ est convergente, on a en effet, du fait de la proposition 1.2 (sens direct) :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que } \forall p > n \geq N(\epsilon)\,,\ |u_{n+1}| + \cdots + |u_p| < \epsilon\,;$$

Comme on a, du fait de l'inégalité triangulaire

$$|u_{n+1} + \cdots + u_p| \leq |u_{n+1}| + \cdots + |u_p|\,,$$

on a aussi

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\,,\ \text{tel que } \forall n > p \geq N(\epsilon), \left|u_{n+1} + \cdots + u_p\right| < \epsilon\,;$$

en vertu toujours de la proposition 1.2 (cette fois dans l'autre sens), on en déduit la convergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$, ce qui prouve bien le théorème 1.1. $\diamondsuit$

Remarquons que l'on a comme corollaire l'intéressant moyen de vérifier la convergence d'une série numérique si l'on sait comparer le module du terme général de cette série au terme général d'une série à termes positifs dont on est assuré de la convergence :

Corollaire 1.1 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ la série numérique de terme général u_n ; on suppose qu'il existe un entier $n_1 \geq n_0$ et une série numérique à termes positifs $[w_n]_{n\geq n_1}$ (que l'on qualifie de <u>série majorante</u>), convergente et de somme $\widehat{\Sigma}_w$, telle que*

$$\forall n \geq n_1\,, \quad |u_n| \leq w_n\,;$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est alors convergente, de somme S, avec

$$|S| \leq \Big|\sum_{n_0\leq k<n_1} u_k\Big| + \widehat{\Sigma}_w\,.$$

Exemple 1.3 (les séries et la fonction zeta de Riemann)
Soit x un nombre réel strictement plus grand que 1 ; alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}(1-\frac{1}{n^{x-1}})\ ;$$

ceci se voit en utilisant la même idée que celle qui a été utilisée à l'exemple 1.2 (deuxième exemple) pour prouver la convergence de la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$. Pour $x > 1$, la série $[1/n^x]_{n\geq 1}$ converge donc et sa somme est majorée par

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}\,.$$

Cette série numérique $[1/n^x]_{n\geq 1}$ est dite <u>*série de Riemann*</u> car introduite et manipulée par le géomètre et analyste allemand Bernhard Riemann (1826-1866). Notons que pour $x \leq 1$ (on l'a déjà vu pour $x = 1$ avec la série harmonique), la série $[1/n^x]_{n\geq 1}$ est divergente : c'est bien sûr le cas si $x \leq 0$ car le terme général ne tend pas vers 0 ; pour $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}((n+1)^{1-x} - 1)$$

(comme dans l'exemple de la série harmonique) ; la série de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ diverge donc si $x \in]0, 1[$ (donc finalement pour tout $x \in]-\infty, 1]$) puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x}((n+1)^{1-x} - 1) = +\infty.$$

Riemann est allé plus loin en supposant x complexe et non plus réel. Si z est un nombre complexe de partie réelle x strictement supérieure à 1, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\Big|\frac{1}{n^z}\Big| = \frac{1}{n^x}\ ;$$

comme la série numérique $[1/n^x]_{n\geq 1}$ est une série convergente, le théorème 1.1 assure la convergence de la série $[1/n^z]_{n\geq 1}$; Riemann a ainsi introduit une fonction très intéressante (car au carrefour de l'analyse et de la théorie analytique des nombres, principalement autour des mystères liés à l'organisation de la suite des nombres premiers), la fonction "zeta" définie dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$ par

$$\zeta(z) \ := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}\,, \quad \mathrm{Re}\, z > 1\,;$$

Notons que, au stade où nous en sommes, rien ne peut être affirmé concernant le comportement asymptotique (convergence, divergence, ou rien) de la série numérique $[1/n^z]_{n\geq 1}$ lorsque z est un nombre tel que $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$ et $\mathrm{Im}\, z \neq 0$.

1.3 Séries à termes positifs ; critères de comparaison

Le premier réflexe que l'on doit avoir face à l'étude du comportement asymptotique d'une série $[u_n]_{n\geq n_0}$ à termes $u_n \in \mathbb{C}$ quelconques est d'examiner dans un premier temps la série à termes positifs $[|u_n|]_{n\geq n_0}$:

- si cette série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ (dont on peut étudier le comportement asymptotique à la lumière des techniques présentées dans cette section concernant l'étude des séries à termes positifs) converge, alors la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge aussi (théorème 1.1) ;
- si cette même série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ est telle que son terme général $|u_n|$ ne tende pas vers 0, alors on peut affirmer que la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est non-convergente (sans pouvoir préciser plus).

Comme on le voit, pour peu que la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on ne peut plus rien conclure concernant le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; ce n'est que dans ce cas que l'on mettra en oeuvre l'"artillerie plus lourde" concernant l'étude des séries à terme quelconque (que nous envisagerons dans la section 1.4).

Dans cette section importante, nous envisagerons l'étude (plus simple) du comportement asymptotique des séries à termes positifs (c'est-à-dire dont le terme général u_n est positif pour n assez grand) ; il est bien sûr immédiat de noter que cette étude s'adapte aussi à celle du comportement asymptotique des séries à termes négatifs (pour n assez grand). Les séries à termes positifs sont sans ambigüité soit convergentes, soit divergentes, ce qui rend la classification plus facile.

On dispose de deux familles importantes (disons deux "catalogues") de séries à termes positifs : celle des séries géométriques $[x^n]_{n\geq 0}$ avec $x > 0$ (convergentes si $x \in]0,1[$, divergentes si $x \geq 1$), celle des séries de Riemann $[1/n^x]$, $x > 0$ (convergentes si $x > 1$, divergentes si $x \in]0,1]$, voir l'exemple 1.3). Un critère de comparaison serait maintenant le bienvenu pour décider du comportement d'une série à termes positifs (ou au moins positifs à partir d'un certain rang) après avoir comparé son terme général au terme général d'une des séries prises dans l'un de nos deux catalogues. En voici justement un :

Théorème 1.2 *Soient $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[w_n]_{n\geq n_1}$ deux séries numériques dont le terme général est positif pour $n \geq n_2 \geq \max(n_0, n_1)$.*

- *s'il existe $C > 0$ et $N \geq n_2$ tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n \leq C w_n \,,$$

la convergence de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$ implique celle de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; de plus, si tel est le cas, alors, pour $n \geq N$, le reste au cran n de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est majoré par C fois le reste au cran n de la série $[w_n]_{n\geq n_0}$, soit

$$n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \,; \tag{1.6}$$

- *s'il existe $c > 0$ et $N \geq n_2$ tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow u_n \geq c w_n \,,$$

la divergence de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$ *implique celle de la série* $[u_n]_{n\geq n_0}$ *;*

– *si l'on a* $u_n \sim w_n$ *lorsque* n *tend vers l'infini, les deux séries* $[u_n]_{n\geq n_0}$ *et* $[w_n]_{n\geq n_1}$ *sont de même nature ; de plus, on a dans ce troisième cas (*$u_n \sim w_n$ *lorsque* $n \to \infty$*)*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \tag{1.7}$$

lorsque les deux séries sont convergentes et

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \sim \sum_{k=n_1}^{n} w_k \tag{1.8}$$

lorsque les deux séries sont divergentes.

Preuve. Le premier point est un cas particulier du corollaire 1.1 ; la majoration (1.6) est immédiate, car si $q > n \geq N$,

$$\sum_{k=n+1}^{q} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{q} Cw_k = C \sum_{k=n+1}^{q} w_k \,;$$

ensuite, on passe à la limite lorsque q tend vers l'infini et l'on obtient (1.6). Le second point vient du fait que $\sum_{k=N}^{\infty} u_k \geq (1/c) \sum_{k=N}^{\infty} w_k$. Le dernier cas est une combinaison des deux ; notons d'ailleurs qu'il nous suffit ici de savoir qu'il existe des constantes c et C strictement positives tellesque, pour n assez grand, $cw_n \leq u_n \leq Cw_n$, ce qui est réalisé avec $c = 1-\epsilon$, $C = 1+\epsilon$ pour $n \geq N(\epsilon) \geq n_2$ assez grand lorsque $u_n \sim w_n$ quand n tend vers l'infini. Pour ce qui est de la preuve des assertions (1.7) et (1.8) lorsque $u_n \sim w_n$, distinguons ici les deux cas (les deux séries convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux) :

– dans le cas où les deux séries convergent, on a, si $q > n \geq N(\epsilon)$ l'encadrement

$$(1-\epsilon) \sum_{k=n+1}^{q} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{q} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=n+1}^{q} w_k \,,$$

puis, en faisant tendre q vers l'infini

$$n \geq N(\epsilon) \implies (1-\epsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \,,$$

ce qui prouve (1.7), puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit ;

– dans le cas où les deux séries divergent, on peut écrire encore

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow (1-\epsilon) \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} w_k \leq \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} u_k \leq (1+\epsilon) \sum_{k=N(\epsilon)+1}^{n} w_k \,;$$

si $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(W_n)_{n\geq n_1}$ sont définies respectivement comme les suites des sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ et de la série $[w_n]_{n\geq n_1}$, on a donc

$$n \geq N(\epsilon) \implies (1-\epsilon)(S_n - S_{N(\epsilon)}) \leq W_n - W_{N(\epsilon)} \leq (1+\epsilon)(S_n - S_{N(\epsilon)} \,;$$

comme

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{S_n}{W_n}\,\frac{W_n-W_{N(\epsilon)}}{S_n-S_{N(\epsilon)}}\Big)=1 \tag{1.9}$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|W_n|=+\infty$, on voit que pour n assez grand (en tout cas plus grand que $N(\epsilon)$), le nombre complexe

$$z_n:=\frac{S_n}{W_n}$$

est aussi voisin que l'on veut de 1 : en effet, on a d'après (1.9), pour n assez grand (et en tout cas supérieur à $N(\epsilon)$),

$$|z_n/t_n-1|\le\epsilon/2\,,$$

où

$$t_n:=\frac{S_n-S_{N(\epsilon)}}{W_n-W_{N(\epsilon)}}$$

vérifie $|t_n-1|\le\epsilon$; on en déduit que z_n se trouve, pour n assez grand, arbitrairement près de 1, donc que $S_n\sim W_n$, ce qui constitue l'assertion (1.8).

Le théorème de comparaison 1.2 est ainsi prouvé. $\diamondsuit$

Attention ! ! Il convient de prendre garde au fait que, quand bien même $u_n\sim w_n$ pour n assez grand (w_n étant positif lorsque n est assez grand), il n'y a l'équivalence

$$\sum_{k=n_0}^{n}u_k\sim\sum_{k=n_1}^{n}u_k$$

que si les séries $[u_n]_{n\ge n_0}$ et $[w_n]_{n\ge n_1}$ sont toutes deux divergentes ; par exemple, si

$$u_n:=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\,,\quad n\ge1$$

et

$$w_n=\frac{1}{n^2}\,,\quad n\ge1\,,$$

on a bien sûr $u_n\sim w_n$, mais

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=1-\frac{1}{n+1}$$

(suite tendant vers 1) tandis que la suite croissante $(W_n)_{n\ge1}$, où $W_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ tend vers un nombre certainement supérieur à $1+1/4=5/4>1$. En revanche

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sim\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k=\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}\,.$$

1.3.1 Comparaison avec les séries géométriques

On rappelle la notion de *valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels*, pensée comme suite de points de la *droite réelle achevée* $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$:

- un nombre réel α est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\ge n_0}$ si et seulement l'on peut extraire de la suite des entiers supérieurs ou égaux à n_0 une suite strictement croissante $(n_k)_{k\ge0}$ telle que la *suite extraite* $(u_{n_k})_{k\ge0}$ converge vers le nombre α ;

– $+\infty$ (resp. $-\infty$) est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ si et seulement l'on peut extraire de la suite des entiers supérieurs ou égaux à n_0 une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que la suite extraite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;

On rappelle que, suivant le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels, vue comme suite de points de la droite réelle achevée, est non vide et admet donc (considéré comme sous-ensemble de la droite achevée $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$) une borne inférieure (qui peut fort bien être $-\infty$) notée

$$\liminf_{n\to\infty} u_n$$

et une borne supérieure (qui peut fort bien être $+\infty$) notée

$$\limsup_{n\to\infty} u_n\,.$$

Le nom du mathématicien allemand Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) est intimement lié au développement pendant tout le 19-ème siècle de la théorie des séries, et en particulier des séries de fonctions (le concept d'analyticité lui doit en particulier beaucoup), théorie qui sera notre fil directeur tout au long de ce cours. Bernhardt Bolzano (1781-1848) était, lui, un philosophe et mathématicien praguois qui fut, avec Augustin Cauchy, l'un des premiers à développer de manière systématique la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Remarque 1.4. On pourra s'assurer que ces notations ne sont pas tout-à-fait usurpées car

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}\,(\inf_{k\geq n} u_k)\\ \limsup_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}\,(\sup_{k\geq n} u_k)\,.\end{aligned}$$

Exemples. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ est l'ensemble $\{-1,1\}$; on a donc

$$\liminf_{n\to+\infty}(-1)^n=-1\,,\quad \limsup_{n\to+\infty}(-1)^n=1\,;$$

si α est un nombre réel irrationnel, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(\pi\alpha n))_{n\geq 0}$ est le segment $[-1,1]$; on a encore

$$\liminf_{n\to+\infty}(\sin(\pi\alpha n))=-1\,,\quad \limsup_{n\to+\infty}(\sin(\pi\alpha n))=1$$

dans ce cas ; on pourra examiner ce qui se passe si α est un nombre rationnel.

Le théorème de comparaison 1.2, combiné avec ce que l'on sait du comportement asymptotique des séries géométriques (analysé dans l'exemple 1.1), nous permet d'énoncer la *règle de Cauchy* :

Proposition 1.3 [règle de Cauchy] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série à termes positifs. Soit*

$$r\ :=\limsup_{n\to\infty}(u_n^{\frac{1}{n}})\,,$$

avec la convention $0^{1/n}=0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Si $r<1$, la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ converge, tandis que si $r>1$, cette même série numérique diverge (le terme général ne tend pas vers 0).

Remarque 1.5. Notons que ce critère de comparaison n'est pas assez puissant pour autoriser une conclusion dans le cas litigieux $r = 1$; par exemple, si $u_n = 1/n^x$ avec $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \exp(-x\frac{\log n}{n}),$$

d'où $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$, soit donc $r = 1$; cependant, suivant que $x > 1$ ou $x \leq 1$, il y a convergence ou divergence de la série de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (voir l'exemple 1.3) ; il nous faudra donc utiliser notre second catalogue de référence (celui des séries de Riemann) pour augmenter notre capacité de décider du comportement asymptotique d'une série à termes positifs via un critère de comparaison.

Remarque 1.6. C'est au mathématicien francais Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que l'on doit l'apparition de la rigueur mathématique dans le raisonnement en analyse (jusque là basé plus sur l'intuition expérimentale ou les conceptions philosophiques autour par exemple du concept d'infini). Cauchy (comme Weierstrass) contribua énormément au développement de l'analyse complexe ; le point de vue de Cauchy puise plus ses fondements dans des concepts empruntés à la physique (celui par exemple de circulation, d'intégrale curviligne), tandis celui de Weierstrass repose plus sur la théorie des séries. La règle de Cauchy que nous invoquons ici relève plus cependant de ce second point de vue.

Preuve.

- Si $r < 1$, il ne saurait exister de valeur d'adhérence de la suite $(u_n^{1/n})_{n\geq 1}$ dans l'intervalle $]r, 1[$ (puisque la borne supérieure d'un ensemble en est un majorant) ; par conséquent, si l'on choisit $\epsilon < 1-r$, il existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \leq r + \epsilon, \quad \text{soit encore } u_n \leq (r+\epsilon)^n ;$$

  comme $r + \epsilon < 1$, il suit du théorème 1.2 (item 1) que la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ est convergente (la série géométrique $[(r+\epsilon)^n]_{n\geq 0}$ l'étant).
- Si $r > 1$, il existe une valeur d'adhérence de la suite $(u_n^{1/n})_{n\geq 1}$ strictement supérieure à 1 (soit $1+\eta$, avec $\eta > 0$ si $1 < r < +\infty$ ou bien $+\infty$ si $r = +\infty$) ; ceci résulte de ce que si l est la borne supérieure d'un ensemble, alors aucun $l' < l$ ne saurait majorer cet ensemble. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$, tous supérieurs à n_0, tels que

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} = \begin{cases} 1+\eta \text{ si } 1 < r < \infty \\ +\infty \text{ si } r = +\infty ; \end{cases}$$

  pour k assez grand, on a donc

$$u_{n_k}^{\frac{1}{n_k}} \geq 1 + \frac{\eta}{2}, \quad \text{soit } u_{n_k} \geq \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^{n_k},$$

  ce qui montre que la suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ ne tend pas vers 0 ; il résulte de la proposition 1.1 la non-convergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$, soit encore la divergence puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs. Notons que la raison de la divergence est que le terme général ne tende pas vers 0.

La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Application importante : Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombres complexes, la série numérique

$$[a_n z^n]_{n\geq n_0},$$

où z est un nombre complexe arbitraire est

– absolument convergente (donc convergente) lorsque

$$|z| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} ;$$

– non convergente lorsque

$$|z| > \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} ;$$

Exemple 1.4 Considérons $\epsilon > 0$ (rationnel) et la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!} \text{ si } n = k^{1+\epsilon}\,,\ k \in \mathbb{N}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} ;$$

on voit que dans ce cas

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k^{1+\epsilon}}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} e^{-\frac{\log(k!)}{k^{1+\epsilon}}} = 1 \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{\log(k!)}{k^{1+\epsilon}} \leq \frac{k\log k}{k^{1+\epsilon}} = \frac{\log k}{k^{\epsilon}}$$

et que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ puisque toute fonction puissance impose sa limite au logarithme ; on voit que la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge absolument lorsque $|z| < 1$, ne converge pas lorsque $|z| > 1$.

Il existe une seconde règle de comparaison du même type, dite <u>*règle de d'Alembert*</u>, un petit peu moins pratique cependant puisqu'elle oblige à introduire à la fois une limite inférieure et une limite supérieure.

Remarque 1.7. On a déjà rencontré l'encyclopédiste Jean Lerond d'Alembert (1717-1783) à propos du théorème fondamental de l'algèbre ; c'est dans l'article intitulé *Différentiel* (volume 4 de l'Encyclopédie) qu'il développa ses idées sur les limites et la dérivée qui le conduisirent à énoncer dans *Opuscules mathématiques* (volume 5 de l'Encyclopédie) la règle que nous mentionnons ci-dessous.

Proposition 1.4 [règle de d'Alembert] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique à termes positifs ; on désigne par $(n_k)_{k\geq 0}$ la suite (strictement croissante) des indices n tels que $u_n > 0$.*

– *si*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}} < 1\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est convergente ;

– *si*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{u_{n_{k+1}}}{u_{n_k}} > 1\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq 0}$ est divergente (le terme général ne tend pas vers 0).

Preuve.

– Dans le premier cas, il ne saurait exister de valeur d'adhérence de la suite $(u_{n_{k+1}}/u_{n_k})_{k\geq 0}$ dans l'intervalle $]r, 1[$ (puisque la borne supérieure d'un ensemble en est un majorant) ; par conséquent, si l'on choisit $\epsilon < 1 - r$, il existe $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$k \geq K(\epsilon) \Longrightarrow u_{n_{k+1}} \leq (r+\epsilon)u_{n_k} ;$$

on a donc, pour tout $k \geq K(\epsilon) + 1$,

$$u_{n_k} \leq (r+\epsilon)u_{n_{k-1}} \leq (r+\epsilon)^2 u_{n_{k-2}} \leq \cdots \leq (r+\epsilon)^{k-K(\epsilon)} u_{n_{K(\epsilon)}} ;$$

comme $r + \epsilon < 1$, il suit du théorème 1.2 (item 1) que la série numérique $[u_{n_k}]_{k\geq 0}$ est convergente (la série géométrique $[(r+\epsilon)^k]_{k\geq 0}$ l'étant) ; comme les u_n autres que les u_{n_k} sont supposés nuls, la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$ est bien convergente.

– Dans le second cas, on est certain (du fait de la définition de la limite inférieure) qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'invervalle $[0, 1+\eta[$ ne contienne aucune valeur d'adhérence de la suite $(u_{n_{k+1}}/u_{n_k})_{k\geq 0}$; il existe donc $K(\eta) \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \geq K(\eta) \Longrightarrow u_{n_{k+1}} \geq \Big(1 + \frac{\eta}{2}\Big) u_{n_k} ;$$

par itération, on a donc, pour tout $k \geq K(\eta) + 1$,

$$u_{n_k} \geq \Big(1 + \frac{\eta}{2}\Big) u_{n_{k-1}} \geq \Big(1 + \frac{\eta}{2}\Big)^2 u_{n_{k-2}} \leq \cdots \leq \Big(1 + \frac{\eta}{2}\Big)^{k-K(\eta)} u_{n_{K(\eta)}} ;$$

comme $\eta > 0$, la suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ ne tend pas vers 0, mais au contraire vers $+\infty$; il résulte de la proposition 1.1 la non-convergence de la série numérique $[u_{n_k}]_{k\geq 0}$, soit encore sa divergence puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs ; on donc divergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Ceci achève la preuve du critère de d'Alembert. $\diamondsuit$

Application importante : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes non nuls et z un nombre complexe ; la série numérique

$$[a_n z^n]_{n\geq n_0} ,$$

où z est un nombre complexe arbitraire est

– absolument convergente (donc convergente) lorsque

$$|z| < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} ;$$

– non convergente lorsque

$$|z| > \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} ;$$

Exemple 1.5 Soit $a_n = 1/n!$ (avec la convention $0! = 1$) ; on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 ;$$

la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge donc pour tout nombre complexe z d'après l'application de la règle de d'Alembert énoncée ci-dessus ; on peut remarquer la différence cruciale avec le comportement de la série numérique introduite dans l'exemple 1.4 ; la suite des coefficients est essentiellement la même dans les deux cas ($a_n = 1/n!$) mais l'on y avait alors introduit des "trous" constitués de zéros en ne retenant que les valeurs de n qui étaient des carrés parfaits.

1.3.2 Comparaison avec les séries de Riemann

Si $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique à terme général strictement positif telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 ,$$

la règle de d'Alembert proposée dans la proposition 1.6 ne permet pas de décider du comportement de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$. C'est donc l'occasion d'utiliser notre second catalogue-test, celui des séries de Riemann. Voici un exemple de critère, dit *règle de Raabe-Duhamel* (Joseph Ludwig Raabe, 1801-1859, est un mathématicien suisse, qui travailla à l'étude des séries numériques, tandis que Jean-Marie Constant Duhamel, 1787-1872, fut enseignant à l'école Polytechnique où il succéda à Poisson et est surtout connu pour ses contributions d'ordre pédagogique) :

Proposition 1.5 [règle de Raabe-Duhamel] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une série numérique à terme général strictement positif telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1\,;$$

on suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

lorsque n tend vers l'infini ; alors
- *si $\alpha > 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est convergente ;*
- *si $\alpha < 1$, la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est divergente .*

Remarque 1.6. Reste encore un cas litigieux ($\alpha = 1$) ; une information plus précise concernant le comportement de la suite u_{n+1}/u_n au voisinage de l'infini (par exemple la connaissance d'un développement à l'ordre 2 en les puissances de $1/n$) pourraît aider à lever cette indétermination dans certains cas ; l'idée serait de poursuivre plus avant le scénario que nous décrivons ici dans la preuve de la proposition.

Preuve.
- dans le premier cas, on choisit $x \in]1, \alpha[$ (c'est possible puisque $\alpha > 1$) ; on fait un développement à l'ordre 1 en fonction des puissances de $1/n$ (n tendant vers $+\infty$) de
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n}\,;$$
cela donne
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{x-\alpha}{n} + \mathbf{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\,;$$
comme $x - \alpha < 0$, on est certain que pour n assez grand
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1\,,$$
soit que la suite
$$n \to n^x u_n$$
finit par être décroissante passé un certain seuil ; il existe donc une constante C telle que, pour n assez grand
$$u_n \leq \frac{C}{n^x}\,;$$
le théorème 1.2 (item 1) et la convergence de la série numérique de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (puisque $x > 1$, voir exemple 1.2, item 3) assurent la convergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$;

– dans le second cas, on choisit $x \in]\alpha, 1]$ (c'est possible car cette fois $\alpha < 1$) ; on fait encore un développement à l'ordre 1 en fonction des puissances de $1/n$ (n tendant vers $+\infty$) de
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} ;$$
cela donne toujours
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{x-\alpha}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{1}{n}\right) ;$$
comme $x - \alpha > 0$ cette fois, on est certain que pour n assez grand
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 ,$$
soit que la suite
$$n \to n^x u_n$$
finit par être croissante passé un certain seuil ; il existe donc une constante c telle que, pour n assez grand
$$u_n \geq \frac{c}{n^x} ;$$
le théorème 1.2 (item 2) et la divergence de la série numérique de Riemann $[1/n^x]_{n\geq 1}$ (puisque $x \leq 1$, voir exemple 1.2, item 1 ou 2) assurent la divergence de la série numérique $[u_n]_{n\geq n_0}$.

La règle de Raabe-Duhamel est ainsi prouvée. $\diamondsuit$

1.3.3 Confrontation série/primitive

La méthode qui a inspiré (exemples 1.2 et exemples 1.3) l'étude asymptotique des séries de Riemann pour $x > 0$ peut-être exploitée dans d'autres situations : cette méthode se trouvait basée sur la confrontation entre le processus de "capitalisation" (on dit aussi <u>*de sommation*</u> ou encore <u>*d'intégration discrète*</u>) et celui <u>*de primitivisation*</u>, c'est-à-dire de recherche (et d'étude du comportement) de primitives de fonctions continues. On a en effet la :

Proposition 1.6 *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ une série numérique à termes positifs dont la suite des termes généraux est décroissante à partir d'un certain rang N ; soit f une fonction continue décroissante sur $[N, +\infty[$ telle que pour tout $n \geq N$, $u_n = f(n)$ (par exemple la fonction affine par morceaux interpolant au point n le nombre u_n mais l'on peut imaginer, comme dans le cadre de l'étude des séries de Riemann, une fonction f implicitement déduite de l'expression analytique de u_n fonction de n) ; la fonction f admet donc une primitive F sur $[N, +\infty[$, croissante sur cet intervalle (c'est la primitive d'une fonction positive). On a, pour tout $n > N$,*
$$\sum_{k=N}^{n} u_k \geq F(n+1) - F(N) \tag{1.10}$$
$$\sum_{k=N+1}^{n} u_k \leq F(n) - F(N) ; \tag{1.11}$$
il en résulte

– *que si*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est divergente et que l'on a l'équivalent suivant pour les sommes partielles :*

$$S_n := \sum_{n=n_0}^{n} u_k \sim F(n)\ ;$$

– *que si*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = l < +\infty\,,$$

la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est convergente et que l'on a l'encadrement suivant pour le reste :*

$$l - F(n+1) \leq R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq l - F(n)\,.$$

La preuve de cette proposition repose juste sur le fait que si p et q sont des entiers tels que $p \geq N$ et $q > p$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} u_k \geq \int_p^{q+1} f(t)dt = F(q+1) - F(p) \tag{1.12}$$

$$\sum_{k=p+1}^{q} u_k \leq \int_p^{q} f(t)dt = F(q) - F(p)\,. \tag{1.13}$$

Ces deux inégalités se lisent graphiquement ; pour la première, le nombre u_k est assimilé à la surface du rectangle $[k, k+1] \times [0, f(k)]$ (hachuré verticalement sur la figure 1.3) ; pour la seconde, le même nombre u_k est assimilé à la surface du rectangle $[k-1, k] \times [0, f(k)]$ (hachuré horizontalement sur la figure 1) ; ce réflexe qui consiste à penser u_k comme la surface d'un rectangle traduit le passage du discret au continu. Ensuite, les inégalités résultent du principe de comparaison des intégrales : si g et h sont deux fonctions continues positives sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$, alors

$$g \geq h \text{ sur } [\alpha, \beta] \Longrightarrow \int_\alpha^\beta g(t)dt \geq \int_\alpha^\beta h(t)dt\,.$$

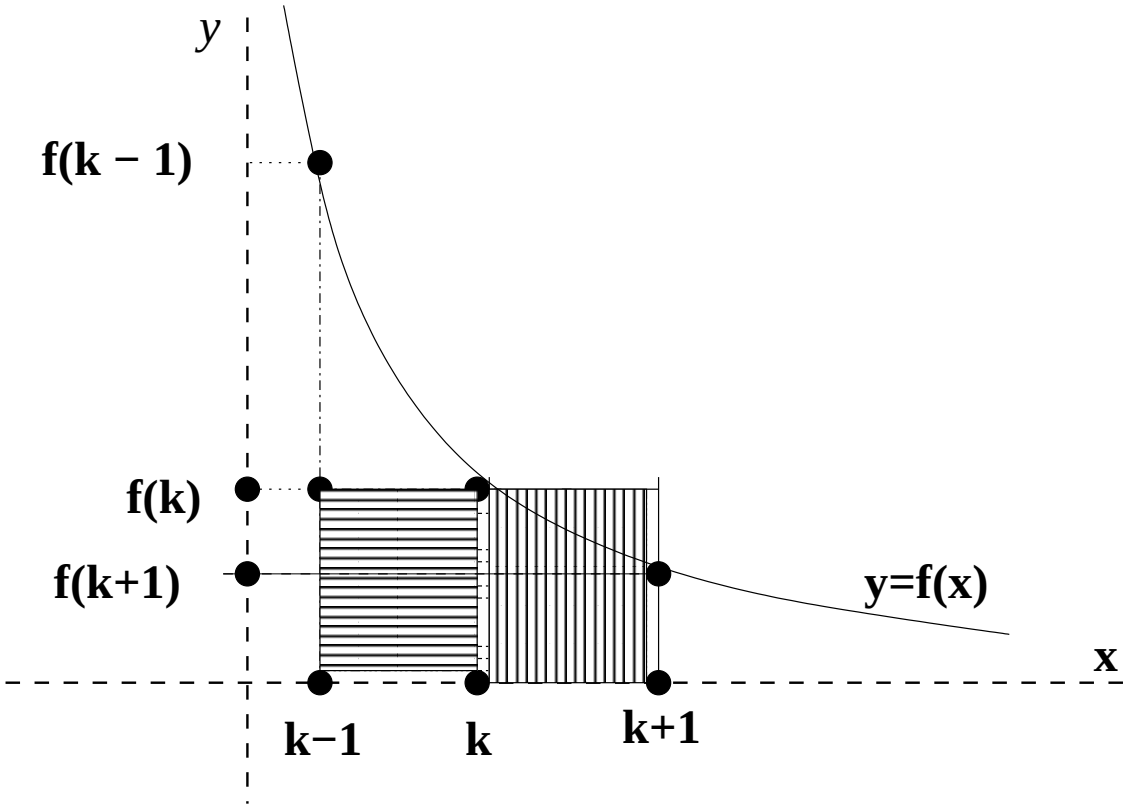

FIG. 1.3 – Comparaison série -intégrale

On fixe d'abord $p = N$ et $q = n$ dans les deux inégalités (1.12) et (1.13), ce qui donne (1.10) et (1.11).

– Si
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty\,,$$
on voit avec la première inégalité (1.10) que les sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq N}$ tendent vers $+\infty$, d'où la divergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ avec l'équivalence voulue en combinant (1.10) et (1.11) puisque $F(n+1) \sim F(n)$ vu que la différence de ces deux nombres est majorée par u_n, soit par u_N lorsque $n \geq N$;
– si maintenant
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = l < +\infty\,,$$
la seconde inégalité (1.11) nous assure que les sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq N}$ sont toutes majorées par $l - F(N)$, ce qui prouve la convergence de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Ensuite, pour avoir (dans le second cas) l'encadrement du reste, on prend $p = n$ et l'on fait tendre q vers l'infini dans (1.13), ce qui donne la majoration voulue pour R_n ; puis on prend $p = n + 1$ et l'on fait encore courir q vers l'infini cette fois dans (1.12), ce qui donne la minoration de R_n cherchée. La preuve de la proposition est ainsi complète. $\diamondsuit$

Exemple 1.6. Si $u_n = 1/(n \log n)$ pour n entier supérieur ou égal à 2, la série $[u_n]_{n\geq 2}$ est divergente puisque la fonction $F(t) = \log[\log(t)]$ (qui est une primitive de $1/(t \log t)$ sur $[2, \infty[$) vérifie

$\lim_{t\to\infty} F(t) = +\infty$. Plus généralement, les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}\,, \quad n \geq 2\,,$$

où α et β sont deux nombres réels, sont convergentes si $\alpha > 1$, divergentes si $\alpha < 1$ (ce quelque soit la valeur de β) ; si $\alpha = 1$, la série est divergente si $\beta \leq 1$ et convergente si $\beta > 1$ (on pourra vérifier cela en exercice en utilisant la proposition 1.6). On pourra d'ailleurs donner un équivalent du reste de la série (si elle est convergente) et de la somme partielle d'ordre n (si elle est divergente). Ces séries sont dites *séries de Bertrand* ; le mathématicien francais Joseph Bertrand (l'un des pionniers de la théorie des probabilités), 1822-1900, les introduisit et on les retrouve fréquemment dans la théorie des probabilités (théorème centrale limite ou loi du logarithme itéré).

1.4 Séries à termes quelconques non absolument convergentes

Comme on l'a vu, pour peu que la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on ne peut plus rien conclure concernant le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; c'est par exemple le cas si

$$u_n = u_n(\theta) = \frac{e^{in\theta}}{n}\,, \quad n \geq 1\,,$$

où $\theta \not\equiv 0$ (modulo 2π). Ce n'est que dans ces cas litigieux (la série $[|u_n|]_{n\geq n_0}$ diverge et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$) que l'on invoquera l'un des deux critères ci-dessous, celui des *séries alternées* ou celui (qui le généralise) *d'Abel*.

1.4.1 Le critère des séries alternées

Une éventuelle alternance de signe présente dans l'expression des termes successifs d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ de nombres réels tend naturellement à "brider" le comportement asymptotique de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$; on peut penser au processus de capitalisation : on gagne g_1, puis on perd p_1 (mais moins que ce que l'on vient de gagner), puis l'on gagne à nouveau g_2 (moins toutefois que ce que l'on vient de perdre p_1), etc... ; on peut penser sous ces conditions que le total cumulé

$$g_1 - p_1 + g_2 - p_2 \cdots + g_n$$

tendra vers une limite lorsque n tend vers l'infini, ce si toutefois la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. C'est ceci qu'exprime le *critère des séries alternées*.

Théorème 1.3 [critère des séries alternées] *Soit $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres complexes, tous réels positifs pour $n \geq n_1$, avec*

$$n \geq n_1 \Longrightarrow a_n \geq a_{n+1} \geq 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,;$$

alors la série $[(-1)^n a_n]_{n\geq n_0}$ *est convergente ; de plus, pour* $N \geq n_1$*, le reste*

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

est du signe de $(-1)^{N+1} a_{N+1}$ *(premier terme négligé) et est tel que*

$$|R_N| \leq a_{N+1}\,.$$

Preuve. Soit, pour N entier tel que $N \geq n_0$, S_N la N-ième somme partielle

$$S_N := \sum_{k=n_0}^{N} (-1)^k a_k\,.$$

Si n est un entier tel que $2n-1 \geq n_1$, on a

$$S_{2n-1} - S_{2n+1} = \sum_{k=n_0}^{2n-1} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0\ ;$$

de même

$$S_{2n} - S_{2n+2} = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n+2} (-1)^k a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0\ ;$$

d'autre part,

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} \geq 0\,;$$

on a donc, pour n tel que $2n-1 \geq n_1$, le jeu d'inégalités :

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}\,. \tag{1.14}$$

On considère les deux suites

$$\lambda_n := S_{2n-1}\,,\ 2n-1 \geq n_1$$

et

$$\mu_n := S_{2n}\,,\ 2n-1 \geq n_1\,;$$

la première est croissante (car $\lambda_{n+1} = S_{2n+1}$), la seconde est décroissante (car $\mu_{n+1} = S_{2n+2}$) et l'on a, pour tout n tel que $2n-1 \geq n_1$,

$$\lambda_n \leq \mu_n\,,$$

avec aussi

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0\ ;$$

du fait que $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome des segments emboîtés (toute intersection décroissante de segments emboîtés dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un singleton), les deux suites $(\lambda_n)_n$ et $(\mu_n)_n$ qui sont dites <u>*adjacentes*</u> ont une limite commune S. Ceci montre la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq n_1}$, donc de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$.

Si S est la somme de cette série $[u_n]_{n\geq n_0}$, on a d'après (1.14), pour $2n-1 \geq n_1$,

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}\,.$$

On a donc

$$0 \leq S - S_{2n+1} = R_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$$

et

$$0 \geq S - S_{2n} = R_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1}\,,$$

ce qui prouve que R_N est bien toujours du signe de $(-1)^{N+1}a_{N+1}$ (premier terme négligé) et est en valeur absolue majoré par a_{N+1} dès que $N \geq n_1$. Ceci achève la preuve du théorème 1.3. $\diamondsuit$

Exemple 1.7. La série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$ est divergente, mais la série $[(-1)^{n-1}/n]_{n\geq 1}$ est une série alternée convergente ; on calculera plus tard dans ce cours la valeur de sa somme S, qui de fait vaudra $\log 2$. Si l'on veut calculer $\log 2$ avec 8 décimales exactes, on utilise le fait que la différence entre $\log 2$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

est du signe de $(-1)^n$ et est en valeur absolue majorée par $1/(n+1)$; pour que cette différence soit plus strictement plus petite que $10^{-8}/2$ (c'est-à-dire pour que le nombre rationnel $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ représente $\log 2$ avec au moins 8 premières décimales exactes), il suffit donc que $n+1 > 2 \times 10^8$. Ici bien sûr, la convergence de la somme de la série vers $\log 2$ est lente. On fait appel à des techniques du même ordre (mais avec des séries dont on cherche à "accélérer" la convergence pour limiter le temps de calcul) pour calculer par exemple le nombre π. La formule de John Machin (mathématicien anglais, 1680-1752) donne par exemple

$$\pi = 16\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}(1/5)^{2k+1} - 4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}(1/239)^{2k+1} \qquad (\dagger)$$

et fournit plus rapidement des approximations de π par les sommes partielles (il s'agit de la différence de deux sommes de séries alternées) que la formule plus classique

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\,; \qquad (\dagger\dagger)$$

dans le premier cas (formule ($\dagger$), l'estimation du reste de la série est majorée en $5^{-2k} = e^{-2(\log 5)\,k}$ est décroît donc exponentiellement, tandis que dans le second cas (formule ($\dagger\dagger$)), elle est en $1/k$, quantité ayant une décroissance de type polynômial, donc beaucoup plus lente !

1.4.2 L'intégration par parties discrète

Nous nous préparons (dans la sous-section 1.4.3) à énoncer des critères (de convergence de séries numériques) attribués au mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829). Les travaux d'Abel, contemporains de ceux d'Evariste Galois, ont profondément marqué tant la pensée algébrique que géométrique et ont initié le concept de géométrie algébrico-analytique. Abel exploita systématiquement l'idée inhérente à la preuve des critères en question, idée consistant à mettre en parallèle les opérations de dérivation et de primitivisation (portant sur les fonctions) et celles de <u>*dérivation discrète*</u> et de <u>*sommation*</u> portant sur les suites. C'est cette idée que nous présentons ici.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique ; la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$, où

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

joue, pour cette suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ donnée, un rôle tout-à-fait analogue à celui que jouerait la fonction primitive

$$F \ : x \to \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

pour la fonction continue f sur $[x_0, +\infty[$; à la place de la formule classique

$$F'(x) = f(x)\,, \quad x > x_0$$

qui permet de retrouver f à partir de F, on a les formules

$$u_{n+1} = S_{n+1} - S_n\,, \quad n \geq n_0\,, \quad u_{n_0} = S_{n_0}\,,$$

qui permettent de retrouver la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$; il est donc raisonnable d'appeler <u>*dérivation discrète à droite*</u> l'opération

$$(S_n)_{n\geq n_0} \to (S_{n+1} - S_n)_{n\geq n_0} = (u_n)_{n\geq n_0}\,.$$

Si f et g sont deux fonctions continuement dérivables sur un intervalle $[a, b]$, on a la très utile formule <u>*d'intégration par parties*</u>

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt\,. \qquad (*)$$

Ce résultat majeur est un cas particulier de la formule

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (**)$$

(valable pour une fonction F (ici $F = fg$) de classe C^1 sur $[a, b]$), connue comme le *théorème fondamental de l'analyse* (autant la formule $(**)$ est immédiate en dimension 1, autant elle l'est moins en dimension 2 où elle deviendra, on le verra au chapitre 5 ce cours, la formule de Green-Riemann ou de Stokes, et en dimension 3, où elle s'interprètera cette fois la formule de Green-Ostrogradski des physiciens).

Le <u>*lemme d'Abel*</u> est exactement le pendant discret de la formule capitale $(*)$.

Lemme 1.1 [lemme d'Abel] *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites de nombres complexes et*

$$(S_n)_{n\geq n_0}$$

la suite des sommes partielles de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$; pour $q > p > n_0$, on a

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = v_q S_q - v_p S_{p-1} - \sum_{k=p}^{q-1} (v_{k+1} - v_k) S_k\,. \qquad (1.15)$$

Preuve. L'astuce consiste juste à écrire, pour $k = p, ..., q$,

$$u_k = S_k - S_{k-1}\,;$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{q} u_k v_k &= \sum_{k=p}^{q} v_k(S_k - S_{k-1}) \\
&= v_p(S_p - S_{p-1}) + v_{p+1}(S_{p+1} - S_p) + \cdots + v_{q-1}(S_q - S_{q-1}) + v_q(S_q - S_{q-1}) \\
&= -v_p S_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} S_k(v_k - v_{k+1}) + v_q S_q \,.
\end{aligned}$$

Le lemme d'Abel n'est donc qu'un jeu d'écriture, correspondant à une version discrète de la formule d'intégration par parties. $\diamondsuit$

Exercice. Pour bien voir combien intégration par parties et lemme d'Abel sont proches, remarquons par exemple le résultat suivant : si n_0 est un entier positif et Φ une fonction de classe C^1 sur $[n_0, +\infty[$, alors, pour toute suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \Phi(k) = \Phi(n) \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \int_{n_0}^{n} \Big(\sum_{n_0 \leq k \leq t} u_k \Big) \Phi'(t)\, dt \,. \tag{†}$$

Par exemple, on vérifiera ainsi que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^z} = \frac{1}{n^{z-1}} + z \int_1^n \frac{E[t]}{t^{z+1}} dt \,, \tag{††}$$

où E désigne la fonction partie entière ; on découpera pour cela l'intégrale figurant au second membre de (†) comme suit

$$\begin{aligned}
\int_{n_0}^{n} \Big(\sum_{n_0 \leq k \leq t} u_k \Big) \Phi'(t)\, dt &= \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{n_0} + \cdots + u_k) \int_k^{k+1} \Phi'(t)\, dt \\
&= \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{n_0} + \cdots + u_k)\, (\Phi(k+1) - \Phi(k)) \,,
\end{aligned}$$

puis on utilisera la méthode d'Abel comme dans la preuve du lemme 1. La formule (††) se déduit de (†) en prenant $\Phi(t) := t^{-z}$, $n_0 = 1$ et les u_k tous égaux à 1. On verra plus loin que cette remarque nous permet de prolonger la fonction zeta de Riemann depuis le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z > 1\}$ jusqu'au demi-plan $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ privé du point $z = 1$.

1.4.3 Les critères d'Abel

Dans le terme général de la série $[(-1)^n a_n]_{n\geq n_0}$ faisant l'objet du critère des séries alternées, le point clef (lié précisément à l'idée d'alternance) est que la suite des sommes partielles de la série $[(-1)^n]_{n\geq 0}$ est une suite bornée, tandis que la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ décroit, elle, vers 0. Le premier <u>*critère d'Abel*</u> généralise cet état de fait.

Théorème 1.4 [premier critère d'Abel] *Soit $[u_n]_{n\geq n_0}$ et $[v_n]_{n\geq n_0}$ deux séries numériques telles que :*

- *la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$ est une suite bornée, soit*
$$\exists C > 0\,,\ \textit{tel que}\ \forall n \geq n_0\,,\ |S_n| \leq C\,;$$
- *la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à termes tous positifs pour $n \geq n_1$, tendant vers 0 à l'infini, et telle que*
$$n \geq n_1 \Longrightarrow v_n \geq v_{n+1} \geq 0\,.$$

Alors la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ *est convergente et l'on a la majoration du reste*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\Big| \leq 2Cv_{n+1}$$

pour $n \geq n_1$.

Preuve. On va montrer que la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ satisfait le critère de Cauchy **(C)** de la proposition 1.2 ; la conclusion du théorème résultera alors précisément de cette proposition 1.2. Soit $q > p > n_1$; on a, d'après le lemme d'Abel 1.1 et l'inégalité triangulaire

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq C\Big(v_p + v_q + \sum_{k=p}^{q-1}(v_k - v_{k+1})\Big) = 2Cv_p \tag{1.16}$$

(on a utilisé ici la première hypothèse sur la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$) ; en utilisant maintenant la seconde hypothèse sur cette suite, on voit que, pourvu que $p \geq N(\epsilon)$,

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon\,;$$

le critère de Cauchy est vérifié, donc aussi la convergence de la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$. Si l'on fixe $p = n+1$ et que l'on fasse tendre q vers l'infini dans (1.16), on trouve la majoration voulue pour le reste à l'ordre n de la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$. $\diamondsuit$

Exemple 1.8. Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de nombres complexes tous réels positifs au delà du cran n_1, tendant vers 0 à l'infini, avec de plus

$$n \geq n_1 \Longrightarrow a_n \geq a_{n+1} \geq 0$$

et si $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv 0$ (modulo 2π), les calculs de l'exemple 1.1 montrent que les sommes partielles de la série $[e^{in\theta}]_{n\geq 0}$ sont bornées en module ; les séries

$$[a_n e^{in\theta}]_{n\geq n_0}\,,\ [a_n \cos(n\theta)]_{n\geq n_0}\,,\ [a_n \sin(n\theta)]_{n\geq n_0}\,,$$

sont donc toutes convergentes d'après le critère d'Abel (théorème 1.4 ci-dessus).

Un énoncé comme le théorème 1.4 est loin d'être le seul énoncé que l'on puisse déduire du lemme d'Abel ; voici par exemple un <u>*second critère d'Abel*</u>, que nous retrouverons comme le premier lors de l'étude non plus des séries numériques, mais des séries de fonctions :

Théorème 1.5 [second critère d'Abel] *Soient* $[u_n]_{n\geq n_0}$, $[v_n]_{n\geq n_0}$ *deux séries numériques telles que :*

- *la série* $[u_n]_{n\geq n_0}$ *est une série convergente ;*
- *la série télescopique* $[v_n - v_{n+1}]_{n\geq n_0}$ *est une série absolument convergente.*

Alors la série $[u_n v_n]_{n\geq n_0}$ *est convergente.*

Preuve. La preuve utilise différemment le lemme d'Abel 1.1. On note R_n le reste au cran n de la série convergente $[u_n]_{n\geq n_0}$; mais au lieu de jouer avec la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ de la série $[u_n]_{n\geq n_0}$, on joue cette fois avec la suite $(R_n)_{n\geq n_0}$ des restes et l'on écrit

$$u_k = R_{k-1} - R_k$$

pour $k > n_0$ au lieu de $u_k = S_k - S_{k-1}$ comme dans la preuve du lemme d'Abel. Si $p > q > n_0$, on a donc, comme dans la preuve du lemme d'Abel 1.1 :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} v_k(R_{k-1} - R_k) \\
= \;& v_p(R_{p-1} - R_p) + v_{p+1}(R_p - R_{p+1}) + \cdots + v_{q-1}(R_{q-2} - R_{q-1}) + v_q(R_{q-1} - R_q) \\
= \;& v_p R_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} R_k(v_{k+1} - v_k) - v_q R_q \,.
\end{aligned}$$

Par hypothèses, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow |R_n| \leq \epsilon \,;$$

si $p \geq N(\epsilon)$ et $q > p$, on a donc (grâce à l'inégalité triangulaire)

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon(|v_p| + |v_q| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|).$$

Comme

$$|v_p| = \Big|\sum_{k=n_0}^{p-1} (v_k - v_{k+1}) - v_{n_0}\Big|$$

et

$$|v_q| = \Big|\sum_{k=n_0}^{q-1} (v_k - v_{k+1}) - v_{n_0}\Big|,$$

on a

$$|v_p| + |v_q| \leq 2\Big(|v_{n_0}| + \sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|\Big).$$

On a donc

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} u_k v_k\Big| \leq \epsilon(2|v_{n_0}| + 3\sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|).$$

La série $[u_n v_n]_{n \geq n_1}$ vérifie encore le critère de Cauchy, donc converge (proposition 1.2). On dispose de plus d'une estimation du reste de cette série au cran n par

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k v_k\Big| \leq (\max_{q \geq n} R_q) \times \Big(2|v_{n_0}| + 3\sum_{k=n_0}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|\Big)\,.$$

Ceci conclut la preuve de ce second critère. $\diamondsuit$

Il existe bien d'autres variantes des critère d'Abel ; une fois encore, c'est <u>la méthode</u> (intégration par parties discrète) qui est essentielle, non le critère lui-même !

1.5 Opérations sur les séries numériques

Les séries numériques du type $[u_n]_{n \geq 0}$ (on peut toujours compléter une série numérique $[u_n]_{n \geq n_0}$ en une telle série en décidant $u_0 = \cdots = u_{n_0 - 1} = 0$) constituent

un $\mathbb{C}$-espace vectoriel : on peut définir en effet la somme de deux séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ comme la série :

$$[u_n]_{n\geq 0} + [v_n]_{n\geq 0} \ := [u_n + v_n]_{n\geq 0} \ ;$$

de même, si λ est un nombre complexe et $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique, on définit

$$\lambda \cdot [u_n]_{n\geq 0} \ := [\lambda u_n]_{n\geq 0} \, ;$$

les deux opérations (l'addition et la multiplication externe) confèrent à l'ensemble des séries numériques la structure attendue de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'espace des séries numériques à coefficients réels, hérite, lui, d'une structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Notons que la somme de deux séries convergentes est convergente (de somme la somme des deux séries) et qu' *a contrario*, la somme d'une série convergente et d'une série non convergente est une série non convergente (cela sert souvent pour décider de la non-convergence d'une série numérique).

En ce qui concerne l'opération de "multiplication" des séries, nous en avons une somme toute très naturelle, celle par exemple qu'opère un logiciel de calcul lorsqu'on lui soumet deux vecteurs lignes

$$U := [u_0 \ u_1 \ \ldots \ u_{N-1}] \quad , \quad V := [v_0 \ v_1 \ \ldots \ v_{N-1}]$$

et qu'on lui soumet la routine

```
W=U .* V
```

Il s'agit ici du produit "terme à terme", dit aussi <u>*produit de Hadamard*</u> (Jacques Hadamard, arithméticien et analyste francais, commenca sa carrière à l'université de Bordeaux de 1893 à 1897) :

Définition 1.3 *Le* <u>*produit de Hadamard*</u> *des séries numériques* $[u_n]_{n\geq 0}$ *et* $[v_n]_{n\geq 0}$ *est par définition la série numérique* $[u_n v_n]_{n\geq 0}$.

Cette opération (naturelle lorsqu'il s'agit de multiplier les suites numériques) n'est cependant pas appropriée si l'on a en tête le processus de "capitalisation" sous-jacent au concept de série.

Pour concevoir une opération plus naturelle, revenons au concept naïf de "série d'évènements" et supposons que $\mathcal{L}$ soit un appareil physique qui transforme les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ en suites numériques du même type, et ce en agissant de manière linéaire. Les suites numériques d'entrée et de sortie peuvent être supposées indexées par le temps (qui prend les valeurs discrètes $t = 0$, $t = 1$,...) et il est naturel de supposer que les paramètres de la machine sont immuables dans le temps (on dit alors que $\mathcal{L}$ est une <u>*boîte noire*</u>). Alors, si la machine répond à la suite d'entrées

$$e_0 = 1 \, , e_1 = e_2 = \cdots = e_n = \cdots = 0$$

en renvoyant en sortie la suite $(v_n)_{n\geq 0}$, on voit aisément qu'elle se doit de répondre à une suite d'entrées $(u_n)_{n\geq 0}$ en renvoyant la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \, . \tag{1.17}$$

L'importance de cette opération (dite <u>*convolution discrète*</u>) au niveau des suites

$$\Big((u_n)_{n\geq 0}\,,\,(v_n)_{n\geq 0}\Big) \to (u_n)_{n\geq 0} * (v_n)_{n\geq 0} = (w_n)_{n\geq 0}$$

(où w_n est défini par (1.17)) dans le traitement de l'information numérique justifie le fait qu'on la répercute au niveau non plus des suites, mais des séries. On définit ainsi le <u>*produit de Cauchy*</u> de deux séries numériques. La proposition 1.7 justifiera (dans le contexte des séries positives) que c'est bien le produit des sommes des deux séries à termes positifs $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ que l'on obtient en regardant la somme de la série associée précisément à la suite $(u_n)_{n\geq 0} * (v_n)_{n\geq 0}$.

Définition 1.4 *Le* <u>*produit de Cauchy*</u> *des séries numériques* $[u_n]_{n\geq 0}$ *et* $[v_n]_{n\geq 0}$ *est par définition la série numérique* $[w_n]_{n\geq 0}$*, avec*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}\,.$$

La seconde raison (de nature plus algébrique cette fois) pour laquelle l'idée du produit de Cauchy s'impose est la suivante : pour calculer le produit des deux expressions formelles

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k X^k$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k X^k\,,$$

on fait appel aux règles de calcul algébrique (penser aux produits de polynômes ou de développements limités) pour affirmer que le "produit" des deux expressions est

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k X^k\,,$$

où $w_k := \sum_{l=0}^{k} u_l v_{k-l}$; on retrouve bien le produit de Cauchy.

Il se trouve que le produit de Cauchy se plie mieux au respect du comportement asymptotique des entrées que ne le fait le produit de Hadamard (notons que les critères d'Abel sont souvent utiles pour vérifier la convergence du produit de Hadamard de deux séries numériques).

En ce qui concerne le produit de Cauchy, nous avons tout d'abord l'important résultat suivant :

Proposition 1.7 *Le produit de Cauchy* $[w_n]_{n\geq 0}$ *de deux séries numériques* $[u_n]_{n\geq 0}$ *et* $[v_n]_{n\geq 0}$ *absolument convergentes est une série absolument convergente, de somme*

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big)$$

avec donc l'estimation

$$|S| \leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |v_k|\Big)\,.$$

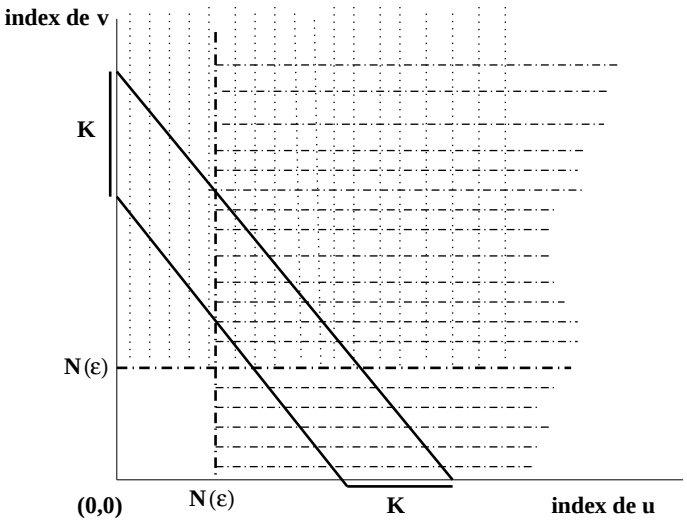

FIG. 1.4 – Absolue convergence du produit de Cauchy

Preuve. Considérons tout d'abord deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, toutes les deux absolument convergentes. D'après le critère de Cauchy (proposition 1.2), il existe $N(\epsilon)$ telle que, pour tous les sous-ensembles finis sans trous K_1 et K_2 de $\mathbb{N}$ inclus $[N(\epsilon), +\infty[$, on ait

$$\max\Big(\sum_{k\in K_1}|u_k|\,,\ \sum_{k\in K_2}|v_k|\Big)\leq \epsilon\,.$$

Soit K un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ sans trous inclus dans $[2N(\epsilon), +\infty[$;

$$\begin{aligned}\sum_{n\in K}\Big|\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\Big|\leq\sum_{n\in K}\sum_{k=0}^{n}|u_k|\,|v_{n-k}| &\leq \sum_{p=N(\epsilon)}^{\sup K}\sum_{q=0}^{\sup K}|u_p||v_q|+\sum_{q=N(\epsilon)}^{\sup K}\sum_{p=0}^{\sup K}|u_p|\,|v_q|\\ &\leq \epsilon\sum_{q=0}^{\infty}|v_q|+\epsilon\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\,. \qquad (1.18)\end{aligned}$$

Pour comprendre cette majoration, on s'aidera de la figure 1.4 : la somme des termes $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $p+q\in K$ a été majorée par la somme de ces mêmes termes lorsque (p,q) appartient au domaine entouré en gras, elle même majorée par la somme :

- des $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $p\geq N(\epsilon)$ (domaine hachuré en pointillé horizontalement)
- des $|u_p|\,|v_q|$ lorsque $q\geq N(\epsilon)$ (domaine hachuré en pointillé verticalement)

La quantité à droite de (1.18) pouvant être rendue arbitrairement petite (quand ϵ est choisi assez petit), on conclut toujours d'après le critère de Cauchy que la série $[w_n]_{n\geq 0}$ obtenue comme le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$ est aussi absolument convergente, donc convergente.

Pour calculer la somme, on remarque que

$$\Big|\sum_{k\leq 2n}w_k-\Big(\sum_{k=0}^{n}u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n}v_k\Big)\Big|\leq\sum_{p=n+1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}|u_p||v_q|+\sum_{q=n+1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}|v_q||u_p|\ ;$$

le second membre de cette inégalité est égal à

$$\Big(\sum_{q=0}^{\infty}|v_q|\Big)\,R_n([u])+\Big(\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\Big)\,R_n([v])$$

où $(R_n([|u|]))_{n\geq 0}$ (resp. $(R_n([|v|]))_{n\geq 0}$) désigne la suite des restes de la série convergente $[|u_n|]_{n\geq 0}$ (resp. $[|v_n|]_{n\geq 0}$) et tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k\leq 2n}w_k\Big) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_k\times\sum_{k=0}^{n}v_k\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}u_k\times\sum_{k=0}^{\infty}v_k\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. $\diamondsuit$

De fait, nous disposons d'un résultat plus fort, où seule l'absolue convergence de l'une des deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ ou $[v_n]_{n\geq 0}$ s'avère nécessaire : c'est le <u>*théorème de Mertens*</u>, attribué au théoricien des nombres prussien Franz Mertens (1840-1927) :

Proposition 1.8 [théorème de Mertens] *Soit $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique absolument convergente et $[v_n]_{n\geq 0}$ une série numérique convergente. Le produit de Cauchy des deux séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, soit la série de terme général*

$$w_n := \sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}v_ku_{n-k}$$

est une série convergente.

Remarque 1.7. On verra au chapitre suivant que, sous les hypothèses de cette proposition, la somme de la série produit de Cauchy $[w_n]_{n\geq 0}$ est encore le produit des sommes des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$.

Preuve. On va utiliser pour la preuve le critère de Cauchy (proposition 1.2) : d'après ce critère, on sait qu'étant donné $\epsilon>0$, il existe $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, tel que, pour tout sous-ensembles fini (sans trous) K_1 et K_2 de $\mathbb{N}$ inclus dans $[N(\epsilon),+\infty[$, on ait

$$\max\Big(\sum_{k\in K_1}|u_k|\,,\,\Big|\sum_{k\in K_2}v_k\Big|\Big)\leq\epsilon$$

(ceci résulte de la convergence de la série numérique $[v_n]_{n\geq 0}$ et de l'absolue convergence de la série $[u_n]_{n\geq 0}$). D'autre part, la convergence de la série $[v_n]_{n\geq 0}$ implique l'existence d'une constante C telle que

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \Big|\sum_{k=0}^{n}v_k\Big|\leq C\,.$$

Soit K un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ sans trous inclus dans $[2N(\epsilon),+\infty[$: en s'inspirant de la figure 1.5, on écrit

$$\sum_{n\in K}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\Big)=\sum_{p=0}^{N(\epsilon)}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)}v_q\Big)u_p+\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)}v_q\Big)u_p\,;$$

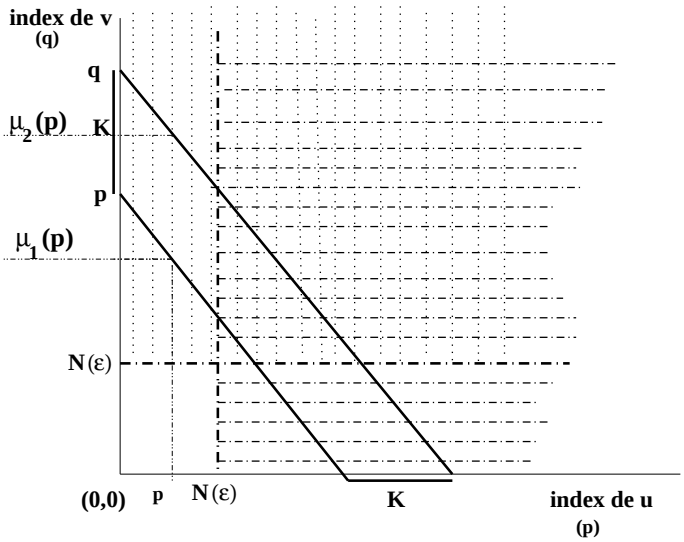

FIG. 1.5 – Preuve du théorème de Mertens

on a, compte-tenu du choix de $N(\epsilon)$ et de l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\sum_{p=0}^{N(\epsilon)}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big)u_p\Big| \leq \sum_{p=0}^{N(\epsilon)}|u_p|\,\Big|\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big| \leq \epsilon\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|$$

(en effet, pour tout $p = 0, ..., N(\epsilon)$, on voit sur la figure 1.3 que $\{\mu_1(p), ..., \mu_2(p)\}$ est inclus dans $[N(\epsilon), +\infty[)$; on a aussi

$$\Big|\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}\Big(\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big)u_p\Big| \leq \sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}|u_p|\,\Big|\sum_{q=\mu_1(p)}^{\mu_2(p)} v_q\Big| \leq 2C\sum_{p=N(\epsilon)+1}^{\sup K}|u_p| \leq 2C\epsilon\,.$$

Tout ceci montre que l'on a

$$\Big|\sum_{n\in K}\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\Big)\Big| \leq (2C + \sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\Big)\epsilon\,,$$

ce qui prouve que cette quantité peut être rendue arbitrairement petite (pourvu que $\inf K$ soit assez grand). Le critère de Cauchy (proposition 1.2) s'applique donc et l'on en déduit la convergence de la série produit de Cauchy des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$. $\diamondsuit$

Chapitre 2

Rappels sur l'intégrale, intégrales impropres

La théorie classique de l'intégration des fonctions continues (ou même seulement continues par morceaux) sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ a été vue par tous au deuxième semestre (MAT202) ; on verra d'ailleurs plus tard que cette théorie de l'intégration (que l'on attribue au géomètre allemand Bernhard Riemann (1826-1866), même s'il ne s'agit pas là de sa contribution majeure aux mathématiques) permet aussi d'intégrer sur un fermé borné de $\mathbb{R}$ les fonctions dites *réglées*, c'est-à-dire ayant une limite à gauche et à droite en tout point. Certains d'entre vous suivront ce semestre (dans le cours de MAA401) une initiation à une approche de la notion d'intégrale plus riche au niveau de la classe des fonctions que l'on peut intégrer en même temps que des propriétés face aux prises de limite (ce qui intéresse au premier chef les physiciens appelés à considérer les fonctions comme les versions quantifiées de phénomènes physiques). Cette approche "moderne" de l'intégrale remonte au début du XX-ème siècle (1902-1904) et est due au mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941). Comme notre objectif dans ce chapitre n'est pas tant une théorie de l'intégration (qui sera reprise plus tard) que la notion d'intégrale impropre (et sa relation intime avec la notion de série numérique), nous ne travaillerons dans ce chapitre qu'avec des fonctions définies sur un intervalle (a, b) de $\mathbb{R}$ (*resp.* un ouvert borné U de $\mathbb{R}^2$ à frontière C^1 par morceaux au paragraphe 2.5) et continues par morceaux sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans (a, b) (*resp.* continues sur $\overline{U}$). Notre point de vue relatif à l'intégration restera ici le point de vue naïf de Riemann.

2.1 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit $I = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (par les parenthèses, on veut signifier que l'intervalle peut tout aussi bien être ouvert que fermé, a pouvant valoir $-\infty$, b pouvant valoir $+\infty$).

Soit f une fonction définie sur (a, b) et à valeurs dans $[0, +\infty[$ (par exemple la fonction $t \to t^{-1/2}$ sur l'intervalle $]0, 1]$ ou la fonction $t \to t^{-2}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$). On suppose la fonction f continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$ inclus dans $[a, b]$: ceci signifie que, pour chaque tel segment $[\alpha, \beta]$, il existe une subdivision

$$\alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = \beta$$

telle que la restriction de f à chaque sous-segment $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, $k = 0, ..., N-1$ se prolonge en une fonction continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ (voir la figure 2.1).

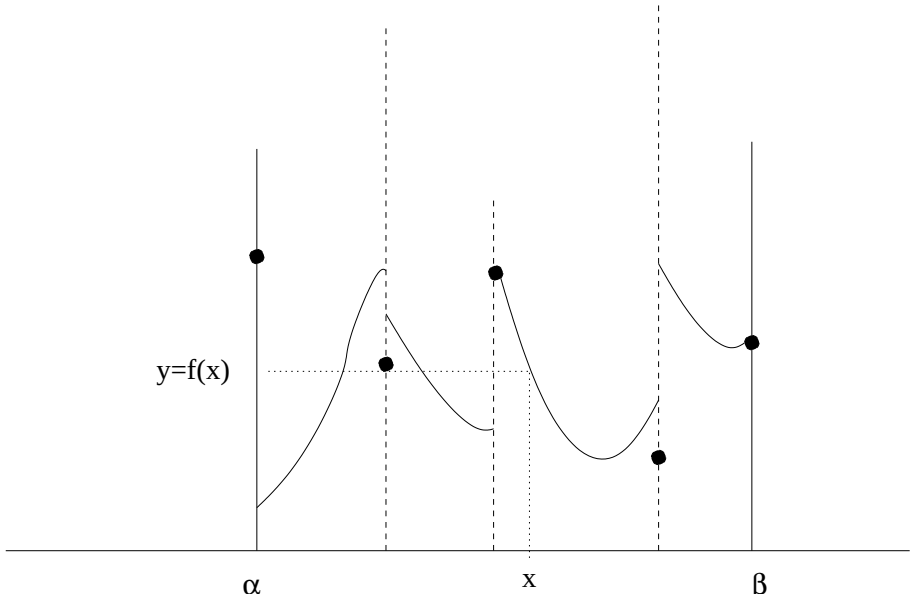

FIG. 2.1 – Continuité par morceaux

Le *graphe* de f est défini comme le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x))\,;\, x \in (a, b)\}$$

et le *sous-graphe* est par définition le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini comme

$$E(f) := \{(x, y)\,;\, x \in (a, b)\,, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

On sait déjà définir l'intégrale de f sur un segment $[\alpha, \beta]$ contenu dans (a, b) comme étant l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ intersection du sous-graphe de f avec la bande verticale $\{\alpha \leq x \leq \beta\}$ (voir la figure 2.2).

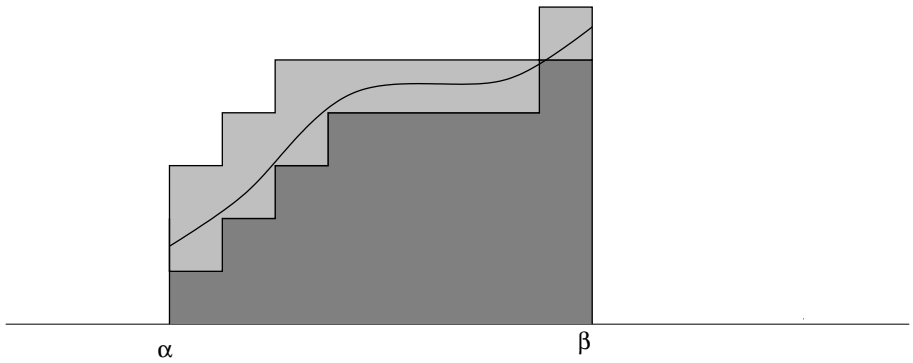

FIG. 2.2 – L'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment (l'approche de Riemann)

Cette aire est définie comme suit si f est continue sur $[\alpha, \beta]$ (ensuite, on découpe l'intervalle, les points de discontinuité en nombre fini ne jouant aucun rôle dans les

calculs d'aire) : pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver deux histogrammes R_ϵ et S_ϵ (avec $S_\epsilon \subset R_\epsilon$) comme sur la figure 2.2 tels que l'aire de $R_\epsilon \setminus S_\epsilon$ soit strictement plus petite que ϵ et que l'on ait l'encadrement géométrique

$$S_\epsilon \subset \{(x,y)\,;\, x \in [\alpha,\beta]\,,\ 0 \le y \le f(x)\} \subset R_\epsilon\,.$$

L'intégrale de f sur $[\alpha,\beta]$, notée

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

(attention, il faut impérativement que $\alpha \le \beta$ pour écrire l'intégrale de f sur $[\alpha,\beta]$ sous la seconde forme) est définie soit comme la borne inférieure de l'ensemble des aires des histogrammes qui "coiffent" le graphe de f, soit comme la borne supérieure de l'ensemble des aires des histogrammes que le graphe de f sur $[\alpha,\beta]$ "coiffe". Ces deux nombres sont égaux pour une fonction continue (car une fonction continue est aussi uniformément continue) et aussi (par découpage de l'intervalle $[\alpha,\beta]$) pour une fonction continue par morceaux. Les fonctions positives continues par morceaux sur $[\alpha,\beta]$ font partie d'une classe plus large de fonctions positives bornées pour laquelle cette propriété subsiste, la classe des fonctions positives intégrables au sens de Riemann sur $[\alpha,\beta]$; cette classe, on le verra, englobe les fonctions ayant une limite à gauche et à droite en tout point.

Remarque 2.1. Le point de vue sur lequel repose la théorie de l'intégration proposée par H. Lebesgue (que vous verrez plus tard, sauf pour certains d'entre vous) repose sur l'idée de calculer l'aire de $\{(x,y)\,;\, x \in [\alpha,\beta]\,,\ y \le f(x)\}$ en utilisant des "tranches" horizontales et non plus verticales, ce qui autorise plus de liberté relativement aux contraintes imposées à f (ici, le fait d'être continue par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans (a,b)) ; voir la figure 2.3 ; par contre, il faut être à même de savoir calculer l'aire de l'image réciproque de chaque tranche, ce qui suppose des hypothèses sur f (on parlera de "mesurabilité"). Sur la figure ci-dessous, on a schématisé ceci pour une fonction positive de deux variables défini dans un ouvert A que l'on a partitionné en fonction des valeurs prises par f (par exemple $A_0 = \{x\,;\, y_0 < f(x) < y_1\}$, *etc.*). Pour calculer l'intégrale, on subdivise l'ensemble des valeurs prises par la fonction f avec un pas Δy et l'on calcule, pour chaque tranche horizontale $[y_k, y_k + \Delta y]$, la « mesure »de l'ensemble $\{x\,;\, f(x) \in [y_k, y_k + \Delta y]\}$, puis on évalue la somme $\sum_k \text{mes}\Big(\{x\,;\, f(x) \in [y_k, y_k + \Delta y]\}\Big) \times \Delta y$; en affinant ensuite le pas Δy, on approche la valeur de l'intégrale cherchée.

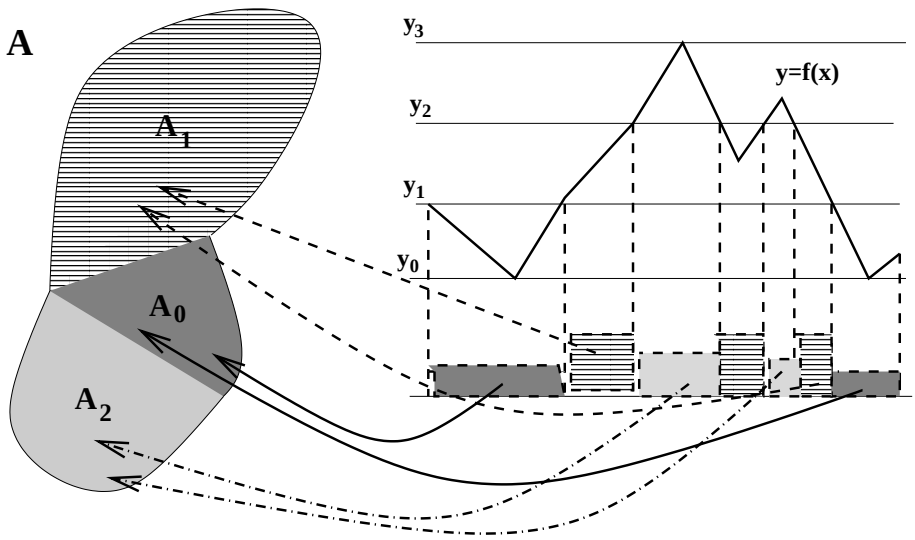

Fig. 2.3 – Le point de vue de H. Lebesgue

Revenant à notre contexte "Riemann", nous allons maintenant définir ce que signifie l'expression "*la fonction f est intégrable sur (a,b)*".

Définition 2.1 *Soit f une fonction positive sur un intervalle (a,b) de $\mathbb{R}$ et continue par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans (a,b). La fonction f est dite intégrable sur (a,b) (ou encore l'intégrale de f sur (a,b) est convergente, ou converge) si et seulement si*

$$\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \Big(\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dt \Big) < +\infty \,.$$

Si c'est le cas, on définit l'intégrale de f sur (a,b) par

$$\int_{(a,b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt := \sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \Big(\int_{[\alpha,\beta]} f(t)\,dt \Big) \,. \tag{2.1}$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si

$$\sup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} \Big(\int_{[\alpha,\beta]} f(t)dt \Big) = +\infty \,,$$

on dit que l'intégrale de f sur (a,b) est une intégrale divergente.

Lorsque a ou b n'est pas inclus dans (a,b) et que f est intégrable sur (a,b) au sens ci-dessus, son intégrale est qualifiée d'*intégrale impropre convergente*; si la fonction n'est pas intégrable, on parle d' *intégrale impropre divergente* pour l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

Si c est un point quelconque de (a,b) et si f est une fonction positive sur (a,b), la convergence de l'intégrale

$$\int_{(a,b)} f(t)\,dt$$

équivaut à celle des deux intégrales

$$\int_{(a,c]} f(t)\,dt$$

et

$$\int_{[c,b)} f(t)\,dt \,.$$

Ceci permet de ramener l'étude des intégrales impropres de fonctions positives sur un intervalle (a,b) à celle des intégrales impropres de fonctions positives sur un intervalle du type $(a,c]$ ou $[c,b)$ et permet donc de "sérier" les problèmes (et avec eux les difficultés éventuelles). Cela nous permet aussi de nous ramener sur le terrain des séries où l'infini n'est que d'un seul côté (du côté des entiers positifs) et non des deux.

La relation avec les séries à termes positifs est précisément importante à souligner : par exemple pour que l'intégrale de f sur $[c,b[$ soit convergente (*resp.* divergente), il faut et il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de $[a,b[$, croissante et convergeant vers b, telle que la série

$$\Big[\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt \Big]_{n\geq 0}$$

soit convergente (*resp.* divergente). On a un résultat analogue concernant les intégrales impropres de fonctions positives sur $(a, c]$, donc, en combinant les deux, pour les intégrales impropres de fonctions positives sur (a, b).

Exemple 2.1. Si x est un nombre réel, la fonction

$$t \longmapsto t^{-x}$$

est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x < 1$. En effet, si $x < 1$, pour tout $\alpha \in]0, 1]$,

$$\int_{[\alpha,1]} t^{-x} dt = \int_\alpha^1 \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}\Big[t^{1-x}\Big]_\alpha^1 = \frac{1}{1-x}(1-\alpha^{1-x}) \leq \frac{1}{1-x}\,,$$

ce qui montre que, pour tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]0, 1]$, on a

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dt}{t^x} \leq \int_{[\alpha,1]} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{1-x}\,.$$

Si $x < 1$, la borne supérieure de l'ensemble des intégrales

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dt}{t^x}\,,\ [\alpha, \beta] \subset]0, 1]\,,$$

vaut la limite, lorsque α tend vers 0 de $\int_\alpha^1 dt/t^x$, soit

$$\int_{]0,1]} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}\,.$$

En revanche, si $x > 1$, on voit que

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_\alpha^1 \frac{dt}{t^x} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{x-1}(\alpha^{1-x} - 1) = +\infty\,.$$

Ceci reste vrai pour $x = 1$ car

$$\int_\alpha^1 \frac{dt}{t} = -\log\alpha\,,$$

quantité tendant vers $+\infty$ lorsque α tend vers 0. L'intégrale

$$\int_{]0,1]} t^{-x}\, dt$$

diverge donc si $x \geq 1$ (tandis qu'elle converge si $x < 1$).

Exemple 2.2. Si x est un nombre réel, la fonction

$$t \longmapsto t^{-x}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $x > 1$. En effet, si $x > 1$, pour tout $\beta \in [1, +\infty[$,

$$\int_{[1,\beta]} t^{-x} dt = \int_1^\beta \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\Big[t^{1-x}\Big]_\beta^1 = \frac{1}{x-1}(1-\beta^{1-x}) \leq \frac{1}{x-1}\,,$$

ce qui montre que, pour tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset [1, +\infty[$, on a

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dt}{t^x} \leq \int_{[1,\beta]} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{1-x}\,.$$

Si $x > 1$, la borne supérieure de l'ensemble des intégrales

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{dt}{t^x}\,,\ [\alpha, \beta] \subset [1, \infty[\,,$$

vaut la limite, lorsque β tend vers $+\infty$ de $\int_1^\beta dt/t^x$, soit

$$\int_{[1,\infty[} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{1-x}\,.$$

En revanche, si $x < 1$, on voit que

$$\lim_{\beta\to+\infty} \int_1^\beta \frac{dt}{t^x} = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{1-x}(\beta^{1-x} - 1) = +\infty\,.$$

Ceci reste vrai pour $x = 1$ car

$$\int_1^\beta \frac{dt}{t} = \log\beta\,,$$

quantité tendant vers $+\infty$ lorsque β tend vers $+\infty$; l'intégrale

$$\int_{[1,+\infty[} t^{-x}\,dt$$

diverge donc si $x \leq 1$ (tandis qu'elle converge si $x > 1$).

Exemple 2.3. Les deux exemples précédents montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale de

$$t \longmapsto t^{-x}$$

sur $]0, +\infty[$ est une intégrale divergente.

Les critères de comparaison pour les séries à termes positifs se transposent au cadre des intégrales impropres de ce type ; on retrouve les trois situations du théorème 1.2 :

- si f et g sont deux fonctions positives continues par morceaux sur $]a, b]$, telles que $f = O(g)$ au voisinage de a, la convergence de l'intégrale

  $$\int_{]a,b]} g(t)\,dt$$

  implique celle de l'intégrale

  $$\int_{]a,b]} f(t)\,dt\,;$$

  ceci reste vrai si $a = -\infty$; de même, c'est encore vrai si l'on remplace $]a, b]$ par $[a, b[$ et si $f = O(g)$ au voisinage de b, b pouvant valoir $+\infty$;
- si f et g sont deux fonctions positives continues par morceaux sur $]a, b]$, telles que $f \geq cg$ (avec $c > 0$) au voisinage de a, la divergence de l'intégrale

  $$\int_{]a,b]} g(t)\,dt$$

  implique celle de l'intégrale

  $$\int_{]a,b]} f(t)\,dt\,;$$

  ceci reste vrai si $a = -\infty$; de même, c'est encore vrai si l'on remplace $]a, b]$ par $[a, b[$ et si $f \geq cg$ au voisinage de b, b pouvant valoir $+\infty$;
- enfin, si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b]$ et si $f \simeq g$ au voisinage de a, les deux intégrales

  $$\int_{]a,b]} f(t)\,dt$$

et

$$\int_{]a,b]} g(t)\,dt$$

sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes) ; ceci reste vrai si $a = -\infty$ et si l'on remplace $]a,b]$ par $[a,b[$, f et g étant équivalentes cette fois au voisinage de b (b pouvant valoir $+\infty$).

On a l'importante proposition suivante, que l'on pourrait qualifier de "critère de Cauchy" :

Proposition 2.1 *Soit $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction positive continue par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de $[a,b[$ (resp. $]a,b]$). L'intégrale impropre*

$$\int_a^b f(t)dt$$

converge si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un seuil u_ϵ avec $a < u_\epsilon < b$ tel que

$$\forall\, x_2 \geq x_1 \geq u_\epsilon\,, \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt < \epsilon \tag{2.2}$$

$$\Big(\textit{resp.}\ \forall\, x_1 \leq x_2 \leq u_\epsilon\,, \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt < \epsilon\Big)\,.$$

Preuve. On se place dans le premier cas ($[a,b[$, l'autre est identique). Supposons dans un premier temps que f soit une fonction positive continue par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de $[a,b[$ et intégrale sur $[a,b[$. D'après la définition (2.1) de l'intégrale sur $[a,b[$ comme borne supérieure, il existe, pour chaque $\epsilon > 0$, un segment $[a,u_\epsilon]$ tel que

$$\int_{(a,b)} f(t)\,dt - \epsilon < \int_{[a,u_\epsilon]} f(t)\,dt \leq \int_{(a,b)} f(t)\,dt\,.$$

D'autre part, pour tout segment $[x_1,x_2]$ tel que $x_2 > x_1 \geq u_\epsilon$, on a, de par la relation de Chasles

$$\int_{[a,u_\epsilon]} f(t)\,dt + \int_{[x_1,x_2]} f(t)\,dt \leq \int_{[a,x_2]} f(t)\,dt \leq \int_{(a,b)} f(t)\,dt\,;$$

on a donc bien, pour un tel segment $[x_1,x_2]$,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt < \epsilon\,,$$

ce qui prouve le résultat voulu. Pour prouver la réciproque (on suppose cette fois la condition (2.2) remplie), on se donne une suite $(x_n)_n$ de points de $[a,b[$ tendant en croissant vers b et l'on voit que la série numérique

$$\Big[\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt\Big]_{n\geq 0}$$

satisfait le critère de Cauchy car

$$\sum_{k=p}^{q} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{x_p}^{x_{q+1}} f(t)\,dt < \epsilon$$

si p est assez grand pour que $x_p \geq u_\epsilon$; la fonction f est donc intégrable sur $[a, b[$ du fait de la relation déjà soulignée entre intégrales impropres de fonctions positives et séries numériques à termes positifs. $\diamondsuit$

Remarque 2.1. Il faut prendre garde à une idée communément admise, à savoir que la fonction f tende vers 0 en b si f est intégrable sur $[a, b[$. Ceci est faux ; il est possible que la fonction présente des pics de mieux en mieux localisés (mais tous d'altitude ne fléchissant pas) qui se rapprochent de b et soit nulle partout ailleurs ; on peut par exemple considérer sur $[0, +\infty[$ la fonction f définie par

$$\forall n \in \{2, 3, ..., \}\,, \qquad \begin{aligned} &\forall t \in]n - \frac{1}{n^3}, n]\,, f(t) = n^4(t - n + \frac{1}{n^3}) \\ &\forall t \in]n, n + \frac{1}{n^3}[\,, f(t) = n^4(n + \frac{1}{n^3} - t) \end{aligned}$$

et $f = 0$ ailleurs. (voir la figure 2.4) ; il s'agit d'une fonction continue (intégrable, on le vérifiera en calculant son intégrale comme une série de surfaces de triangles convergente car la série $[1/n^2]_{n\geq 1}$ converge) et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$!

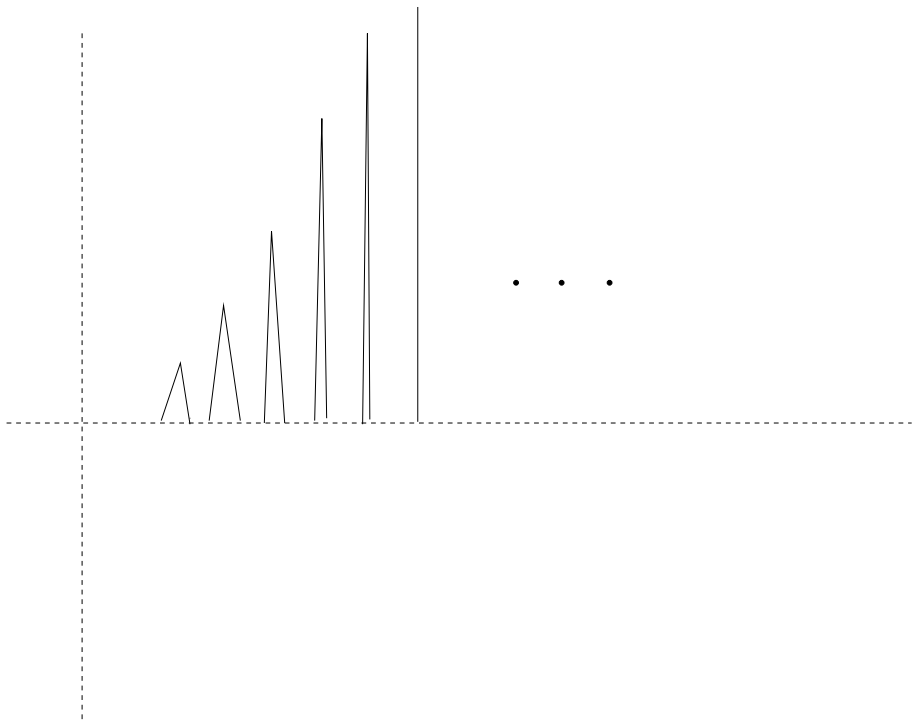

FIG. 2.4 – Intégrabilité et non convergence vers 0

La fonction f ne tend donc pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

2.2 Intégrabilité des fonctions à valeurs complexes sur un intervalle

Toute fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes s'écrit sous la forme :

$$f = \mathrm{Re}\, f + i\mathrm{Im}\, f\,,$$

chacune des deux fonctions (à valeurs réelles) $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ s'écrivant comme différence de deux fonctions à valeurs positives

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f &= (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- , \qquad (\operatorname{Re} f)^+ := \sup(\operatorname{Re} f, 0)\,,\ (\operatorname{Re} f)^- := \sup(-\operatorname{Re} f, 0) \\ \operatorname{Im} f &= (\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^- , \qquad (\operatorname{Im} f)^+ := \sup(\operatorname{Im} f, 0)\,,\ (\operatorname{Im} f)^- := \sup(-\operatorname{Im} f, 0)\,. \end{aligned}$$

Définition 2.2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle (a, b) de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, telles que les deux fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient continues par morceaux sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans (a, b). On dit que la fonction f est intégrable sur (a, b) si les quatre fonctions $(\operatorname{Re} f)^{\pm}, (\operatorname{Im} f)^{\pm}$ le sont, l'intégrale de f sur (a, b) étant alors définie comme le nombre complexe*

$$\begin{aligned} &\int_{(a,b)} f(t)\,dt \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f)^+(t)dt - \int_a^b (\operatorname{Re} f)^-(t)dt + i\Big(\int_a^b (\operatorname{Im} f)^+(t)dt - \int_a^b (\operatorname{Im} f)^-(t)dt\Big)\,. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. L'intégrabilité de f sur (a, b) équivaut à celle de la fonction positive $t \to |f(t)|$.

Exemple 2.4. La fonction

$$t \longmapsto \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^3$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue sur $[-1, 1]$ et majorée en module par $1/|t|^3$ hors de $[-1, 1]$. En revanche, la fonction paire (dite *sinus-cardinal*)

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\sin t}{t}$$

(prolongée par 1 en $t = 0$) dont on a représenté le graphe sur $[0, +\infty[$ ci-dessous n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (la série des surfaces de tous les lobes sur $[0, \infty[$, toutes comptées positivement, est en fait une série divergente comme la série harmonique $[1/n]_{n\geq 1}$).

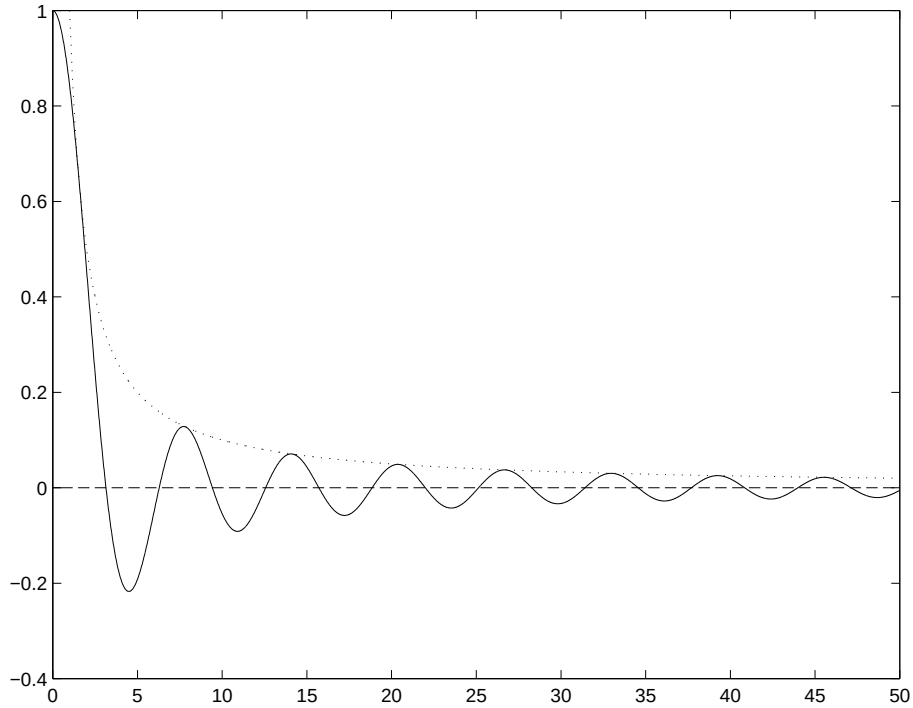

Fig. 2.5 – La fonction sinus-cardinal

2.3 Semi-intégrabilité sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

On a vu que sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction *sinus-cardinal*

$$t \in [0, \infty[\longmapsto \frac{\sin t}{t}$$

n'est pas une fonction intégrable. Pourtant, cette fonction (qui se présente comme une fonction sinusoïdale amortie) présente une suite de zéros croissante aux points $\pi, 2\pi, 3\pi, ...$ (voir la figure 2.5) et la série numérique

$$\Big[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\Big]_{n\geq 0} = \Big[(-1)^n \Big(\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi}\, dt\Big)\Big]_{n\geq 0}$$

obéït au critère des séries alternées car

$$\frac{1}{t + (n+1)\pi} \leq \frac{1}{t + n\pi} \leq \frac{1}{n\pi}$$

pour tout $t \in [0, \pi]$, ce qui permet d'affirmer, en multipliant par $\sin t$ et en intégrant sur $[0, \pi]$, que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + (n+1)\pi}\, dt \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi}\, dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \frac{2}{n\pi}\,.$$

La suite de terme général

$$a_n := \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi}\, dt$$

est donc bien une suite de nombres positifs tendant vers 0 en décroissant. La série numérique

$$\Big[\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\Big] = \Big[(-1)^n \Big(\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + n\pi}\, dt\Big)\Big]_{n\geq 0}$$

est donc une série convergente, de somme S, et il est facile de voir que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = S$$

(on verra plus tard que $S = \pi/2$). Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.3 *Soit f une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ (resp. $]a, b]$), à valeurs complexes, et continue par morceaux sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans cet intervalle (les parties réelle et imaginaire sont continues par morceaux sur ce segment). On dit que la fonction f est semi-intégrable sur $[a, b[$ (resp. sur $]a, b]$), ou encore que l'intégrale impropre*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

est semi-convergente, s'il existe un nombre réel S tel que

$$\lim_{x\in[a,b[, x\to b} \Big(\int_a^x f(t)\, dt\Big) = S$$

$$\Big(\textit{resp.} \lim_{x\in]a,b], x\to a} \Big(\int_x^b f(t)\, dt\Big) = S\Big).$$

Remarque 2.4. Si l'on se place dans le cadre d'un intervalle $[a, b[$ semi-ouvert à droite et si f est continue sur $[a, b[$, la fonction

$$F \ : x \in [a, b[\longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $]a, b[$ et dire que f est semi-intégrable sur $[a, b[$ équivaut à dire que cette primitive a une limite en b.

Un test de semi-intégrabilité (indépendant de la connaissance de l'intégrale) passe par le critère de Cauchy. On a le résultat suivant :

Proposition 2.2 *Soit $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs complexes définie sur $[a, b[$ continue par morceaux sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de $[a, b[$ (resp. $]a, b]$). L'intégrale impropre*

$$\int_a^b f(t)dt$$

est semi-convergente si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un seuil u_ϵ avec $a < u_\epsilon < b$ tel que

$$\forall\, x_2 \geq x_1 \geq u_\epsilon\,, \qquad \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \Big| < \epsilon$$

$$\Big(resp.\ \forall\, x_1 \leq x_2 \leq u_\epsilon\,, \qquad \Big| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \Big| < \epsilon \Big)\,.$$

Preuve. Ceci repose sur le fait que pour qu'une fonction F définie dans $[a, b[$ tende vers une limite finie S lorsque x tend vers b, il faut et il suffit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u_\epsilon \in [a, b[$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in [u_\epsilon, b[\,,\ |F(x_1) - F(x_2)| < \epsilon\,.$$

Il s'agit du critère de Cauchy pour les fonctions numériques, conséquence du critère de Cauchy (C_0) pour les suites numériques rappelé au chapitre 1 (avant la proposition 1.2). $\diamondsuit$

Remarque 2.5. La combinaison des propositions 1.1 et 1.2 et le fait que

$$\Big| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \Big| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\, dt$$

nous assurent que l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ implique la semi-intégrabilité de cette même fonction (*idem* sur $]a, b]$).

Il faut souligner à l'aide d'un exemple pourquoi il est si capital (lorsque l'on parle de semi-intégrabilité sans que la fonction soit intégrable) de travailler dans un intervalle ouvert d'un seul côté. La fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{t}{1 + t^2}$$

n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $t \to t^{-1}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, voir l'exemple 2.2). Pourtant

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} \frac{tdt}{1 + t^2} = \lim_{x \to +\infty} 0 = 0$$

car la fonction sous l'intégrale est impaire. Cela n'aurait cependant aucun sens de dire que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tdt}{1+t^2}$$

est semi-convergente (et de valeurs 0) car on voit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-2x^2}^{x} \frac{tdt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \log \frac{1+x^2}{1+4x^4} = -\infty \ !$$

Si l'on veut parler d'intégrale semi-convergente sur $]a,b[$ (pour une fonction f non intégrable sur $]a,b[$), il faut prendre un point $c \in]a,b[$ et dupliquer le problème en disant que les intégrales impropres sur $]a,c]$ et $[c,b[$ doivent toutes les deux être semi-convergentes.

Comme lors de l'étude asymptotique des séries à termes quelconques qui ne sont pas absolument convergentes, chercher si une intégrale sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ ou $]a,b]$ est semi-convergente (lorsque l'absolue convergence est en défaut) passe par le pendant continu de la méthode d'Abel, c'est-à-dire la méthode d'intégration par parties. Nous donnons ici un exemple important pour illustrer pareille démarche.

Exemple 2.5 (la transformation de Laplace). Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$; on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty f(t)e^{-x_0 t}\,dt$$

soit semi-convergente ; alors, pour tout nombre complexe p tel que $\operatorname{Re} p > x_0$, l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

est encore semi-convergente.

Ceci est bien sûr très facile à montrer lorsque l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty f(t)e^{-x_0 t}\,dt$$

est convergente (au sens de la définition 2.2), ce qui signifie, rappelons le,

$$\int_0^\infty |f(t)|\, e^{-x_0 t}\,dt \ ;$$

si tel est le cas, pour tout nombre complexe p tel que $\operatorname{Re} p \geq x_0$ (notons que l'on peut prendre dans ce cas l'inégalité large et non stricte), on a

$$\int_0^\infty |f(t)|\,|e^{-pt}|\,dt = \int_0^\infty |f(t)|e^{-(\operatorname{Re} p)\,t}\,dt \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-x_0 t}\,dt < \infty$$

et l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

est convergente, donc semi-convergente (voir la remarque 2.5).

La situation est plus délicate si l'on suppose la simple semi-convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty f(t)e^{-x_0 t}\,dt$$

(et non sa convergence). Dans ce cas, notons v la fonction

$$x \in [0,+\infty[\longmapsto v(x) := \int_0^x f(t)e^{-x_0 t}\,dt\,;$$

la fonction v tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et l'on retiendra de ce fait simplement que v est une fonction bornée sur $[0, \infty[$. Si p est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re} p > x_0$, on écrit, pour tout $x > 0$ (en utilisant la formule d'intégration par parties) :

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)e^{-pt}\,dt &= \int_0^x (f(t)e^{-x_0 t})\,e^{-(p-x_0)t}\,dt = \Big[v(t)e^{-(p-x_0)t}\Big]_0^x \\ &\quad +(p-x_0)\int_0^x v(t)e^{-(p-x_0)\,t}\,dt\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Comme v est bornée par M sur $[0, +\infty[$, on a, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x |v(t)e^{-(p-x_0)t}|\,dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p - x_0)}\,dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p - x_0} < +\infty\,,$$

ce qui montre que l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty v(t)e^{-(p-x_0)\,t}\,dt$$

est convergente, donc semi-convergente. En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (2.3), on en déduit la semi-convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

(lorsque $\operatorname{Re} p > x_0$), avec en prime la formule

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = (p-x_0)\int_0^\infty v(t)e^{-(p-x_0)\,t}\,dt\,.$$

La fonction

$$p \longmapsto \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

(dite *transformée de Laplace de l'entrée* f) ainsi construite joue un rôle opérationnel majeur dans divers pans de la physique (électronique, théorie du contrôle, traitement du signal, *etc.*) car elle transforme l'opération consistant au passage de l'entrée f à travers un appareil dont les paramètres restent immuables dans le temps (et qui agit linéairement) en une opération de multiplication au niveau des transformées de Laplace, opération facile à gérer du point de vue calculs. C'est au mathématicien et astronome français Pierre Simon Laplace (1749-1827) que l'on doit ce concept de transformation intégrale. Par exemple, la transformée de Laplace de la fonction $t \in [0, +\infty[\to \sin t/t$ est donnée sur $[0, +\infty[$ par

$$L(p) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,e^{-pt}\,dt$$

et c'est d'ailleurs, pour $p \in]0, +\infty[$, une intégrale impropre convergente (et non seulement semi-convergente). On verra plus tard (au chapitre 3) que L se dérive comme fonction de p sur $]0, +\infty[$ en la fonction

$$\begin{aligned} p \to -\int_0^\infty \sin t\,e^{-pt}\,dt &= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty (e^{-(p-i)t} - e^{-(p+i)t})\,dt \\ &= -\frac{1}{1+p^2}\,, \end{aligned}$$

fonction dont on connait une primitive, la fonction $-\arctan$; il en résultera que pour tout $p > 0$, $L(p) = L(0) - \arctan p$ et comme visiblement $\lim\limits_{p\to+\infty} L(p) = 0$, $L(0) - \pi/2 = 0$, soit

$$\lim_{p\to 0_+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,e^{-pt}\,dt = \frac{\pi}{2}\,,$$

ce qui semble une indication plus que sérieuse à ce que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ceci sera justifié plus loin (au chapitre 3), puis l'on retrouvera ce résultat par une méthode tout à fait différente, basée sur la formule des résidus en analyse complexe, tout à la fin de ce cours.

2.4 Changement de variables dans les intégrales impropres

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et φ une application de classe C^1 sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, avec $\varphi(J) \subset I$. Si $[\alpha, \beta]$ est un segment de J, on a la formule

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt\,.$$

C'est la formule de changement de variables dans les primitives (on introduit une primitive F de f sur I et on remarque que $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur J d'après la règle de Leibniz du calcul différentiel.

Du fait de la définition des intégrales impropres, on déduit de ceci le résultat suivant :

Proposition 2.3 *Soient (a, b) et (c, d) deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels qu'il existe une application bijective (donc strictement monotone) entre les intervalles (a, b) et (c, d) (automatiquement de la même nature, ouverts ou fermés des mêmes côtés) ; on suppose φ de classe C^1 sur (c, d). Si f est une fonction définie sur (a, b) et continue par morceaux sur tout segment de (a, b), la fonction*

$$u \in (c, d) \longmapsto f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|$$

est définie sur (c, d) et continue par morceaux sur tout segment de (c, d). De plus, la fonction f est intégrable sur (a, b) (au sens ou l'intégrale impropre de f sur (a, b) converge) si et seulement si la fonction

$$u \longmapsto f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|$$

est intégrable sur (a, b) et l'on a dans ce cas l'égalité des deux intégrales impropres

$$\int_{(a,b)} f(t)\,dt = \int_{(c,d)} f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du\,.$$

Preuve. Puisque composition et multiplication des applications respectent la propriété de continuité, la fonction

$$u \in (c, d) \longmapsto f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|$$

est continue par morceaux sur tout segment de (c, d) dès que f l'est sur tout segment de (a, b). Si φ est monotone croissante (ce que nous supposerons pour fixer les idées), alors nécessairement $\varphi' \geq 0$ sur (c, d) et la formule de changement de variable pour les primitives nous assure que si $[\alpha, \beta]$ est un segment de (c, d),

$$\int_\alpha^\beta |f(\varphi(u))|\,|\varphi'(u)|\,du = \int_\alpha^\beta |f(\varphi(u))|\,\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} |f(t)|\,dt\,.$$

Comme tout segment $[A, B]$ de (a, b) se réalise sous la forme $[A, B] = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ (du fait des hypothèses sur φ), on a l'égalité (dans $[0, +\infty]$) des deux quantités

$$\sup_{[\alpha,\beta]\subset(c,d)} \int_\alpha^\beta |f(\varphi(u))|\,|\varphi'(u)|\,du$$

et

$$\sup_{[A,B]\subset(a,b)} \int_A^B |f(t)|\,dt\,;$$

ces deux nombres sont finis tous les deux ou infinis tous les deux. Ceci montre que la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{(c,d)} f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du$$

équivaut à celle de l'intégrale impropre

$$\int_{(a,b)} f(t)\,dt\,.$$

Si ces intégrales impropres sont toutes les deux convergentes, la formule de changement de variable dans les primitives montrent qu'elles sont égales, ce que l'on voulait. $\diamondsuit$

Exemple 2.6. L'intégrale impropre

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

est convergente si et seulement si $\operatorname{Re} z - 1 > -1$, c'est-à-dire si $\operatorname{Re} z > 0$ (exemples 2.1) ; le seul problème est en effet sur $]0,1]$ car sur $[1,+\infty[$, on a $|t^{-z}|e^{-t} \le e^{-t/2}$ pour t assez grand et le critère de comparaison s'applique). En posant

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Re} z > 0\}\,,\ \Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\,,$$

on obtient une fonction très importante, la fonction Γ ; on vérifiera que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \ge 1$ et que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (on fera une intégration par parties sur les intégrales entre ϵ et x puis l'on fera tendre ϵ vers 0 et x vers $+\infty$). Ceci montre que la fonction $t \to \Gamma(t+1)$ est candidate à interpoler sur $]0,+\infty[$ la fonction factorielle définie seulement sur les entiers positifs ; ceci explique son rôle majeur en combinatoire ou en probabilités. Si l'on effectue le changement de variables strictement croissant $u \to t = \exp u$ qui transforme $\mathbb{R}$ en $]0,+\infty[$, on voit que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{u(z-1)}e^{-e^u}e^u\,du = \int_{\mathbb{R}} e^{zu-e^u}\,du$$

est convergente si et seulement si $\operatorname{Re} z > 0$.

Pour s'amuser un peu ! Considérons l'intégrale

$$I := \int_{]0,+\infty[} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)}\,.$$

C'est une intégrale convergente car au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t^\pi)} \le \frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

et que l'on sait que l'intégrale sur $[1,+\infty[$ de $t \longmapsto 1/t^2$ est convergente (intégrale de type Riemann). Au voisinage de 0, il n'y a pas de problème car la fonction est continue. Découpons cette intégrale en

$$I = \int_{]0,1]} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)} + \int_{[1,+\infty[} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)}$$

et faisons le changement de variables $t = \varphi(u) = 1/u$ bijectif de $]0,1]$ dans $[1,+\infty[$ dans la seconde intégrale ; on trouve

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)} = \int_{]0,1]} \frac{u^\pi\,du}{(1+u^2)(1+u^\pi)} = \int_{]0,1]} \frac{t^\pi\,dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)}\,.$$

En ajoutant avec la première, on trouve

$$I = \int_{]0,1]} \frac{1+t^\pi}{1+t^\pi} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{]0,1]} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ce qui est miraculeux est que l'on aurait pu remplacer le nombre π par n'importe quel nombre strictement positif ! Surprenant, non ?

Concernant les intégrales semi-convergentes, on se contentera d'énoncer le résultat suivant, conséquence, une fois encore, de la formule de changement de variable dans les primitives :

Proposition 2.4 *Soit φ une application de classe C^1 de $[c,d[$ dans $[a,b[$ (donc $\varphi(c) = a$) et f une fonction définie sur $[a,b[$, à valeurs complexes, continue par morceaux sur tout segment de $[a,b[$. On suppose de plus que*

$$\lim_{x \to d_-} \varphi(x) = b\,.$$

Alors, si l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)dt$$

est semi-convergente, il en est de même de l'intégrale impropre

$$\int_c^d f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

et l'on a l'égalité

$$\int_a^b f(t)dt = \int_c^d f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du\,.$$

Si de plus φ est supposée bijective entre $[c,d[$ et $[a,b[$ (ce qui revient à dire strictement croissante), les deux intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ sont semi-convergentes ou non en même temps et égales en cas de semi-convergence.

Preuve. Il suffit de s'appuyer sur la définition de semi-convergence d'une intégrale impropre. Prouvons la première assertion de la proposition : si $x \in [c,d[$, on a

$$\int_c^x f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\,;$$

si x tend vers d, $\varphi(x)$ tend vers b et la semi-intégrabilité de l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

implique l'existence de la limite (vers ce nombre) de

$$x \longmapsto \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\,,$$

donc le résultat voulu. On laisse la seconde (le cas où φ est de plus monotone croissante) en exercice. $\diamondsuit$

2.5 L'intégrale curviligne sur un chemin C^1 par morceaux du plan

2.5.1 Chemins paramétrés du plan $\mathbb{R}^2$

Un *chemin paramétré C^1 par morceaux* γ de $\mathbb{R}^2$ est par définition une application C^1 par morceaux γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe une subdivision $a_0 = a < t_1 < \cdots < a_N = b$ de manière à ce que la restriction de γ à $[a_j, a_{j+1}]$ (pour $j = 0, ..., N-1$) soit une application de classe C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$ (c'est-à-dire se prolonge en une application de classe C^1 dans un intervalle ouvert $]a_j - \epsilon, a_{j+1} + \epsilon[$ un petit peu plus gros). Le *support* d'un tel chemin paramétré C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ est par définition l'ensemble $\gamma([a,b])$.

Attention ici à ne pas mélanger deux concepts ! Un chemin paramétré C^1 par morceaux de $\mathbb{R}^2$ est une application d'un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ tandis que l'ensemble géométrique défini comme l'image du chemin est le *support* de ce chemin. Les chemins $t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{ikt}$, $k = \pm 1, \pm 2, ...,$ *etc.* ont tous même support (le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1) mais ce sont des chemins différents !

Un chemin C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est dit *lacet C^1 par morceaux* si $\gamma(a) = \gamma(b)$, *lacet simple* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et si de plus la restriction de γ à $[a,b[$ est injective. Dans tous les cas, le point $\gamma(a)$ est dit *origine* du chemin paramétré, le point $\gamma(b)$ *extrémité* de ce chemin.

On appelle *paramétrisation* du chemin paramétré C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ toute application C^1 par morceaux $\tilde{\gamma}$ d'un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle qu'il existe une bijection strictement croissante et de classe C^1 φ de $[c,d]$ dans $[a,b]$ avec $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$ (soit $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u))$ pour tout $u \in [c,d]$) et $\varphi' > 0$ sur $]c,d[$.

Deux chemins paramétrés C^1 par morceaux sont équivalents si l'un est une paramétrisation de l'autre et *vice-versa* ; on dispose ainsi d'une relation d'équivalence entre chemins paramétrés C^1 par morceaux dont les classes d'équivalence sont les arcs géométriques C^1 par morceaux orientés.

2.5.2 Intégrale curviligne

Soit $\gamma : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^2$ un chemin paramétré C^1 par morceaux (la subdivision étant donnée par les a_j, $j = 0, ..., N$). Le support du chemin est un sous-ensemble fermé borné du plan (image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une application continue).

Supposons que P et Q soit deux applications continues définie dans le même voisinage du support $\gamma([a,b])$ de γ, à valeurs complexes. Dans le cas particulier où P et Q sont à valeurs réelles, l'interprétation "physique" de $\vec{F} = (P,Q)$ est celle d'un *champ de forces* au voisinage de l'arc géométrique que constitue le support de γ. On conserve cette terminologie même dans le cas où P et Q sont à valeurs complexes. Si de plus $\vec{F} = \operatorname{grad}(U)$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^2$, où U est une fonction de classe C^1 de V dans $\mathbb{C}$, on dit que le champ de forces $\vec{F}$ *dérive du potentiel* U dans V, ou encore *est un champ de gradient.*

Etant donnés γ et $\vec{F} = (P,Q)$ comme ci-dessus, on peut les "accoupler" en définis-

sant *l'intégrale curviligne de* $Pdx + Qdy$ le long de γ, ou encore la *circulation* (ou le *travail*) du champ de forces $\vec{F}$ le long du chemin γ comme étant l'expression

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \Big(P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t) \Big)\, dt\,. \tag{2.4}$$

Fait essentiel, conséquence de la formule de changement de variable pour les primitives : l'expression (2.4) reste inchangée si l'on remplace γ par une autre paramétrisation du même chemin paramétré ; on se convaincra de ce résultat en le prouvant dans un cas particulier (auquel il est immédiat de se ramener en subdivisant les intervalles), celui où $\gamma \ : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $\tilde{\gamma} \ : [c,d] \longmapsto \mathbb{R}^2$ sont deux paramétrisations de C^1 d'un même chemin, telles qu'il existe une application de classe C^1 $\varphi \ : [c,d] \longmapsto [a,b]$ avec $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$; dans ce cas en effet

$$\int_c^d \Big(P(\tilde{\gamma}(u))\tilde{\gamma}_1'(u) + Q(\tilde{\gamma}(u))\tilde{\gamma}_2'(u) \Big)\, du = \int_a^b \Big(P(\gamma(t)))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t) \Big)\, dt$$

(on pose $t = \varphi(u)$ et on applique la formule de changement de variables dans les primitives). Conséquence de ce fait : le couplage entre chemins paramétrés et champs de forces est en fait un couplage entre arcs géométriques orientés et champs de forces puisque l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy)$$

ne change pas si l'on remplace le chemin paramétré γ par un chemin qui lui est équivalent.

On notera cette expression formellement

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy)\,.$$

Remarque 2.6. Ceux d'entre vous suivant le cours de MAA401 reconnaîtrons avec la notation

$$Pdx + Qdy$$

l'expression de ce que l'on appelle une 1-*forme différentielle* au voisinage du support de γ, c'est-à-dire la donnée, au point courant (x,y) de ce voisinage, d'une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$(h,k) \longmapsto P(x,y)h + Q(x,y)k$$

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Notons que le calcul de

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy)$$

se fait formellement en posant, comme on le ferait dans un raisonnement physique

$$dx = \gamma_1'(t)dt\,,\ dy = \gamma_2'(t)dt\,,$$

la quantité

$$P(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q(\gamma(t))\gamma_2'(t)dt$$

s'interprétant (au moins dans le cas où le champ de forces $\vec{F}$ est réel) comme le produit scalaire du champ au point courant $\gamma(t)$ avec le "déplacement infinitésimal" (dx, dy) au point $\gamma(t)$ lorsque l'on parcourt le chemin γ selon le paramètre t. Le bilan cumulé de tous ces produits scalaires lorsque

le paramètre t parcours $[a, b]$ correspond donc bien effectivement au calcul de travail de champ $\vec{F}$ soumis au point mobile $\gamma(t)$.

Lorsque le champ de forces dérive d'un potentiel U au voisinage du support de γ, le calcul de

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy)$$

est immédiat et l'on obtient

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

dans ce cas. Le chemin γ n'intervient dans l'expression de l'intégrale curviligne où il est impliqué que par le biais de ses deux extrémités (et de rien d'autre).

Exemple 2.7. Par exemple, si

$$(P, Q) = ((x + iy)^n, i(x + iy)^n)\,,$$

le champ $\vec{F}$ dérive (dans $\mathbb{R}^2$ tout entier) du potentiel

$$U(x, y) = \frac{(x + iy)^{n+1}}{n + 1}$$

(on le vérifie tout de suite en calculant les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux deux coordonnées x et y) et l'on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout chemin paramétré C^1 par morceaux γ du plan

$$\int_\gamma (x + iy)^n (dx + idy) = \frac{(\gamma_1(b) + i\gamma_2(b))^{n+1} - (\gamma_1(a) + i\gamma_2(a))^{n+1}}{n + 1}\,.$$

Ceci reste vrai pour $n = -2, -3, ...$ pourvu que le support de γ ne passe pas par le point d'affixe $z = 0$. Par contre le cas $n = -1$ pose manifestement problème : si $\gamma\ : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{it}$, on a

$$\int_\gamma \frac{dx + idy}{x + iy} = 2i\pi \neq 0$$

alors que γ est un lacet ! On verra plus tard que là se cache la notion de résidu et la formule capitale qui l'accompagne.

2.5.3 Un calcul très particulier d'intégrale curviligne

Considérons dans le plan le triangle élémentaire T (plein et fermé) de sommets $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ que l'on appelle aussi 2-simplexe élémentaire (voir la figure 2.6).

$$T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0\,, y \geq 0\,,\ x + y \leq 1\}\,.$$

Considérons un champ de forces $(x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y))$ (P et Q sont à valeurs complexes) défini et de classe C^1 au voisinage de ce triangle plein fermé.

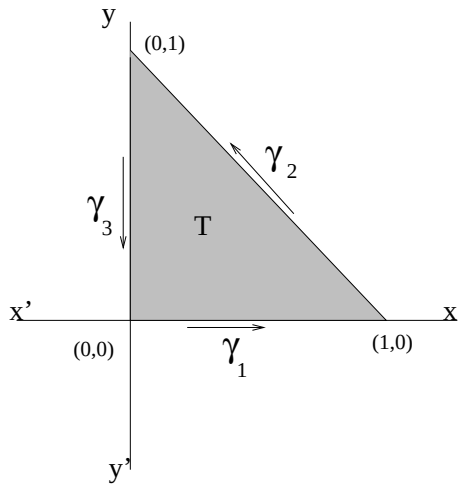

FIG. 2.6 – Un calcul simple (mais fondamental) d'intégrale curviligne

Le calcul de l'intégrale de Pdx sur les chemins paramétrés correspondant aux trois côtés du bord (orientés comme sur la figure) donne respectivement (pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme indiqué sur la figure 2.6)

$$\int_0^1 P(t,0)dt\,, \quad -\int_0^1 P(t,1-t)dt\,, \quad 0$$

et l'on voit que la somme de ces trois nombres vaut

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} P(x,y)dx = -\int_0^1 (P(t,1-t) - P(t,0))dt = -\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \Big)\,dx\,.$$

Le calcul est en tout point semblable lorsque l'on remplace la forme Pdx par la forme Qdy et l'on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\gamma_j} Q(x,y)\,dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \Big)\,dy\,.$$

Si l'on "concatène" les trois chemins paramétrés $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en un chemin paramétré C^1 par morceaux γ (l'arc géométrique orienté correspondant est le bord du triangle pacouru une seule fois dans le sens trigonométrique), on constate la formule suivante :

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \Big)\,dy - \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \Big)\,dx\,.$$

Si F est une fonction continue de deux variables sur le triangle T et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut définir les deux expressions :

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} F(x,y)\,dy \Big)\,dx \tag{$*$}$$

et

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} F(x,y)\,dx \Big)\,dy\,. \tag{$**$}$$

On fera le calcul de ces deux nombres pour une fonction monomiale

$$F(x,y) = x^n y^m$$

et l'on constatera qu'ils sont égaux (ce n'est pas tout-à-fait immédiat, il faut faire l'exercice !).

On admettra que ceci reste vrai pour une fonction continue quelconque F du triangle T à valeurs dans $\mathbb{C}$ (on reviendra au chapitre 3 au problème de l'approximation des fonctions continues à valeurs complexes par des fonctions polynomiales de deux variables à coefficients complexes sur un compact du plan), ce qui nous permet de définir le nombre

$$\iint_T F(x,y)\,dxdy$$

comme étant la valeur commune des deux expressions (admises à ce point du cours comme étant égales)

$$\iint_T F(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} F(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} F(x,y)\,dx\Big)\,dy\,.$$

Ici encore, c'est la théorie de l'intégration (mais cette fois dans le plan et non plus sur la droite) qu'il faudrait invoquer pour éclairer la définition d'une telle "intégrale double", l'égalité des deux expressions $(*)$ et $(**)$ étant en fait un théorème, le théorème de Fubini (ceux qui suivent le cours de MAA401 l'ont rencontré). On ne s'étendra pas plus dans ce cours sur la théorie de l'intégration dans le plan.

Par contre, on retiendra que le calcul que nous venons de faire se résume, une fois admise l'identification de $(*)$ et $(**)$ pour une fonction continue $F\ : T \longmapsto \mathbb{C}$) en la formule

$$\int_{\partial T} (Pdx + Qdy) = \iint_T \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)(x,y)\,dxdy\,,$$

cas particulier d'une formule capitale, la formule de Green-Riemann ; George Green (1793-1841) est un physicien et mathématicien anglais et ce sont ses travaux sur la théorie du potentiel et ses applications à l'électricité et au magnétisme (1828) qui ont fait surgir la formule qu'on lui co-attribue avec Bernhard Riemann.

Remarque 2.7. La formulation "physique" de cette formule est la suivante : la circulation du champ de vecteurs (P,Q) le long du bord de la plaque triangulaire T (parcouru une fois dans le sens trigonométrique) est égale au flux du rotationnel de ce champ de vecteurs à travers cette plaque T (vue cette fois dans l'espace $\mathbb{R}^3$), le flux étant calculé avec la convention que la normale à la plaque pointe dans la direction des $z > 0$. Notons d'ailleurs (et c'est l'idée de Riemann) que, du point de vue du physicien, calculer l'intégrale double

$$\iint_T F(x,y)\,dxdy$$

pour une fonction continue $F\ : T \longmapsto \mathbb{C}$ correspond à faire la somme des quantités infinitésimales

$$F(x,y)\Delta x \times \Delta y$$

lorsque (x,y) parcourt le triangle T, $\Delta x \times \Delta y$ représentant l'"élément de volume" au point courant (x,y). On retrouve là la signification physique de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[\alpha,\beta]$ de l'axe réel, mais transposée cette fois en deux dimensions.

Remarque 2.8. Voici une remarque conceptuellement importante du point de vue mathématique cette fois. Rappelons que le théorème fondamental de l'analyse se ramenait à la formulation suivante : si f est une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$, alors

$$\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)\,. \tag{†}$$

Le "bord" du segment $[0,1]$ est l'ensemble $\{0,1\}$; pour parler de "bord orienté", il faut convenir de marquer positivement l'extrémité (par exemple 1) et négativement l'origine (par exemple 0) ; dans ce cas $f(1) - f(0)$ s'interprète comme l'intégrale sur le bord orienté de $[0,1]$ de la fonction f. Si l'on passe maintenant en dimension 2, ce qui remplace naturellement l'intervalle $[0,1]$ est le triangle T et la formule

$$\iint_T \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)(x,y)\,dxdy = \int_{\partial T} Pdx + Qdy$$

appararaît comme une généralisation naturelle de (†) ; c'est le théorème fondamental de l'analyse en dimension 2 cette fois. On pourrait continuer en dimension 3 et voir surgir ainsi un cas particulier de la formule de Green-Ostrogradski (le triangle devient cette fois le tétraèdre).

2.5.4 Une approche à la formule de Green-Riemann

Soit $(u,v) \to \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ la restriction au triangle T d'une application de classe C^1 au voisinage de T, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; on suppose φ injective sur T et que le jacobien de φ, à savoir

$$\frac{D(\varphi)(u,v)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

reste strictement positif dans T. L'image de T par φ se présente alors comme un triangle "déformé" comme sur la figure 2.7.

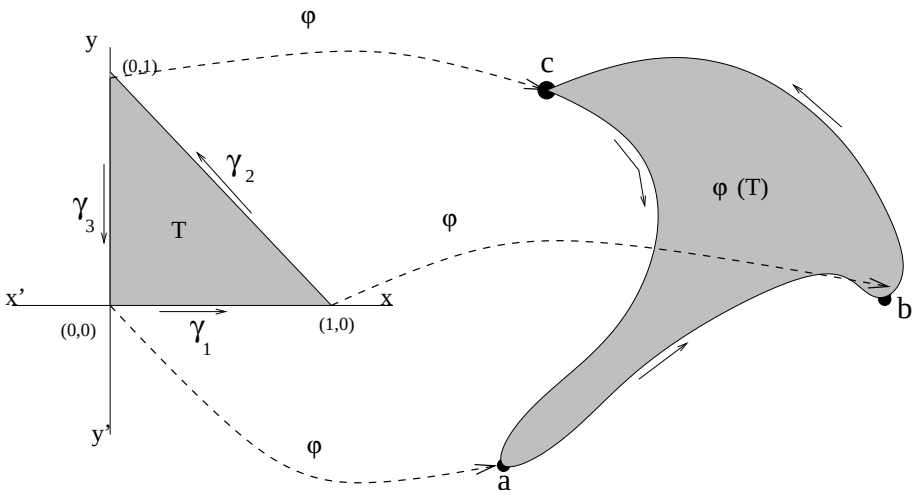

FIG. 2.7 – Image de T par φ

Le pavé infinitésimal $[u - \Delta u/2, u + \Delta u/2] \times [v - \Delta v/2, v + \Delta v/2]$ centré au point courant (u,v) de T est déformé de manière infinitésimale (par la différentielle de φ au point (u,v)) en un parallélogramme centré au point $(x,y) = \varphi(u,v)$ et d'aire

$$\Big[\frac{D(\varphi)(u,v)}{\partial(u,v)}\Big]\,\Delta u \times \Delta v$$

Si F est une fonction continue sur $\varphi(T)$ et à valeurs complexes, un raisonnement de physicien exploitant le changement de variables

$$(x, y) = \varphi(u, v)$$

nous permet d'affirmer que la "somme" lorsque (x, y) parcourt le triangle plein déformé $\varphi(T)$ des nombres

$$F(x, y)\, dx\, dy$$

vaut la somme des

$$F(\varphi(u, v)) \times \Big[\frac{D(\varphi)(u, v)}{\partial(u, v)}\Big] \times du\, dv\,,$$

ce qui fournit (au moins heuristiquement) la formule

$$\int\int_{\varphi(T)} F(x, y)\, dx\, dy = \int\int_T F(\varphi(u, v))\, \frac{D(\varphi)(u, v)}{\partial(u, v)}\, du\, dv\,.$$

En utilisant cette formule et la formule du changement de variable pour les primitives, on voit (pourvu que φ soit C^2) que si $(x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y))$ est un champ de forces au voisinage de $\varphi(T)$ et si $\partial\varphi(T)$ désigne le bord de $\varphi(T)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, alors

$$\begin{aligned}
\int\int_{\varphi(T)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)(x, y)\, dxdy &= \int\int_T \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)(\varphi(u, v))\, \frac{D(\varphi)(u, v)}{\partial(u, v)}\, du\, dv \\
&= \int_{\partial T} (P \circ \varphi)(u, v) d\varphi_1 \\
&\qquad\quad + (Q \circ \varphi)(u, v)\, d\varphi_2 \\
&= \int_{\partial(\varphi(T))} P dx + Q dy
\end{aligned}$$

(pour passer de la première à la seconde ligne, on utilise la formule de Green pour T établie au paragraphe précédent et l'on note $d\varphi_j = (\partial\varphi_i/\partial u)\, du + (\partial\varphi_i/\partial v)\, dv$ pour $i = 1, 2$).

La formule de Green-Riemann est donc encore vraie lorsque T est remplacé par un triangle "déformé".

On en vient maintenant à ce qui sera notre formulation la plus générale de la formule de Green-Riemann ; elle suffira à nos besoins par la suite.

Pour cela on considère un ouvert borné V de $\mathbb{R}^2$ dont le bord est constitué d'une union finie de supports de lacets simples $\gamma_1, ..., \gamma_N$, comme sur la figure 2.8 ci-dessous :

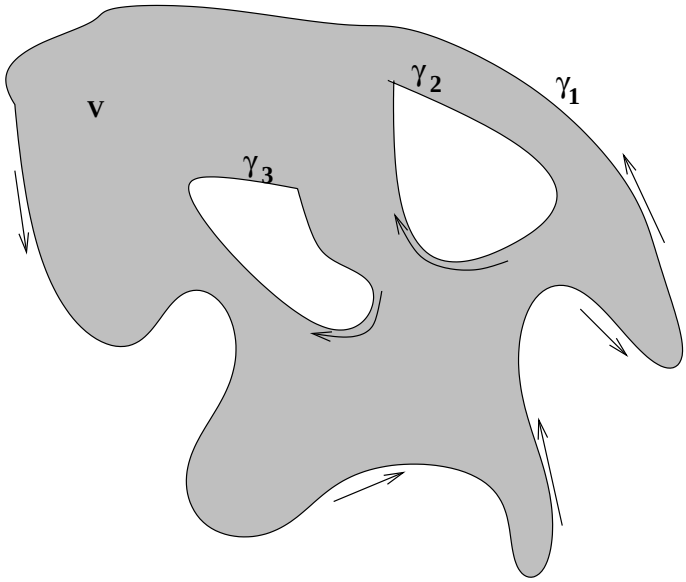

FIG. 2.8 – Un domaine V pour appliquer la formule de Green-Riemann

Les bords $\gamma_1, ..., \gamma_N$ de V peuvent être considérés comme les supports non seulement d'arcs géométriques de classe C^1 par morceaux, mais d'arcs géométriques orientés de classe C^1 par morceaux, en convenant d'une orientation sur chacun d'eux : on décide que chaque arc γ_j est parcouru une seule fois et que tout au long du parcours, l'on tient le domaine V à main gauche (règle du bonhomme d'Ampère). Les lacets correspondant au bord externe sont donc parcourus une fois dans le sens trigonométrique, ceux correspondant au bord interne une fois dans le sens inverse du sens trigonométrique (sens des aiguilles d'une montre). Ce choix d'orientation étant fait, on peut considérer ls lacets $\gamma_1, ..., \gamma_N$ bordant V comme les supports de chemins paramétrés de classe C^1 (que pour simplifier on notera aussi $\gamma_1, ..., \gamma_N$).

Théorème 2.1 (formule de Green-Riemann) *Soit V un ouvert borné comme sur la figure 2.8 et $(x, y) \to (P(x, y), Q(x, y))$ un champ de forces défini et de classe C^1 au voisinage du compact $\overline{V}$ (union de V et de son bord) ; on a la formule*

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} (Pdx + Qdy) = \int\int_{\overline{V}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)(x, y)\, dxdy\,,$$

l'intégrale double d'une fonction F sur $\overline{V}$ étant ici entendue comme la somme des éléments infinitésimaux $F(x, y)\,\Delta x \times \Delta y$, où $\Delta x \times \Delta y$ représente l'aire d'un pavé infinitésimal centré au point courant (x, y) de V. En particulier, si

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$$

sur $\overline{V}$, on a

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} (Pdx + Qdy) = 0\,.$$

Preuve. On admettra que l'on peut "trianguler" comme une mosaïque de triangles déformés le compact $\overline{V}$ comme sur la figure 2.9 ci-dessous (deux triangles T_j d'intersection non vide ont soit en commun un seul point qui est sommet de chacun des triangles, soit en commun une seule arête, entière, qui est arête commune des deux triangles) :

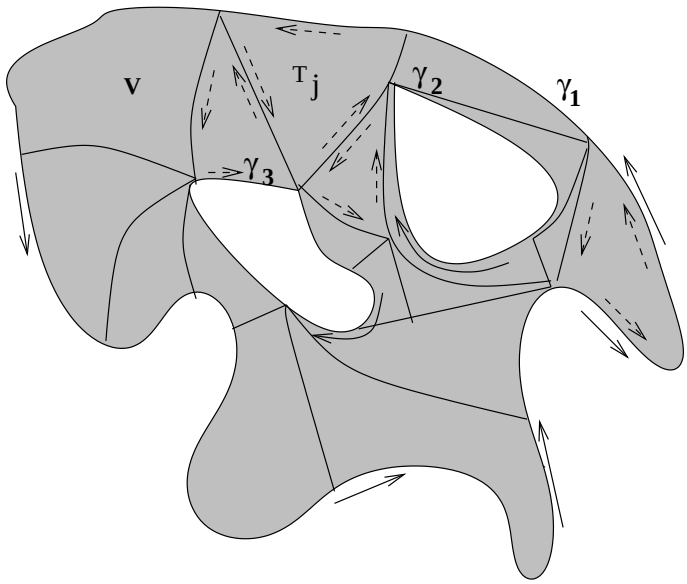

FIG. 2.9 – Le domaine $\overline{V}$ triangulé

L'orientation du bord de $\overline{V}$ induit en cascade des orientations sur les bords des triangles curvilignes T_j, orientations qui sont telles que les orientations sur des arêtes communes à deux triangles T_j se détruisent (voir la figure). La formule de Green-Riemann pour $\overline{V}$ s'obtient alors en ajoutant les formules de Green-Riemann pour les T_j. $\diamondsuit$

On discutera des applications de cette formule au chapitre 5 de ce cours.

Remarque 2.9 (une interprétation physique). Si (P, Q) est considéré comme un champ de forces dans le plan (rapporté au repère orthonormé direct $(0, \vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1))$) au voisinage du domaine plan $\overline{V}$ (que l'on peut voir comme une plaque métallique infiniment mince placée dans le plan $\{z = 0\}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$), le vecteur

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{i} \wedge \vec{j}$$

représente le *rotationnel* du champ de vecteurs $P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\,\vec{i} \wedge \vec{j}$ (considéré comme champ de forces dans $\mathbb{R}^3$, où $\vec{i} \wedge \vec{j} = (0, 0, 1)$). L'intégrale double

$$\iint_{\overline{V}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy$$

peut alors s'interpréter comme le *flux* du rotationnel du champ $P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\,\vec{i} \wedge \vec{j}$ à travers la plaque métallique infiniment fine $\overline{V}$, considérée cette fois comme une surface dans $\mathbb{R}^3$, le flux étant calculé avec la convention que la normale à la plaque est donnée par le vecteur $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Suites, séries de fonctions ; convergence simple, uniforme

3.1.1 Les concepts de suite et série de fonctions

Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$; une *suite de fonctions* définies sur $\mathcal{D}$ est par définition la donnée, pour chaque entier n supérieur ou égal à un certain seuil n_0, d'une fonction f_n de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$; si les fonctions f_n, $n \geq n_0$ sont toutes à valeurs réelles, on dit que la suite est *une suite de fonctions à valeurs réelles*. On notera la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$; il est sous-entendu que toutes les fonctions sont définies sur le même sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemples 3.1. Par exemple, si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique, on rencontrera fréquemment les suites de fonctions $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{C}$) ou $(a_n \cos(n\theta))_{n\geq 0}$, $(a_n \sin(n\theta))_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{R}$) ; la suite de fonctions

$$\left(\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(z-k)}\right)_{n\geq 0}$$

est par exemple une suite de fonctions sur $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$; par contre, si

$$f_n(t) = \log(t-n)\,, \quad t > n\,,$$

on ne saurait prétendre que $(f_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ car il n'y a aucun sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel toutes les fonctions f_n, pour $n \geq n_0$, puissent être définies.

Il est important de souligner que l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ est ordonné et que la donnée d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sous-entend que cet ordre soit pris en compte : il ne faut pas confondre l'ensemble $\{f_n\,;\, n \geq n_0\}$ (ensemble de fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$) et la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$, que l'on peut aussi interpréter, elle, comme une application de $\{n_0, n_0+1, ...\}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})$ des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$:

$$(f_n)_{n\geq n_0} \;:\quad n \geq n_0 \to f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{C})\,.$$

Disposant d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ définies toutes sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut introduire à nouveau le processus de "capitalisation" : on appellera série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ (avec cette notation entre crochets en place de parenthèses) la

suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$S_n(t) := \sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\,, \quad t \in \mathcal{D}\,, n \geq n_0\,.$$

Exemple 3.2. Si l'on considère la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, où

$$f_n(t) := \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z-n-1}\,,$$

la série $[f_n]_{n\geq 0}$ est la suite

$$\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-n-1}\Big)_{n\geq 0}\,.$$

Deux exemples particuliers de séries retiendront notre attention par la suite :

- si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite numérique, la série de fonctions $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ (ici $\mathcal{D} = \mathbb{C}$) est dite <u>*série entière*</u>, le qualificatif "entière" rappelant que $z \to z^n$ est une fonction puissance d'exposant entier ;
- si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites numériques, la série de fonctions (sur $\mathbb{R}$ cette fois)

$$[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]_{n\geq 0} = \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\theta} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\theta}\right]_{n\geq 0}$$

  est dite <u>*série trigonométrique*</u>, le qualificatif "trigonométrique" rappelant que le terme général implique les fonctions trigonométriques cos et sin.

3.1.2 Convergence simple ; convergence uniforme

Considérons deux exemples simples de suites de fonctions sur $\mathbb{R}$:

- soit Δ la fonction "triangle" définie par

$$\Delta(t) = \max(0, 1 - |t|)\ ;$$

  soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \Delta(t-n)\,, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}\,;$$

  le graphe de la fonction f_n se présente, lorsque n augmente, comme une "bosse glissante" se déplaçant vers la droite sans changer d'aspect ; il est clair que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

  (mieux, si t est fixé, tous les nombres $f_n(t)$ sont nuls pour t assez grand) ; en revanche, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \sup|f_n(t)| = 1;$$

- soit, toujours sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions

$$f_n(t) = (g(t))^n$$

  où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sup|g| < 1$; on a encore

$$\forall t \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$$

mais cette fois
$$\sup|f_n| = (\sup|g|)^n \to 0$$
lorsque n tend vers l'infini ; le graphe de f_n s'écrase cette fois de manière uniforme sur l'axe des abscisses lorsque n tend vers l'infini.

Ces deux exemples nous conduisent aux deux concepts de convergence suivant concernant les suites de fonctions le second étant plus fort que le premier :

Définition 3.1 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions sur $\mathcal{D}$ et f une fonction sur $\mathcal{D}$ (toutes les fonctions sont ici à valeurs dans $\mathbb{C}$) ;*

– *on dit que la <u>suite</u> $(f_n)_{n\geq n_0}$ <u>converge simplement</u> vers f sur $\mathcal{D}$ lorsque*
$$\forall t \in \mathcal{D}\,, \quad \lim_{n\infty}(f_n(t) - f(t)) = 0\ ;$$

– *on dit que la <u>suite</u> $(f_n)_{n\geq n_0}$ <u>converge uniformément</u> vers f sur $\mathcal{D}$ lorsque*
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\in\mathcal{D}}|f_n(t) - f(t)|\Big) = 0\ ;$$

Exemple 3.3. Dans nos deux exemples ci-dessus, le premier est un exemple de suite de fonctions convergeant simplement (mais non uniformément !) vers la fonction identiquement nulle (sur $\mathbb{R}$), le second un exemple de suite de fonctions convergeant uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Ces deux concepts se transposent au cadre des séries de fonctions :

Définition 3.2 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions sur $\mathcal{D}$; la <u>série de fonctions</u> $[f_n]_{n\geq 0} = (S_n)_{n\geq n_0}$ est dite <u>converger simplement</u> sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $t \in \mathcal{D}$,*
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\Big)$$
existe ; cette <u>série</u> $[f_n]_{n\geq n_0}$ est dite <u>converger uniformément</u> sur $\mathcal{D}$ s'il existe une fonction $S\ : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ telle que
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{t\in\mathcal{D}}\Big|\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t) - S(t)\Big|\Big) = 0\,.$$

Dans les deux cas, la fonction S définie sur $\mathcal{D}$ par
$$S(t) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=n_0}^{n} f_k(t)\Big) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t)$$
est dite <u>somme</u> de la série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$.

Exemple 3.4. La série de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, où
$$f_n(t) := \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z-n-1}$$
(voir l'exemple 3.2) est simplement convergente et de somme $S(z) = 1/z$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$; en effet
$$\sum_{k=0}^{n} f_k(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-n-1} \to \frac{1}{z}$$

si $n \to \infty$; la convergence de cette même série est uniforme sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$ inclus dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Remarque 3.1. Pour une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs réelles, on peut aussi parler de <u>*convergence uniforme vers* $\pm\infty$</u> ; par exemple une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $+\infty$ si

$$\forall R > 0\,,\ \exists N(R) \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N(R)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ f_n(t) \geq R$$

(on remplace la fin par $f_n(t) \leq -R$ si l'on veut transcrire la convergence uniforme vers $-\infty$).

Pour une suite de fonctions à valeurs complexes, on peut aussi introduire la notion de convergence uniforme vers l'infini. L'infini du plan complexe est à comprendre comme le pôle Nord sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ (de centre $(0,0,0)$), le plan complexe lui-même étant en correspondance avec $\mathbb{S}^2$ privé du pôle Nord *via* la projection stéréographique depuis le pôle Nord, comme sur la figure 3.1 ci-dessous :

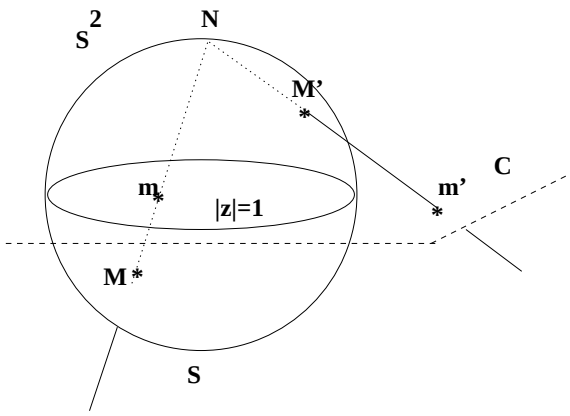

FIG. 3.1 – La projection stéréographique

Dire que la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge vers l'infini (si les f_n sont à valeurs complexes et toutes définies dans un sous-ensemble D de $\mathbb{C}$) uniformément sur D signifie

$$\forall R > 0\,,\ \exists N(R) \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N(R)\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ |f_n(t)| \geq R$$

3.1.3 Les critères de Cauchy (simple et uniforme)

Il est capital de savoir décider la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ sans en connaître *a priori* la limite (ou d'une série de fonctions sans en connaître *a priori* la somme) ; les mêmes remarques valent concernant la convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions. Pour cela, on dispose des deux critères (l'un pour la convergence simple, l'autre uniforme) de Cauchy suivants :

Proposition 3.1 [Critère de Cauchy 1 (convergence simple)] *Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

– *la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est simplement convergente sur $\mathcal{D}$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \exists N(\epsilon, t) \in \mathbb{N}\ t.q\ \forall n, p \geq N(\epsilon, t)\,,\ |f_p(t) - f_n(t)| \leq \epsilon\,; \tag{3.1}$$

– *la série* $[f_n]_{n\geq 0}$ *est simplement convergente sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\,,\ \forall t\in\mathcal{D}\,,\ \exists N(\epsilon,t)\in\mathbb{N}\ \textit{tel que}\\&\qquad\forall p>n\geq N(\epsilon,t),\ \Big|\sum_{k=n+1}^{p} f_k(t)\Big|\leq\epsilon\,;\end{aligned}\tag{3.2}$$

Preuve. Ce premier critère est banal : on écrit, pour chaque $t\in\mathcal{D}$, le critère de Cauchy ($\mathbf{C}_0$) (version "suites numériques") ou ($\mathbf{C}$) (version "séries numériques" de la proposition 1.2) pour la suite $(f_n(t))_{n\geq n_0}$ ou bien la série $[f_n(t)]_{n\geq n_0}$. L'important ici (dans (3.1) ou (3.2)) est l'ordre des quantificateurs (en particulier, $N(\epsilon,t)$ dépend à la fois de ϵ et de t !) $\diamondsuit$

Proposition 3.2 [Critère de Cauchy 2 (cadre uniforme)] *Soit* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *une suite de fonctions sur un sous-ensemble* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*

– *la suite* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est uniformément convergente sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\forall\epsilon>0\,,\ \exists N(\epsilon)\geq n_0\in\mathbb{N}\ t.q\ \forall n,p\geq N(\epsilon)\,,\ \forall t\in\mathcal{D}\,,\ |f_p(t)-f_n(t)|\leq\epsilon\,;\tag{3.3}$$

– *la série* $[f_n]_{n\geq 0}$ *est uniformément convergente sur* $\mathcal{D}$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned}&\forall\epsilon>0\,,\ \exists N(\epsilon)\geq n_0\ \textit{tel que}\\&\qquad\forall p>n\geq N(\epsilon),\ \forall t\in\mathcal{D}\,,\ \Big|f_{n+1}(t)+\cdots+f_p(t)\Big|\leq\epsilon\,;\end{aligned}\tag{3.4}$$

Preuve. La seconde assertion n'est que la transcription de la première du cadre des suites à celui des séries. Écrire cette seconde assertion revient à écrire la première en remplaçant f_n par

$$\sum_{k=n_0}^{n} f_k\,;$$

on se contentera donc de prouver la première assertion.

Si f_n converge uniformément vers f, alors, pour n et p assez grands,

$$\forall t\in\mathcal{D}\,,\ |f_n(t)-f_p(t)|\leq|f(t)-f_p(t)|+|f(t)-f_n(t)|\leq\epsilon\,;$$

c'est donc bien gagné pour la preuve du "*et seulement si*".

Prouvons le "*si*". Il est clair que (3.3) implique (3.1) ; la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathcal{D}$ si (3.1) est remplie (c'est la proposition 3.1). Il suffit maintenant dans (3.3) de "geler" n et de faire courir p vers l'infini ; on a

$$\forall n\geq N(\epsilon)\,,\ \forall t\in\mathcal{D}\,,\ |f_n(t)-f(t)|\leq\epsilon\,,$$

ce qui signifie que $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers f quand $n\to\infty$. $\diamondsuit$

3.1.4 Convergence normale d'une série de fonctions

Très souvent dans la pratique, se trouve vérifiée pour une série de fonctions une contrainte de nature plus forte que l'uniforme convergence ; c'est la contrainte de <u>normale convergence</u> :

Définition 3.3 *Une série $[f_n]_{n\geq n_0}$ de fonctions sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes est <u>normalement convergente</u> (sur $\mathcal{D}$) si et seulement si il existe une série numérique positive $[w_n]_{n\geq n_1}$ <u>convergente</u> (dite <u>chapeau majorant</u>) telle que :*

$$\forall t \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \geq \max(n_0, n_1)\,,\ |f_n(t)| \leq w_n\,. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2. Bien sûr, s'il existe un chapeau majorant $[w_n]_{n\geq n_1}$, la série

$$\Big[\sup_{t\in\mathcal{D}} |f_n(t)|\Big]_{n\geq n_0}$$

en est aussi un (c'est même le plus petit possible) ; cependant, on préfère laisser la formulation sous la forme (3.5) qui s'accorde le mieux avec la théorie de l'intégration (mêlant indifféremment les points de vue discret et continu) au sens de Lebesgue. Ceux qui suivent le cours de MAA401 feront, en transposant le cadre de la sommabilité en n à celui de l'intégratibilité en une variable x (jouant cette fois dans le cadre continu le rôle de la variable discrète n), le parallèle avec la clause "de domination" sous laquelle s'applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les intégrales dépendant d'un paramètre t, du type

$$\int_A F(t,x)\,dx\,,$$

à savoir : *il existe une fonction intégrable $x \to w(x)$ indépendante du paramètre t telle que l'on ait $|f(t,x)| \leq w(x)$ pour presque tout x dans A et tout t dans $\mathcal{D}$.*

Voici maintenant le résultat fondamental :

Théorème 3.1 *Toute série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ (à valeurs complexes) sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur $\mathcal{D}$ est automatiquement uniformément convergente sur $\mathcal{D}$. La réciproque est fausse.*

Preuve. On applique simplement le critère de Cauchy uniforme ; pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N(\epsilon) \geq \max(n_0, n_1)$ tel que

$$\forall p > n \geq N(\epsilon)\,,\ \sum_{k=n+1}^{p} w_k \leq \epsilon\,;$$

par conséquent, toujours pour un tel choix de $N(\epsilon)$, on a, pour $p > n \geq N(\epsilon)$,

$$\sup_{t\in\mathcal{D}} \left| \sum_{k=n+1}^{p} f_k(t) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \sup_{t\in\mathcal{D}} |f_k(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{p} w_k \leq \epsilon\ ;$$

l'assertion (3.4) est donc satisfaite et le critère de Cauchy uniforme relatif aux séries est rempli ; la série $[f_n]_{n\geq n_0}$ converge donc uniformément sur $\mathcal{D}$.

La réciproque du théorème est fausse puisqu'il existe des séries numériques $[u_n]_{n\geq n_0}$ convergentes non absolument convergentes ; on prend pour f_n la fonction constante égale justement à u_n : pour une telle série $[u_n]_{n\geq n_0}$, il y convergence uniforme de la série $[f_n]_{n\geq n_0}$, mais non convergence normale de la série $[f_n]_{n\geq n_0}$.

Le théorème est complètement démontré. $\diamondsuit$

Exemples 3.4. (liste d'exemples très importants)

– si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes, alors la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur tout disque $\overline{D(0,r)}$, avec

$$r < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \leq +\infty\,;$$

en effet, on peut prendre comme chapeau majorant la série $[w_n]_{n\geq 0}$ avec

$$w_n := |a_n| r^n$$

cette série converge d'après la règle de Cauchy (proposition 1.3) ;

– si $[a_n]_{n\geq 0}$ et $[b_n]_{n\geq 0}$ sont des séries absolument convergentes, la série trigonométrique

$$\Big[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\Big]_{n\geq 0}$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; on prend comme chapeau majorant

$$[|a_n| + |b_n|]_{n\geq 0}\,;$$

– la série de fonctions $[n^{-z}]_{n\geq 1}$ est normalement convergente dans tout demi-plan $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z \geq x\}$ lorsque $x > 1$; en effet, on peut prendre comme chapeau majorant

$$[n^{-x}]_{n\geq 1}$$

qui est une série de Riemann convergente (voir l'exemple 1.3).

3.1.5 Régularité des fonctions et passage à la limite

Savoir si la régularité des fonctions (continuité, dérivabilité) se propage lorsque l'on passe à la limite (au niveau des suites de fonctions) est un problème crucial ; en ce sens, la convergence simple ne s'avère pas suffisamment robuste, ne serait-ce qu'au niveau de la continuité (c'est le cran zéro de régularité que l'on peut exiger). En voici avec l'exemple 3.5 ci-dessous une preuve :

Exemple 3.5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définies par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt \text{ si } t \in [0, 1/n] \\ 0 \text{ si } t \in]1/n, 1]\,; \end{cases}$$

ces fonctions sont toutes continues sur $[0,1]$; la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } t \in]0, 1]\,; \end{cases}$$

qui, elle, n'est manifestement pas continue sur $[0,1]$ (il y a une discontinuité en $t = 0$).

Nous allons voir cependant que la convergence uniforme implique la propagation à la limite de la continuité : on rappelle que si f est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dire qu'elle est continue en un point t_0 de $\mathcal{D}$ revient à énoncer le critère suivant :

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \eta = \eta(\epsilon, t_0) \text{ tel que } \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \Big(|t - t_0| < \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon\Big)\,.$$

Ceci étant posé, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et t_0 un point de $\mathcal{D}$; on suppose que la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f ; on suppose aussi que la convergence de la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f est <u>uniforme</u> sur $\mathcal{D}\cap\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t-t_0|\leq\eta_0\}$ pour un certain $\eta_0>0$ (<u>la convergence est uniforme sur $\mathcal{D}$ au moins "près" de t_0</u>). On suppose aussi que toutes les fonctions f_n (au moins pour n assez grand) sont continues en t_0. Alors la fonction f est continue en t_0.*

Remarque 3.3. Bien que le résultat de la proposition soit plus précis, on pourrait dire pour la mémoriser que <u>*toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue*</u>. C'est sans doute ainsi qu'il convient de la retenir en se souvenant toutefois que la continuité est une propriété <u>locale</u> qu'il suffit donc de vérifier <u>localement</u> ! Si l'on veut vérifier qu'une fonction f est continue en un point t_0, on se fiche royalement de tout se qui peut se passer à quelque distance strictement positive (mais arbitraire) de t_0 (par exemple, ce qui se passe pour $f(t)$ lorsque $|t-t_0|>\eta_0$ nous importe peu).

Preuve. La preuve est très simple. Donnons nous $\epsilon>0$; on sait que, si n est assez grand ($n\geq N(\epsilon)$), alors :

$$\forall\, t\in\mathcal{D}\cap\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t-t_0|\leq\eta_0\}\,,\ |f_n(t)-f(t)|\leq\epsilon/3$$

(ceci résulte de l'hypothèse de convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f sur $\mathcal{D}\cap\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t-t_0|\leq\eta_0\}$) ; en particulier, on a

$$\forall\, t\in\mathcal{D}\cap\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t-t_0|\leq\eta_0\}\,,\ |f_n(t_0)-f(t_0)|+|f_n(t)-f(t)|\leq 2\epsilon/3\,;$$

on a donc aussi, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
&\forall\, t\in\mathcal{D}\cap\{t\in\mathbb{C}\,;\,|t-t_0|\leq\eta_0\}\,,\\
|f(t)-f(t_0)| &\leq |f(t)-f_{N(\epsilon)}(t)|+|f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)|+|f_{N(\epsilon)}(t_0)-f(t_0)|\\
&\leq \frac{2\epsilon}{3}+|f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)|\,;
\end{aligned}$$

mais la fonction $f_{N(\epsilon)}$ est continue au point t_0 (quitte à choisir $N(\epsilon)$ assez grand) ; par conséquent

$$\exists\eta(\epsilon,t_0)<\eta_0\,,\ \text{tel que}\ \forall t\in\mathcal{D}\,,\ \Big(|t-t_0|<\eta(\epsilon,t_0)\Longrightarrow|f_{N(\epsilon)}(t)-f_{N(\epsilon)}(t_0)|\leq\frac{\epsilon}{3}\Big)\,;$$

au bilan final, on a donc :

$$\forall t\in\mathcal{D}\,,\ \Big(|t-t_0|<\eta(\epsilon,t_0)\Longrightarrow|f(t)-f(t_0)|\leq\frac{\epsilon}{3}+\frac{2\epsilon}{3}=\epsilon\Big)\,.$$

La continuité de f en t_0 est ainsi prouvée. $\diamondsuit$

Cette proposition, combinée avec la proposition 3.2 ou le théorème 3.1, a pour conséquence très utile le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions <u>continues</u>, à valeurs complexes, sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ("continue sur $\mathcal{D}$" signifiant ici pour une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ "continue en tout point de $\mathcal{D}$") ; alors*

– *si la* <u>*suite*</u> $(f_n)_{n\geq n_0}$ *se plie au* <u>*critère de Cauchy uniforme*</u> *pour les suites de fonctions (clause* (3.3) *dans l'énoncé de la proposition* 3.2*), alors cette suite* $(f_n)_{n\geq n_0}$ <u>*converge uniformément sur* $\mathcal{D}$ *vers une fonction continue*</u> *sur* $\mathcal{D}$ *;*
– *si la* <u>*série*</u> $[f_n]_{n\geq n_0}$ *se plie au critère au* <u>*critère de Cauchy uniforme*</u> *pour les séries de fonctions (clause (*3.4*) dans l'énoncé de la proposition* 3.2*), alors* <u>*la somme*</u>

$$F \ : \ t \in \mathcal{D} \to \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n(t)$$

<u>*est aussi une fonction continue sur* $\mathcal{D}$</u> *;*
– *enfin, si la* <u>*série*</u> $[f_n]_{n\geq n_0}$ *est* <u>*normalement convergente sur* $\mathcal{D}$</u>*, la somme*

$$F \ : \ t \in \mathcal{D} \to \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n(t)$$

<u>*est encore une fonction continue sur* $\mathcal{D}$</u>*.*

Remarque 3.4. C'est surtout le troisième item de ce corollaire qui est le plus fréquemment utilisé sous la forme : *la somme d'une série de fonctions continues normalement convergente sur un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^2$ *est encore une fonction continue sur ce sous-ensemble*, étant entendu que la continuité est une propriété locale et qu'il suffit donc de vérifier la convergence normale, pour chaque point t_0 de $\mathcal{D}$, dans un sous-ensemble du type $\mathcal{D}\cap\{t \in \mathbb{C}\,;\, |t-t_0| \leq \eta_0(t_0)\}$, avec $\eta_0(t_0) > 0$.

Exemple 3.6. Considérons une fonction très importante du point de vue des liens entre l'arithmétique et l'analyse, la fonction zéta de Riemann définie dans $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$ par

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-z \log k)\,; \tag{†}$$

cette série converge bien si z est un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à 1 en vertu du critère de Riemann (exemple 1.3). De plus, si $a > 1$, on a

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z \geq a\}\,,\ \forall k \geq 1\,,\ |k^{-z}| = \exp(-\mathrm{Re}\, z \log k) \leq \frac{1}{k^a}$$

et la série (†) converge donc normalement sur tout demi-plan fermé $\{\mathrm{Re}\, z \geq a\}$, avec $a > 1$. Le corollaire 3.1 (volet 3) s'applique donc et la fonction ζ est une fonction continue dans son domaine de définition $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$. Ce qui explique l'importance d'une telle fonction tient à la formule

$$\zeta(z) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} \tag{††}$$

(on l'admettra ici) attribuée au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), où la suite $(p_k)_k$ désigne la suite des nombres premiers. Toute information intéressante sur ζ rejaillit en une information intéressante sur la répartition des nombres premiers. Quant à la formule d'Euler (††) elle-même, c'est juste la traduction en termes d'analyse du théorème fondamental de l'arithmétique : tout entier positif se factorise de manière unique avec des puissances de nombres premiers.

En ce qui concerne le cran suivant de régularité (à savoir la dérivabilité) pour les fonctions définies cette fois sur un intervalle de $\mathbb{R}$, elle ne se propage en général pas par convergence uniforme (au contraire de la continuité).

Exemples 3.7. Voici quelques exemples significatifs de suites de fonctions où l'on voit manifestement que la dérivabilité ne se propage pas par convergence uniforme :
– la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$, où

$$f_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nt)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ car $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(t)| = 1/\sqrt{n}$; par contre

$$f_n'(t) = \sqrt{n}\cos(nt)$$

et l'on voit que la suite $(f_n'(t))_{n\geq 1}$ ne converge en fait en aucun point $t = t_0$ de l'axe réel : pour le voir, on distinguera le cas où $t_0/\pi \in \mathbb{Q}$ et $t_0/\pi \notin \mathbb{Q}$; dans le premier cas la suite $(\cos(nt_0))_{n\geq 1}$ prend une infinité de fois un nombre fini de valeurs dont une non nulle, dans le second cas l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(nt_0))_{n\geq 1}$ est $[-1, 1]$;

– la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) := \int_0^t \max\Big(0, 1 - n|t|\Big)dt$$

est une suite de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est une primitive de la fonction continue

$$t \in \mathbb{R} \to \max\Big(0, 1 - n|t|\Big) \ ;$$

cette fois la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ converge vers la fonction g définie par

$$g(t) \ := \begin{cases} 1 \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(voir l'exemple 3.5) ; on a pourtant

$$\left| \int_0^t \max\Big(0, 1 - n|t|\Big)dt \right| \leq \int_{-1}^1 \max\Big(0, 1 - |n|t\Big)dt = \frac{1}{n} \, ,$$

ce qui implique que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle ; mais la suite $(f_n')_{n\geq 1}$ (qui converge, elle, simplement) ne converge pas vers la dérivée de la fonction nulle (c'est-à-dire la fonction nulle elle-même) !

– il existe des séries de fonctions intéressantes car elles introduisent des structures <u>*fractales*</u> ; tel est le cas par exemple des séries de fonctions $[f_n]_{n\geq 0}$ (de Weierstrass) ou $[g_n]_{n\geq 1}$ (de Riemann) sur $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{\cos((1+2\epsilon)^n t)}{(1+\epsilon)^n} \, , \qquad \epsilon > 0 \\ g_n(t) &= \frac{\sin(2\pi n^2 t)}{n^2} \ ; \end{aligned}$$

ces deux séries de fonctions sont des séries de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui convergent (on le vérifie immédiatement) normalement sur $\mathbb{R}$; les deux fonctions

$$\begin{aligned} F \ : \ t \to \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((1+2\epsilon)^k t)}{(1+\epsilon)^k} \\ G \ : \ t \to \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k^2 t)}{k^2} \end{aligned}$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (d'après le corollaire 3.1) ; sur la figure 3.2, on a par exemple représenté le graphe de la fonction G sur $[0, 1]$; il s'agit d'une fonction continue certes, mais présentant des irrégularités en tout point (le graphe, si on l'examinait à la loupe, se présenterait comme un cactus hérissé partout de piquants, figure se reproduisant à l'infini au fur et à mesure qu'on augmente le grossissement de la loupe) ; une telle structure est une structure <u>*fractale*</u> : la fonction G est continue, 1-périodique, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$! Le flocon de neige est un exemple concret de structure fractale dans la nature, le découpage de côtes volcaniques telle celle du Gröendland aussi... La même remarque vaudrait pour le graphe de la somme des séries de Weierstrass du type $[f_n]_{n\geq 0}$ que l'on pourra en exercice avec une calculette s'entraîner à tracer pour des choix particuliers de ϵ.

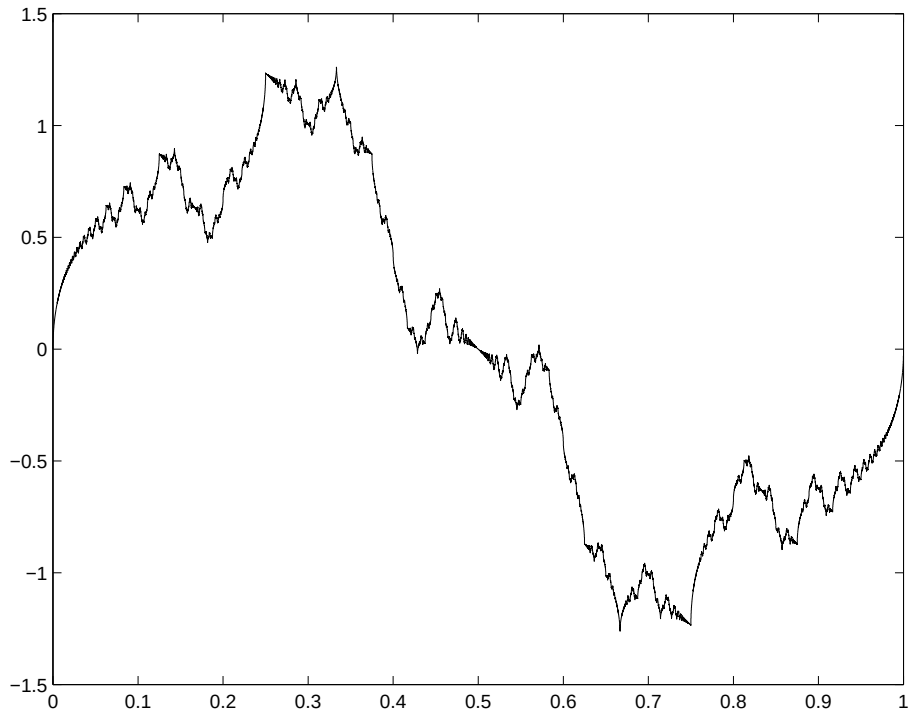

FIG. 3.2 – Le graphe de la fonction de Riemann

Cependant, voici un résultat positif concernant la propagation à la limite de la dérivabilité d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$:

Théorème 3.3 *Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, toutes de classe C^1 sur I (dire qu'une fonction à valeurs complexes est de classe C^1 sur I signifie que sa partie réelle et sa partie imaginaires sont des fonctions dérivables, et de dérivées continue, sur I). On suppose deux choses :*

- **1.** *que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction g et que la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n\geq n_0}$ converge.*

Alors la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge (uniformément sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de I) vers une fonction f, de classe C^1 sur I, et telle que $f' = g$ sur I.

Preuve. On peut bien sûr supposer que les fonctions f_n, $n \geq n_0$, sont toutes à valeurs réelles (on raisonne ensuite avec les deux suites $(\mathrm{Re}\, f_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{Im}\, f_n)_{n\geq n_0}$ qui satisfont toutes les deux les conditions du théorème). Remarquons d'abord que le théorème 3.2 implique que la fonction g, qui est sur tout $[\alpha, \beta] \subset I$ limite uniforme de la suite $(f'_n)_{n\geq n_0}$ formée de fonctions continues, est aussi continue sur I. On remarque ensuite simplement que, puisque f_n est une primitive de la fonction continue f'_n, alors, pour tout $t \in I$,

$$f_n(t) - f_n(t_0) = \int_{t_0}^{t} f'_n(s)ds = \int_{t_0}^{t} (f'_n(s) - g(s))ds + \int_{t_0}^{t} g(s)ds\,. \tag{3.6}$$

Mais l'on sait que

$$\left|\int_{t_0}^{t}(f_n'(s)-g(s))\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t}|f_n'(s)-g(s)|ds \leq |t-t_0| \sup_{s\in[t_0,t]}|f_n'(s)-g(s)|$$

(car les fonctions $s \to |f_n'(s)-g(s)| \pm (f_n'(s)-g(s))$ sont continues positives sur $[t_0,t]$ et que l'intégrale d'une fonction continue positive est positive). Mais l'hypothèse **1** implique la convergence uniforme de g_n' vers g sur $[t_0,t]$, et l'on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{t_0}^{t}(f_n'(s)-g(s))\,ds\right| \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[t_0,t]}|f_n'(s)-g(s)| = 0\,.$$

Comme d'après l'hypothèse **2** la suite $(f_n(t_0))_{n\geq n_0}$ converge vers une limite l, on a, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3.6),

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = l + \int_{t_0}^{t} g(s)ds\,,$$

la convergence étant d'ailleurs uniforme sur tout intervalle $[\alpha,\beta]$ inclus dans I. La fonction

$$f\ : t \in I \to l + \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

est bien une primitive de g sur I et le théorème est ainsi démontré. $\diamondsuit$

Concernant les séries de fonctions, on peut énoncer l'important théorème suivant bien utile :

Théorème 3.4 *Soit $[f_n]_{n\geq n_0}$ une série de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, toutes de classe C^1 sur I. On suppose deux choses concernant la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles :*

- **1.** *que la suite $(S_n')_{n\geq n_0}$ des dérivées de ces sommes partielles S_n converge simplement sur I vers une fonction G et que la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(S_n(t_0))_{n\geq n_0}$ converge.*

Alors la série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ est convergente sur I (uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de I) et la somme de cette série est une fonction de classe C^1 sur I, se pliant à la règle de dérivation terme à terme :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t)\right) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'(t) = G(t). \tag{3.7}$$

Un cas très important où ce théorème s'applique mérite à lui seul un énoncé à part :

Théorème 3.5 *Soit $[f_n]_{n\geq n_0}$ une série de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, toutes de classe C^1 sur I. On suppose deux choses :*

- **1.** *que la série des dérivées $[f_n']_{n\geq n_0}$ converge normalement sur tout segment $[\alpha,\beta]$ inclus dans l'intervalle I ;*
- **2.** *qu'il existe un point $t_0 \in I$ tel que la suite $(S_n(t_0))_{n\geq n_0}$ des sommes partielles de la série numérique $[f_n(t_0)]_{n\geq n_0}$ converge.*

Alors la série de fonctions $[f_n]_{n\geq n_0}$ est convergente sur I (uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de I) et la somme de cette série est une fonction de classe C^1 sur I, se pliant encore à la règle de <u>dérivation terme à terme</u> :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} f_k(t)\right) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k'(t)\,.$$

Exemple 3.8. On verra immédiatement que le théorème 3.5 ne s'applique pas pour les fonctions de Riemann ou Weierstrass introduites dans les exemples 3.7 (essayer de dériver terme à terme et constater ce qui ce passe pour la série des dérivées).

Exemple 3.9.

– Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \exists C_n>0 \text{ telle que } \forall k\in\mathbb{N}\,,\ |a_k|+|b_k|\leq \frac{C_n}{(1+k)^n}\,;$$

alors la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to\sum_{k=0}^{\infty}\Big(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta)\Big)$$

(cette série est bien convergente car absolument convergente pour toute valeur de θ) est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $2p$-ième la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to(-1)^p\sum_{k=0}^{\infty}k^{2p}(a_k\cos(k\theta)+b_k\sin(k\theta))$$

et de dérivée $2p+1$-ième la fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\to(-1)^p\sum_{k=0}^{n}k^{2p+1}\Big(b_k\cos(k\theta)-a_k\sin(k\theta)\Big)\,;$$

– la fonction ζ de Riemann

$$t>1\to\zeta(t):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^t}=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-t\log k}$$

est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, de dérivée

$$t\to-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^t}$$

puisque, si $[\alpha,\beta]\subset]1,+\infty[$,

$$\max_{t\in[\alpha,\beta]}\left|\frac{\log k}{k^t}\right|\leq\frac{\log k}{k^\alpha}$$

et que $[\log k/k^\alpha]_{k\geq 1}$ est une série convergente.

3.2 Suites de fonctions et intégration

3.2.1 Intégration discrète

Une suite numérique $(u_k)_{k\geq k_0}$ peut être considérée comme une fonction de l'ensemble $\mathcal{D} := \{k_0, k_0+1, ...\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$; si la série $[u_k]_{k\geq k_0}$ est convergente, la somme

$$U := \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k$$

(qui correspond au calcul du bilan capitalisé de la suite $(u_k)_{k\geq k_0}$) peut être assimilée à l'intégrale (au sens de l'intégration discrète sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$) de la fonction

$$u \ : k \to u_k \, .$$

C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous noterons cette somme U plutôt que S (par analogie avec le fait que la primitive d'une fonction f est en général notée F). Plutôt que de se donner juste une fonction u sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$, on peut se donner une suite de fonctions $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ sur cet ensemble ; chaque $u^{(n)}$ correspond donc à une suite $(u_k^{(n)})_{k\geq k_0}$; si l'on suppose que chaque série $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ est une série convergente et que la suite $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ vers une fonction $u \ : \{k_0, k_0+1, ...\} \to \mathbb{C}$, on peut naturellement se poser deux questions (liées) :

- la série "limite" $[u_k]_{k\geq k_0}$ est-elle convergente ?
- si oui, a-t'on la formule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} \right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (u_k^{(n)}) = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k \ ?$$

Ce délicat problème est un cas particulier du problème <u>*d'interversion de limites*</u> (souvent subtil en général) : peut-on écrire (et sous quelles conditions) :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{K\to\infty} \left(\sum_{k=k_0}^{K} u_k^{(n)} \right) \right) = \lim_{K\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=k_0}^{K} u_k^{(n)} \right) \right) \ ?$$

On voit bien, les choses étant écrites ainsi, à quelle interversion de limite on fait allusion. Pour répondre à ces questions, voici au moins un résultat positif bien utile ; on y voit apparaître dans les hypothèses une clause qui n'est pas sans rappeler la clause de "domination" (3.5) inhérente à la définition de la convergence normale.

Théorème 3.6 *Soit $(u_k^{(n)})_{k\geq k_0\,,\,n\geq n_0}$ un tableau d'entrées complexes $u_k^{(n)}$ (on peut par exemple considérer k comme un indice de ligne, n comme un indice de colonne). On suppose deux choses :*

- **1.** *que la suite de fonctions $(u^{(n)})_{n\geq n_0}$ sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ définies par :*

$$u^{(n)} \ : \ k \to u_k^{(n)}$$

converge simplement sur $\{k_0, k_0+1, ...\}$ vers la fonction

$$u \ : k \to u_k = \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)} \, ;$$

– **2.** *qu'il existe une série* $[w_k]_{k\geq k_0}$ *à termes positifs, convergente, et telle que*

$$\forall k \geq k_0\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ |u_k^{(n)}| \leq w_k\,. \tag{3.8}$$

Alors, toutes les séries numériques $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ *pour* $n \geq n_0$*, ainsi que la série* $[u_k]_{k\geq k_0}$*, sont absolument convergentes, donc convergentes, et l'on a la formule autorisant l'interversion de limites :*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)}\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty}(u_k^{(n)}) = \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\,. \tag{3.9}$$

Remarque 3.5. Dans cet énoncé on peut remplacer les nombres complexes $u_k^{(n)}$, $k \geq k_0$, $n \geq n_0$, par des fonctions $f_k^{(n)}$ à valeurs complexes, toutes définies sur un même sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les deux hypothèses à faire sont alors :

– **1'.** que, pour chaque $k \in \{k_0, k_0+1, ...\}$, la suite de fonctions $(f_k^{(n)})_{n\geq n_0}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f_k de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$;
– **2'.** qu'il existe une série $[w_k]_{k\geq k_0}$ à termes positifs, convergente, et telle que

$$\forall k \geq k_0\,,\ \forall t \in \mathcal{D}\,,\ \forall n \geq n_0\,,\ |f_k^{(n)}(t)| \leq w_k\,.$$

La conclusion est qu'alors les séries de fonctions $[f_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ pour $n \geq n_0$, ainsi que $[f_k]_{k\geq k_0}$ sont toutes normalement convergentes sur $\mathcal{D}$ et qu'on a la formule d'interversion de limites :

$$\forall t \in \mathcal{D}\,,\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k^{(n)}(t)\right) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \lim_{n\to\infty}(f_k^{(n)}(t)) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(t)\,. \tag{3.10}$$

Preuve. La convergence absolue des séries $[u_k^{(n)}]_{k\geq k_0}$ pour $n \geq n_0$ résulte des estimations (3.8) et de la convergence de la série à termes positifs $(w_k)_{k\geq k_0}$ (voir le théorème 1.2 du chapitre 1) ; comme on a aussi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$\forall k \geq k_0\,,\ |u_k| \leq w_k\,,$$

on a aussi absolue convergence de la série $[u_k]_{k\geq k_0}$. On écrit, en exploitant à la fois l'inégalité triangulaire et l'hypothèse **2** :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\right| &= \left|\sum_{k=k_0}^{K}(u_k^{(n)} - u_k) + \sum_{k=K+1}^{\infty}(u_k^{(n)} - u_k)\right| \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{K}|u_k^{(n)} - u_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty}(|u_k^{(n)}| + |u_k|) \\
&\leq \sum_{k=k_0}^{K}|u_k^{(n)} - u_k| + 2\sum_{k=K+1}^{\infty} w_k\,;
\end{aligned}$$

si $\epsilon > 0$ et si K est choisi assez grand ($K = K(\epsilon)$), on a donc (puisque la série $[w_k]_{k\geq k_0}$ est convergente)

$$\left|\sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=k_0}^{K(\epsilon)}|u_k^{(n)} - u_k| + \epsilon/2\ ;$$

ce choix de $K = K(\epsilon)$ étant "gelé", on voit, en utilisant cette fois l'hypothèse **1**, qu'il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow \sum_{k=k_0}^{K} |u_k^{(n)} - u_k| \leq \epsilon/2\,;$$

ainsi, si $n \geq N(\epsilon)$, a-t'on

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k^{(n)} - \sum_{k=k_0}^{\infty} u_k \right| \leq \epsilon\,;$$

comme $\epsilon > 0$ était arbitraire, le résultat voulu en résulte. $\diamondsuit$

Exemples 3.10.

– Par exemple, puisque la série $[1/k^2]_{k\geq 1}$ est une série de Riemann convergente, le théorème 3.6 ci dessus assure

$$\lim_{t\to 0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+t^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,;$$

– en revanche, si

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2\,,\ u_k^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_k^{(n)} = 0\,;$$

pourtant, lorsque n est fixé :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)} = 1\,;$$

on voit ici que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(n)}\right) = 1 \neq \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)} = 0\,;$$

dans ce second exemple, la clause (3.8) n'est en fait pas remplie, ce qui explique que la formule d'interversion de limites coince ici !

3.2.2 Intégration continue

Le premier résultat majeur concernant le couplage entre la prise de limite de suites de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et l'intégration de ces fonctions sur $[a,b]$ est le résultat suivant, que nous avons d'ailleurs déjà exploité en prouvant le théorème 3.3 concernant la propagation à la limite de la propriété de dérivabilité :

Théorème 3.7 *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge <u>uniformément</u> sur $[a,b]$ vers une fonction continue f ; alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt\,. \tag{3.11}$$

Preuve. On se ramène au cas où les fonctions f_n, $n \geq n_0$, sont toutes à valeurs réelles, et on utilise le fait que l'intégrale d'une fonction continue positive (ici la fonction $|f - f_n| \pm (f - f_n)$) est positive pour affirmer que

$$\left| \int_a^b (f(t) - f_n(t))dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\, dt \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - f_n(t)|$$

et conclure du fait de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers f. $\diamondsuit$

Remarque 3.6. Le résultat est faux si l'on a seulement convergence simple ; par exemple, soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions sur $[0,1]$ définies ainsi :

$$f_n(t) := \begin{cases} n^2 t \text{ si } t \in [0, 1/(2n)] \\ n - n^2 t \text{ si } t \in [1/(2n), 1/n] \\ 0 \text{ si } t \in [1/n, 1] \ ; \end{cases}$$

on pourra tracer le graphe de cette fonction et examiner comment ce graphe évolue lorsque n tend vers l'infini : ce graphe se présente comme un triangle isocèle T_n de base $[(0,0),(1/n,0)]$ et de sommet le point $(1/(2n), n/2)$; la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 mais

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \text{surface du triangle } \mathrm{T_n} = 1/4\,;$$

on a donc ici

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{4} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} (f_n(t))\, dt = 0\,;$$

c'est bien sûr la convergence uniforme qui ici se trouve être en défaut !

L'hypothèse de convergence uniforme nécessaire pour le théorème 3.7 est évidemment trop contraignante pour des problèmes d'interversion intégrale/passage à limite comme on en rencontre en physique. Il existe des résultats où l'on peut affaiblir cette hypothèse : si par exemple la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction f sur $[a,b]$ et s'il existe une constante M telle que $|f_n(t)| \leq M$ sur $[a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les fonctions f_n, $n \geq 0$ sont dominées uniformément par M en module sur $[a,b]$), alors la conclusion

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

est encore valide. Mais ce résultat est beaucoup plus difficile et il appaîtra au terme de la construction de l'intégration au sens de Lebesgue (quand bien même il ne s'agit que de l'intégration des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a,b]$). Ce résultat sort bien sûr du cadre de ce cours, mais certains d'entre vous l'ayant rencontré dans le cadre du cours de MAA401, nous en mentionnerons ici une version "piétonne", en soulignant qu'il s'agit de la transposition au cadre continu du théorème 3.6. Ce théorème dit "de convergence dominée" s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'intégration développée en 1901 par Henri Lebesgue (1875-1941) ; on l'appelle aussi "théorème de Lebesgue de convergence dominée" :

Théorème 3.8 (version "piétonne" du théorème de convergence dominée) *Soit (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de (a,b) dans $\mathbb{C}$, toutes continues par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de (a,b). On suppose que :*

- **1.** *la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur (a,b) vers une fonction f que l'on suppose elle aussi continue par morceaux sur tout segment $[\alpha,\beta]$ de (a,b) ;*

– **2.** *qu'il existe une fonction $t \in (a,b) \to w(t)$, continue par morceaux sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de (a,b), intégrable sur (a,b), et telle que*

$$\forall t \in (a,b)\,, \forall n \geq 0\,,\ |f_n(t)| \leq w(t)\,.$$

Alors, toutes les fonctions f_n, $n \geq 0$, ainsi que la fonction f, sont intégrables sur (a,b) et l'on a de plus

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

On **admettra** ici ce résultat majeur, mais on soulignera le parallèle complet avec le théorème 3.6 : la variable "d'intégration continue" t se substitue à la variable "d'intégration discrète" n et les hypothèses du théorème sont d'une part une clause de convergence simple (clause **1** dans les deux énoncés), d'autre part une clause de domination (clause **2** dans les deux énoncés).

Exemple 3.11. Soit x un nombre réel strictement positif et $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n \text{ si } t \in]0,n[\\ f_n(t) &= 0 \text{ si } t \geq n\,; \end{aligned}$$

la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur l'intervalle $]0,+\infty[$ vers la fonction

$$f\ : t \in]0,+\infty[\longmapsto t^{x-1}e^{-t}$$

et l'on vérifie

$$\forall t \in]0,+\infty[\,,\ 0 \leq f_n(t) \leq f(t)\,.$$

Comme la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$, d'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$$

(voir l'exemple 2.6), on a la formule

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n\,dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^x \left(\int_0^1 u^{x-1}\Big(1-u\Big)^n\,du\right). \end{aligned}$$

Il se trouve que la dernière intégrale se calcule par parties et que l'on aboutit ainsi à la célèbre formule attribuée au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

On pourra vérifier en exercice que si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction continue f, mais la convergence s'effectuant de manière monotone croissante ($f_n \leq f_{n+1}$ sur $[a,b]$), alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f uniformément. Ce résultat (comme d'autres résultats du même type qui en sont des variantes) est du à l'analyste italien Ulysse Dini (1845-1918) ; sous ces hypothèses (la suite f_n converge simplement mais de manière monotone croissante vers sa limite f), on a donc, du fait du théorème 3.7 :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Ceci suggère le second résultat majeur concernant l'interversion de l'intégration et de la prise de limite de suites de fonctions, du à un mathématicien d'origine italienne expatrié en Argentine, Beppo Levi (1875-1962), dont voici une version "piétonne" :

Théorème 3.9 (de convergence monotone ou de Beppo-Levi, version "piétonne") *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle (a,b) de $\mathbb{R}$, positives, continues par morceaux sur tout segment de (a,b) ; on suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement de manière monotone croissante vers une fonction f ($f_n \leq f_{n+1}$ sur (a,b)), elle aussi continue par morceaux sur tout segment de (a,b). On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,,$$

les deux membres de la formule ci-dessous pouvant fort bien être tous les deux égaux à $+\infty$.

Remarque 3.7. Notons que l'on ne sait pas *a priori* que la fonction f est intégrable, ce qui fait que le théorème 3.8 ne s'applique pas et que l'énoncé du théorème 3.9 constitue bien un nouveau résultat que l'on ne peut déduire du précédent.

Exemple 3.12. Si l'on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

(cette série est convergente d'après la règle de d'Alembert par exemple), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^t-1-t}{t^2}\,e^{-t}\,dt &= \int_0^\infty \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+2)!}\Big)\,e^{-t}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \int_0^\infty t^k e^{-t}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+2)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\Big) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Notons ici que les critères de comparaison permettaient d'assurer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{e^t-1-t}{t^2}\,e^{-t}\,dt\,,$$

ce qui fait que le théorème de convergence dominée 3.8 aurait pu tout aussi bien s'appliquer ici.

Chapitre 4

Séries entières et séries de Fourier

4.1 Séries entières

4.1.1 Définition et premiers exemples de classes de séries entières

Les séries entières jouent un rôle essentiel en mathématiques car leurs sommes sont, du point de vue de l'analyse, les fonctions les plus proches des êtres familiers aux algébristes, à savoir les polynômes ou plus précisément leur incarnation en analyse que sont les fonctions polynomiales. Ces séries entières sont aussi des outils bien utiles tant aux informaticiens qu'aux ingénieurs (en théorie du contrôle, en robotique, en électronique notamment), ce de par le fait qu'il est souvent commode de manipuler plutôt que la suite numérique $(a_n)_{n\geq 0}$ l'expression formelle

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots ,$$

dite *fonction génératrice* de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ (ceci est déjà apparu lorsque nous avons tenté de justifier l'intérêt du produit de Cauchy dans la section 1.5).

Voici en effet la définition d'une série entière :

Définition 4.1 *On appelle* <u>*série entière*</u> *toute série de fonctions sur* $\mathbb{C}$ *de la forme* $[a_n z^n]_{n\geq 0}$*, où* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est une suite numérique de nombres complexes.*

Remarque 4.1. Le qualificatif "entière" trouve son origine dans le fait que les exposants intervenant dans les fonctions monomiales $a_n z^n$, $n \geq 0$, sont des entiers.

Remarque 4.2. Une telle série de fonctions peut fort bien présenter des lacunes (on parle alors de <u>*série lacunaire*</u>) lorsque certains coefficients a_n sont nuls : par exemple, la série

$$\left[\frac{z^{n^2}}{n!}\right]_{n\geq 0}$$

est une série entière : il suffit de convenir que dans ce cas

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas un carré parfait} \\ 1/p! \text{ si } n = p^2 \,,\ p \in \mathbb{N} \,. \end{cases}$$

Les séries entières les plus familières (liées, on le verra, aux fonctions basiques tant de l'analyse que de la combinatoire) sont de l'un des types suivants :

– les séries entières telles que tous les a_n sont nuls pour n assez grand ; on verra que ces séries entières sont directement liées aux fonctions polynomiales de la variable complexe z ;
– les séries entières correspondant à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ régie par une équation récurrente à p pas récurrents (p étant un entier positif non nul fixé et $\alpha_1, ..., \alpha_p$ p nombres complexes), c'est-à-dire une relation de la forme :

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_p a_{n-p}\,,\ n \geq n_0 \geq p\ ;$$

on verra que ces séries entières sont directement liées aux fonctions rationnelles de la variable complexe z ; elles jouent un rôle crucial en combinatoire ou en théorie de l'information discrète (tant par rapport à l'analyse qu'au traitement) ; entrent dans cette classe les séries géométriques $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$, où α ("*raison*" de la série) est un nombre complexe : la relation récurrente est dans ce cas particulier la relation récurrente à un pas

$$a_n = \alpha a_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,;$$

ces séries entières sont les séries entières géométriques ;
– les séries entières du type $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ en relation directe avec la fonction exponentielle complexe ou les fonctions trigonométriques $\cos, \sin, \mathrm{ch}\,, \mathrm{sh}$; ces séries appartiennent à la *classe de Siegel* (en référence au théoricien des nombres allemand Carl-Ludwig Siegel (1896-1981) ; notons que dans ce type d'exemple, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ se trouve régie par une équation à pas récurrents, mais cette fois du type

$$\alpha_0(n)a_n = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j(n) a_{n-j}\,,\ n \geq n_0 \geq p\,,$$

où cette fois $\alpha_0, ..., \alpha_p$ sont des fonctions polynomiales de l'indice n ; par exemple, dans le cas où $a_n = 1/n!$, on a

$$n a_n = a_{n-1}\,, \quad n \geq 1\,;$$

entrent aussi dans cette classe certaines séries entières directement liées, on le verra, à des équations différentielles sans second membre du premier ou second ordre omniprésentes en physique ou en mécanique : tel est le cas des équations $y' = \lambda y$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma e^{\lambda t}$), des équations $y' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma_1 \cos(\omega t) + \gamma_2 \sin(\omega t)$), des équations $y(t) = \omega^2 y(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$ (dont on sait que la solution générale est du type $y(t) = \gamma_1 \mathrm{ch}\,(\omega t) + \gamma_2 \mathrm{sh}\,(\omega t)$), ou bien d'équations plus compliquées du type par exemple de *Bessel* :

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \nu^2) y(t) = 0\,,$$

où ν désigne un paramètre réel ou complexe ;
– les séries entières du type $[z^n/(n+1)]_{n\geq 0}$ en relation, elles, avec la fonction logarithme, prototype d'une autre classe de fonctions (ou plutôt ici de séries entières) tant intéressante du point de vue de la théorie des nombres (notons que dans ces exemples, les a_n sont rationnels) que de l'analyse, la classe des *G-fonctions* (en référence à l'arithméticien russe contemporain A.I. Galochkin) ;

– les séries entières inspirées de la célèbre formule du binôme

$$(1+z)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-n)!}\, z^k = \sum_{k=0}^{N} \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!}\, z^k\,,$$

c'est-à-dire les séries du type $[a_{\alpha,n} z^n]_{n\geq 0}$, où α désigne un nombre complexe et

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

(notons que si $\alpha = N \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{\alpha,n} = 0$ si $n > N$, ce qui nous ramène au premier exemple proposé ici).

4.1.2 Rayon, disque, cercle de convergence

Si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est une série entière, on a vu (application de la règle de Cauchy dans la section 1.3.1, puis de la convergence normale dans la section 3.1.4, exemples 3.4) qu'un nombre (appartenant à $[0,\infty]$) jouait un rôle déterminant ; c'est le nombre

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}\,;$$

en effet, on rappelle ici le résultat déjà acquis dans ce cours (exemples 3.4, section 3.1.4) :

Théorème 4.1 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière ; cette série converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0,r)}$ avec $r < R$ (attention à l'inégalité <u>stricte</u> !) où*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}\,;$$

de plus la série numérique $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ ne converge pas (son terme général ne tend pas vers 0 !) dès que z est tel que $|z| > R$ (attention encore à l'inégalité <u>stricte</u> !).

Ce résultat fondamental concernant la théorie des séries entières amène aux définitions suivantes :

Définition 4.2 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière ; le nombre*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \in [0,\infty] \tag{4.1}$$

est appelé (d'ailleurs improprement, on le verra !) <u>rayon de convergence</u> de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; le disque ouvert $D(0,R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\}$ est le <u>disque de convergence</u> de cette série ; le cercle "critique" $C(0,R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}$ (qui sépare les zones de convergence et de non convergence) est appelé (d'ailleurs improprement, puisque l'on ne peut de fait en général rien décider concernant le comportement asymptotique de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ lorsque $|z| = R$) <u>cercle de convergence</u> de la série entière.

Exemples 4.1.

– la série $[n!z^n]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $R = 0$, tandis que la série $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Cette seconde série définit donc (par le biais de sa somme) une fonction dans tout le plan complexe, dite *fonction exponentielle* :

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,,\ \forall\, z \in \mathbb{C}\,.$$

Comme

$$\begin{aligned}\exp(z_1+z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\Big)\,,\end{aligned}$$

on voit que $\exp(z_1+z_2)$ est la somme du produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $[z_1^k/k!]_{k\geq 0}$ et $[\frac{z_2^k}{k!}]_{k\geq 0}$. Il résulte de la proposition 1.7 que l'on a, pour tout z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\times\exp(z_2)\,,$$

autrement dit l'exponentielle réalise un homomorphisme de groupe entre $\mathbb{C}$ (muni de l'opération interne d'<u>addition</u>) et $\mathbb{C}^*$ (muni de la multiplication). On verra plus loin que les trois nombres "phares" des mathématiques que sont $e = \exp(1)$, π et $i = \sqrt{-1}$ sont liés par la formule

$$\exp(2i\pi) = e^{2i\pi} = 1\,.$$

– la série géométrique $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$ de raison $\alpha \in \mathbb{C}^*$ a pour rayon de convergence $1/|\alpha|$; tous les points du cercle de convergence sont des points de non convergence (voir l'exemple 1.1 du chapitre 1 de ce cours) ; on remarque cependant malgré tout que, dans ce cas particulier, la somme de la série dans son disque de convergence, qui se trouve être ici la fonction

$$z \to \frac{1}{1-\alpha z}\,,\quad |z| < 1/|\alpha|\,,$$

(ceci montre la relation entre séries entières géométriques et fractions rationnelles) se prolonge en une fonction continue à tout le plan complexe privé du point $1/\alpha$, donc en particulier au travers du cercle de convergence qui semblait faire barrage à la convergence de la série, ce qui peut ici sembler paradoxal, mais de fait ne l'est pas car il convient de distinguer comportement de la série et comportement de la <u>somme</u> de la série lorsque cette somme existe ;

– la série $[z^n/(n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $R = 1$; le point $z = 1$ du cercle de convergence est un point de divergence, mais le point $z = -1$ se trouve, lui, être un point de convergence (d'après le critère des séries alternées) ;

– plus généralement si $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes, tous réels positifs au dela d'un certain seuil, tels que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ tende vers 0 en décroissant, le rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vaut 1 et tous les points du cercle de convergence, sauf le point $z = 1$, sont des points de convergence (en vertu du critère d'Abel numérique) ; tel est le cas des séries entières du type Riemann $[z^n/n^x]_{n\geq 1}$, où $x > 0$;

– le rayon de convergence de la série lacunaire $[z^{n^2}/n!]_{n\geq 0}$ vaut 1 ; il se trouve qu'il existe des séries lacunaires de rayon de convergence strictement positif pour lesquels <u>tous</u> les points du cercle de convergence sont des points au voisinage desquels il est impossible de prolonger la somme de la série entière au delà du cercle de convergence ; pour de telles séries entières, ce cercle de convergence joue bien le rôle attendu de "barrage", au contraire de ce qui se passe pour les séries géométriques $[\alpha^n z^n]_{n\geq 0}$ de notre second exemple.

4.1.3 Série dérivée, série primitive

Si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est une série entière, de rayon de convergence R, la série entière

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

a même rayon de convergence que la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; en effet, le rayon de convergence de la série

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

est le même que celui de la série $[na_n z^n]_{n\geq 0}$; or

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[n^{1/n}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}\Big[e^{\frac{\log n}{n}}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/R\,.$$

De même, la série entière

$$\Big[\frac{a_{n-1}z^n}{n}\Big]_{n\geq 1}$$

a même rayon de convergence que la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$; en effet, le rayon de convergence de cette nouvelle série est celui de la série

$$\Big[\frac{a_n}{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}$$

et l'on a encore

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[(n+1)^{-1/n}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}\Big[e^{\frac{-\log(n+1)}{n}}|a_n|^{1/n}\Big] = \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/R\,.$$

Ces deux remarques cruciales nous conduisent aux définitions suivantes :

Définition 4.3 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière ; on appelle* <u>*série entière dérivée*</u> *de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ la série entière*

$$\Big[(n+1)a_{n+1}z^n\Big]_{n\geq 0}\,; \tag{4.2}$$

on appelle <u>*série entière primitive*</u> *de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ la série entière*

$$\Big[\frac{a_{n-1}z^n}{n}\Big]_{n\geq 1}\,; \tag{4.3}$$

série dérivée et série primitive ont même rayon de convergence que la série entière dont elles sont issues.

Exemples 4.2. La série dérivée de la série $[z^n/n]_{n\geq 1}$ ($a_0 = 0$ et $a_n = 1/n$ pour $n \geq 1$) est la série géométrique $[z^n]_{n\geq 0}$; la série primitive de la série géométrique $[z^n]_{n\geq 0}$ est la série $[z^n/n]_{n\geq 1}$.

Ce qui justifie la terminologie ("dérivée" ou "primitive") est le résultat très important suivant :

Théorème 4.2 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $z \to S(z)$ la somme de cette série de fonctions à l'intérieur du disque ouvert de convergence $D(0,R)$. Soit aussi $z \to S_{\text{der}}(z)$ la somme de la série dérivée (toujours dans le même disque ouvert de convergence $D(0,R)$) et $z \to S_{\text{prim}}(z)$ la somme de la série primitive (encore dans le même disque ouvert $D(0,R)$ de convergence qui est le même pour les trois séries en jeu). Alors, pour tout $z \in D(0,R)$, on a*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}^*}}\frac{S(z+h)-S(z)}{h} = S_{\text{der}}(z) \tag{4.4}$$

et

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}^*}}\frac{S_{\text{prim}}(z+h)-S_{\text{prim}}(z)}{h} = S(z)\,. \tag{4.5}$$

Preuve. Puisque $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est (on le voit immédiatement) la série dérivée de sa série primitive, il suffit, pour prouver cette proposition, d'en prouver le premier volet, c'est-à-dire (4.4). Pour cela, nous allons montrer que si z est fixé dans $D(0,R)$ et si $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes tendant vers 0 dans $\mathbb{C}^*$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} = S_{\mathrm{der}}(z)\,.$$

C'est pour cela le théorème de convergence dominée 3.6 (chapitre 3, section 3.2.1) qui va nous servir car nous avons, d'après la définition de S et la célèbre identité remarquable

$$A^k - B^k = (A-B)\sum_{l=0}^{k-1} A^l B^{k-1-l}\,,\ k\in\mathbb{N}^*, A, B\in\mathbb{C}\,,$$

$$\frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z+h_n)^k - z^k}{h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} z^l (z+h_n)^{k-1-l}\right).$$

Posons, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_k^{(n)}(z) = a_k\left(\sum_{l=0}^{k-1} z^l (z+h_n)^{k-1-l}\right).$$

On a, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}(z) = k a_k z^{k-1}$$

et

$$u_0^{(n)}(z) = 0$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si $|h_n|\leq\epsilon$, on a, par l'inégalité triangulaire et toujours la même l'identité remarquable,

$$|u_k^{(n)}(z)| \leq |a_k| \sum_{l=0}^{k-1} |z|^l (|z|+\epsilon)^{k-1-l} = |a_k| \frac{(|z|+\epsilon)^k - |z|^k}{\epsilon} \leq \frac{|a_k|(|z|+\epsilon)^k}{\epsilon} = w_k(z)\,.$$

Si ϵ est tel que $|z|+\epsilon < R$ (un tel ϵ existe bien car $|z|<R$), la série à termes positifs $[w_k(z)]_{k\geq 0}$ est une série convergente ; le théorème 3.6 du chapitre 3 (section 3.2.1) s'applique donc et l'on a bien

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{S(z+h_n)-S(z)}{h_n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}(z)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k = S_{\mathrm{der}}(z)\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve (4.4) (puisque le choix de la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ importe peu) et donc le théorème 4.2. $\diamondsuit$.

Ce théorème a pour conséquence le résultat suivant :

Corollaire 4.1 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; la fonction*

$$t \in]-R, R[\to S(t) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

est une fonction de classe C^∞ sur $]-R, R[$, avec, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^p S}{dt^p}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\cdots(k+p) a_{k+p} t^k \,; \tag{4.6}$$

on a en particulier

$$p!\, a_p = \frac{d^p S}{dt^p}(0)\,,$$

d'où la <u>*formule de Taylor*</u>

$$\forall t \in]-R, R[\,, \qquad S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{d^p S}{dt^p}(0)\, t^p\,. \tag{4.7}$$

De plus, une primitive de S sur l'intervalle $]-R, R[$ est donnée par la fonction

$$t \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}\, t^k\,.$$

Exemple 4.3. La série dérivée de la série $[(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)]_{n\geq 0}$ est la série $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$, ces deux séries ayant pour rayon de convergence $R = 1$; en conséquence, la fonction

$$x \in]-1, 1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

est une primitive (celle d'ailleurs qui s'annule en $x = 0$) de la fonction

$$x \in]-1, 1[\to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}\ ;$$

comme l'on sait que la primitive (sur $\mathbb{R}$) s'annulant en $x = 0$ de la fonction $x \to 1/(1+x^2)$ est la fonction $x \to \operatorname{Arctg} x$, on a

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \quad \operatorname{Arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\ ;$$

on verra plus loin que cette formule reste valable pour $x = 1$ (la série au second membre converge alors comme série alternée).

Preuve. La preuve est évidente car si $t \in]-R, R[$ et si $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels tendant vers 0, on a, si S désigne la somme de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(t+h_n) - S(t)}{h_n} = S_{\text{der}}(t)\,,$$

ce qui prouve que $t \to S(t)$ est dérivable, de dérivée la somme de la série dérivée ; on recommence ensuite l'opération avec la série dérivée (le rayon de convergence R n'a pas changé). La somme de la série primitive est, inversement, une primitive de la somme de la série. $\diamondsuit$

Le corollaire 4.1 fournit, on l'a noté, un moyen de calculer les coefficients a_p, $p \in \mathbb{N}$, à partir de la somme S de la série entière (restreinte à l'intervalle $]-R, R[$), ce grâce aux formules (dites de Taylor, en référence au mathématicien anglais Brook Taylor, 1685-1731)

$$p!\, a_p = \frac{d^p S}{dt^p}(0)\,,\ \ p \in \mathbb{N}\,.$$

On verra plus loin, avec la formule intégrale de Cauchy, une autre manière de calculer les nombres a_p à partir de la somme de la séries, par des calculs d'intégrales cette fois (autrement plus stables numériquement que des calculs de dérivées !).

On a aussi un second corollaire tout aussi important que le corollaire 4.1, en changeant cette fois notre fusil d'épaule et en regardant la somme d'une série entière de rayon de convergence R comme une fonction des deux variables (x, y), à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$S\ : (x, y) \longmapsto S(x, y) := S(x + iy)\,.$$

Corollaire 4.2 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; la fonction*

$$(x, y) \longmapsto S(x, y) := S(x + iy) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x + iy)^k$$

est une fonction de classe C^∞ sur le disque ouvert de centre $(0, 0)$ et de rayon R, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ceci signifie que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux des fonctions de deux variables à valeurs réelles de classe C^∞ dans ce disque) et l'on a l'importante équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D((0, 0), R)\,,$$

équation qui peut se scinder si l'on pose

$$\begin{aligned} P(x, y) &:= \operatorname{Re} S(x, y) \\ Q(x, y) &:= \operatorname{Im} S(x, y)\,, \end{aligned} \tag{4.8}$$

en le système d'équations (dit <u>système de Cauchy-Riemann</u>) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D((0, 0), R) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D((0, 0), R)\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Preuve. D'après le théorème 4.2, on peut écrire, si (x_0, y_0) est un point du disque ouvert $D((0, 0), R)$ et si $h = h_1 + ih_2$ (avec $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$) est de module assez petit

$$S(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = S(x_0, y_0) + (h_1 + ih_2) S_{\text{der}}(x_0, y_0) + \mathrm{o}(|h|)\,.$$

D'après les bases du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$ vues dans le cours de MAT302, on peut affirmer que la fonction S est différentiable au point (x_0, y_0) et que ses dérivées partielles en ce point valent

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x}(x_0, y_0) &= S_{\text{der}}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial S}{\partial y}(x_0, y_0) &= iS_{\text{der}}(x_0, y_0)\,. \end{aligned}$$

Comme la série entière dérivée a même rayon de convergence que la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$, sa somme S_{der} définit une fonction continue dans le disque ouvert $D((0,0),R)$ (somme d'une série de fonctions normalement convergente). Ceci prouve bien que la fonction S est de classe C^1 dans ce disque ouvert et que la relation (4.8) (donc le système de Cauchy-Riemann (4.9)) y est satisfaite.

La série dérivée ayant aussi pour rayon de convergence R, on peut répéter le raisonnement pour constater que

$$(x,y) \longmapsto S_{\text{der}}(x,y) := S_{\text{der}}(x+iy)$$

est aussi de classe C^1, ce qui nous permet d'affirmer que $(x,y) \longmapsto S(x,y)$ est en fait de classe C^2, et ainsi de suite... On conclut que

$$(x,y) \longmapsto S(x,y) := S(x+iy)$$

est bien de classe C^∞ dans le disque ouvert $D((0,0),R)$. Les dérivées partielles s'expriment en termes des sommes des séries dérivées successives : par exemple, la fonction

$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial^n S}{\partial x^n}(x,y)$$

est égale à la somme de la n-ème série dérivée de $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ (on le vérifiera par récurrence) tandis que

$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial^m S}{\partial y^m}(x,y)$$

vaut i^m fois la somme de la m-ème série dérivée de $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ (à cause des équations de Cauchy-Riemann). La fonction

$$(x,y) \longmapsto \frac{\partial^{n+m} S}{\partial x^n \partial y^m}(x,y)$$

vaut dont i^m fois la somme de la $(m+n)$-ème série dérivée de la série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$. Le corollaire est ainsi démontré. $\diamondsuit$

Remarque 4.3. L'opérateur aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

qui annule S (corollaire 4.2) a le défaut d'être complexe (du fait de la présence de i). On remarque que S vérifie aussi dans le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon R :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -i\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial S}{\partial y}\Big] = -i\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{\partial S}{\partial x}\Big] = -\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\,,$$

soit

$$\Delta[S](x,y) = 0\,,$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien. Les parties réelles et imaginaires de S sont des fonctions dites *harmoniques* de deux variables (une fonction harmonique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ étant une fonction de clase C^2 annulée par la prise de laplacien).

4.1.4 Règle d'Abel pour les séries entières

Considérons une série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$, de rayon de convergence $R > 0$; lorsque z_0 est un point du cercle de convergence ($|z_0| = R$) où la série numérique $[a_n z_0^n]_{n\geq 0}$ se trouve converger, la somme de la série entière est une fonction qui se trouve naturellement définie sur le domaine

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\} \cup \{z_0\}\,.$$

On ne peut affirmer que la série entière converge uniformément sur ce domaine, mais on a cependant le très intéressant résultat suivant, dont la preuve repose sur l'utilisation du procédé d'Abel :

Proposition 4.1 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et w un point du cercle de convergence tel que la série numérique $[a_n w^n]_{n\geq 0}$ converge ; alors la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ converge uniformément dans tout ensemble du type :*

$$K(w\,;\,\kappa) := \{z \in \overline{D(0,R)}\,;\, |z-w| \leq \kappa(R-|z|)\}\,,$$

où κ désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1 ; en particulier, la convergence de la série entière est uniforme sur le segment $[0,w]$ du plan complexe, segment qui se trouve inclus dans tous les ensembles $K(w\,;\,\kappa)$ quelque soit $\kappa \geq 1$.

Remarque 4.4. Une conséquence importante de ce résultat est que, si $(z_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de points du disque de convergence $D(0,R)$ telle qu'il existe $\kappa \geq 1$ avec

$$\forall n \geq n_0\,, \quad |z_n - w| \leq \kappa(R - |z_n|)$$

et que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_n^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\ ;$$

en particulier la restriction au segment $[0,w]$ de la fonction

$$z \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

est une fonction continue ; on verra des exemples concrets d'application de cette remarque un peu plus loin dans cette sous-section (Exemples 4.4 et 4.5 ci dessous).

Remarque 4.5. Il est édifiant de représenter graphiquement, par exemple si $R = 1$ et $w = 1$, les domaines du type $K(1\,;\,\kappa)$ lorsque $\kappa \geq 1$ varie ; pareil domaine ne rencontre le cercle de convergence qu'au point $w = 1$; lorsque $\kappa = 1$, ce domaine est le segment $[0,1]$; puis lorsque κ augmente, sa forme évolue comme celle d'une goutte d'eau de sommet 1 ; près du point 1, cette "goutte d'eau" (voir la figure 4.1, où nous avons utilisé deux valeurs κ et κ' avec κ proche de 1 et κ' grand pour représenter nos deux "gouttes") se trouve limitée par deux demi-tangentes symétriques par rapport au segment $[0,1]$ et faisant entre elles un angle $\theta_\kappa = 2\mathrm{Arcos}\,(1/\kappa)$; cet angle tend vers π lorsque κ tend vers l'infini.

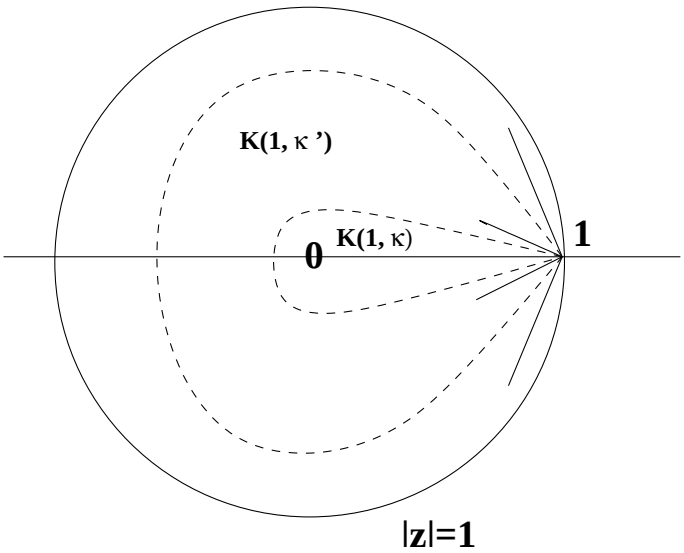

FIG. 4.1 – Domaines d'uniforme convergence si convergence en un point du bord

Avant d'en donner la preuve, voici deux applications de ce résultat :

Exemple 4.4 (où apparaît la fonction logarithme).
La série entière $[(-1)^n z^{n+1}/(n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[(-z)^n]_{n\geq 0}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n}(-z)^n = \frac{1}{1+z}\,,$$

la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

est la primitive s'annulant en $t=0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t}$$

sur $]-1,1[$; en effet, si $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k\Big)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$$

puisque l'on peut intervertir intégration et sommation du fait de la convergence normale, donc uniforme, de la série sous l'intégrale. Or on connait cette primitive car

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+x) \quad \forall x \in]-1,1[\,;$$

on a donc la formule

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 4.1) en $x=1$ (point où la série alternée

$$[(-1)^k/k+1]_{k\geq 0}$$

converge) et l'on a donc aussi

$$\log 2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

Exemple 4.5 (une expression de π).

La série entière $[(-1)^n z^{2n}/(2n+1)]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n}(-z^2)^n = \frac{1}{1+z^2}\,,$$

la fonction

$$x \in]-1,1[\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

est la primitive s'annulant en $x=0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t^2}$$

sur $]-1,1[$; en effet, si $x \in]-1,1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-t^2)^k\Big)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

puisque l'on peut intervertir intégration et sommation du fait de la convergence normale, donc uniforme, de la série sous l'intégrale. Or on connait cette primitive car

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Arctg} x \quad \forall x \in]-1,1[\,;$$

on a donc la formule

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 4.1) en $x=1$ (point où la série alternée $[(-1)^k/2k+1]_{k\geq 0}$ converge) et l'on a donc aussi

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctg}(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,.$$

Pareille formule permet de calculer des approximations rationnelles de π (cela ne converge pas très vite, mais on a déjà mentionné comment des formules plus subtiles comme celle de Machin peuvent donner des approximations plus efficaces car plus rapides).

Preuve de la proposition 4.1.

La preuve utilise la méthode introduite pour prouver le second critère d'Abel. On se ramène au cas $R=1$ et $w=1$ (ce qui n'est pas restrictif modulo une homothétie combinée avec une rotation dans le plan complexe). Soit z un point du domaine $K(1\,;\,\kappa)$. On note R_n le reste au cran n de la série convergente $[a_n]_{n\geq n_0}$ et l'on écrit :

$$a_k = R_{k-1} - R_k$$

pour $k>0$. Si $p>q>0$, on a donc :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=p}^{q} a_k z^k = \sum_{k=p}^{q} z^k(R_{k-1}-R_k)\\
=\ & z^p(R_{p-1}-R_p) + z^{p+1}(R_p - R_{p+1}) + \cdots + z^{q-1}(R_{q-2}-R_{q-1}) + z^q(R_{q-1}-R_q)\\
=\ & z^p R_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} R_k(z^{k+1}-z^k) - z^q R_q\,.
\end{aligned}$$

Par hypothèses, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$n \geq N(\epsilon) \Longrightarrow |R_n| \leq \epsilon\,;$$

si $p \geq N(\epsilon)$ et $q > p$, on a donc (grâce à l'inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{k=p}^{q} a_k z^k\Big| &\leq \epsilon\Big(|z^p| + |z^q| + \sum_{k=0}^{\infty} |z^k - z^{k+1}|\Big) \\ &\leq \epsilon\Big(2 + |1-z| \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k\Big)\,. \end{aligned}$$

Si $z \neq 1$, on a donc

$$\Big|\sum_{k=p}^{q} a_k z^k\Big| \leq \epsilon\Big(2 + \frac{|1-z|}{1-|z|}\Big) \leq (2+\kappa)\epsilon\,;$$

cette inégalité subsiste au point $z = 1$ et donc en tous les points de $K(1\,;\,\kappa)$; mais elle est réalisée dès que $p > q > N(\epsilon)$, où $N(\epsilon)$ est indépendant de z. La série entière $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ vérifie donc le critère de Cauchy uniforme dans $K(1\,;\,\kappa)$ et converge donc uniformément dans ce domaine. La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Comme application de ce résultat ici (outre les exemples 4.4 et 4.5 vus ci dessus), nous proposons de parachever l'énonçé du théorème de Mertens (proposition 1.8, section 1.5 du chapitre 1 du cours) comme nous l'avions annoncé dans la remarque 1.7 (section 1.5 du chapitre 1 du cours).

Proposition 4.2 *Soient $[u_n]_{n\geq 0}$ une série numérique absolument convergente et $[v_n]_{n\geq 0}$ une série numérique convergente ; alors la série produit de Cauchy des séries $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$, de terme général*

$$w_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\,, \qquad n \geq 0\,,$$

est convergente, de somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big)\,.$$

Preuve. On a déjà prouvé (proposition 1.8, section 1.5 du chapitre 1 du cours) la convergence de la série $[w_n]_{n\geq 0}$; il reste donc juste à calculer la valeur de la somme de cette série. Pour cela, on considère sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \to \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k\Big)\;;$$

comme les deux séries $[u_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[v_n x^n]_{n\geq 0}$ sont absolument convergentes lorsque $x \in [0,1[$ (car une série entière telle $[u_n z^n]_{n\geq 0}$ ou $[v_n z^n]_{n\geq 0}$ est normalement convergente sur tout disque fermé inclus dans son disque de convergence, ici $D(0,1)$), on

peut appliquer la proposition 1.7 (section 1.5 du chapitre 1 du cours) qui nous assure que pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k x^k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k\Big) \tag{4.10}$$

(la série $[w_n x^n]_{n\geq 0}$ est le produit de Cauchy des deux séries $[u_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[v_n x^n]_{n\geq 0}$). Comme les séries de fonctions $[u_n x^n]_{n\geq 0}$, $[v_n x^n]_{n\geq 0}$ et $[w_n x^n]_{n\geq 0}$ sont, d'après la proposition 4.1, uniformément convergentes sur $[0,1]$, leurs sommes sont des fonctions continues de x et l'on a, en faisant tendre x vers 1 par valeurs strictement inférieures dans (4.10) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\Big),$$

ce qui est le résultat voulu. $\diamondsuit$

4.1.5 Fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{C}$ et formule intégrale de Cauchy

Soit U un ouvert du plan complexe, c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.4 *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite* <u>*analytique*</u> *dans U si et seulement si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un nombre $r < \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$ et une série entière $[a_n(z_0) z^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que*

$$\forall z \in D(z_0, r)\,,\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^k\,.$$

Les fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{C}$ sont donc les fonctions à valeurs complexes qui, localement au voisinage d'un point arbitraire z_0 de l'ouvert, se développent comme somme d'une série entière de puissances de $z - z_0$.

Les fonctions polynomiales de la variable z sont des fonctiona analytiques dans $\mathbb{C}$ car une telle fonction P (de degré N) s'écrit

$$P(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z - z_0)^k$$

du fait de la formule algébrique de Taylor (notons que la division par $k!$ est en fait factice car il y a simplification automatique, ceci est important si l'on travaille sur un corps tel que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier par exemple).

Ensuite, le second exemple majeur (du point de vue pratique) est celui des fonctions rationnelles hors de leur ensemble de pôles. C'est un exemple capital du point de vue pratique car les seules fonctions modélisables *via* l'informatique sont les fractions rationnelles (la machine n'ayant pas accès au concept d'infini).

Proposition 4.3 *Soit $R = N/D \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle (écrite sous forme réduite) et $\alpha_1, ..., \alpha_M$ les racines du polynôme D figurant au dénominateur. Alors, si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_M\}$, on a*

$$\forall z \in D(z_0, \min_{1\leq j\leq M} |z_0 - \alpha_j|)\,,\ R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)(z - z_0)^k\,,$$

le rayon de convergence de la série entière $[a_n(z_0)\, z^n]_{n\geq 0}$ *étant exactement égal à* $\min\limits_{1\leq j\leq M} |z_0 - \alpha_j|$. *La fonction* R *est donc bien analytique sur* $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_M\}$.

Preuve. On utilise d'abord la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R sur $\mathbb{C}(X)$:

$$R(X) = \frac{N(X)}{D(X)} = E(X) + \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{\gamma_{j,l}}{(X-\alpha_j)^l}\,,$$

où $E(X)$ est un polynôme (le reste de la division euclidienne du numérateur $N(X)$ par le dénominateur $D(X)$), μ_j, $j = 1, ..., M$, est la multiplicité de α_j comme racine de D, et les $\gamma_{j,l}$, $l = 1, ..., \mu_j$ sont des nombres complexes.

On ne restreint pas le problème en supposant $z = 0$, ce que l'on fera (on se ramène à ce cas en utilisant une translation dans $\mathbb{C}$) ; on suppose donc qu'aucun des α_j n'est nul. Dans le disque ouvert $D(0, |\alpha_j|)$, on peut écrire

$$\frac{1}{z-\alpha_j} = -\frac{1}{\alpha_j(1-\frac{z}{\alpha_j})} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\alpha_j^{k+1}}\ ;$$

la série géométrique $[-z^n/\alpha_j^{n+1}]_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence $|\alpha_j|$, tout comme toutes ses séries dérivées. En utilisant le théorème 4.2 et le fait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h-\alpha)^m - (z-\alpha)^m}{h} = m(z-\alpha)^{m-1}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout z dans $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\}$, on voit (et ceci est en lui même un résultat important) que

$$\frac{(-1)^p}{(z-\alpha_j)^{p+1}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\cdots(k+p)}{\alpha_j^{k+p+1}} z^k\,, \quad \forall\, z \in D(0, |\alpha_j|)$$

d'où

$$\frac{1}{(z-\alpha_j)^{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{\alpha_j^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!} \frac{z^k}{\alpha_j^k}\,, \quad \forall\, z \in D(0, |\alpha_j|)\,.$$

Dans le disque ouvert de rayon $\min\limits_{1\leq j\leq M} |\alpha_j|$, on peut donc écrire

$$R(z) = E(z) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

avec

$$a_k := \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{\mu_j} \frac{(-1)^l}{\alpha_j^{k+l}} \frac{(k+l-1)!}{k!} \gamma_{j,l}\,.$$

Le rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ est (on le voit en montrant que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/\min_j |\alpha_j|$) vaut exactement $\min_j |\alpha_j|$ et la proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Remarque 4.6. Le développement en série entière des fractions rationnelles joue un rôle important en combinatoire ; par exemple, en utilisant le fait que le produit de Cauchy des deux séries entières

$[u_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[v_n z^n]_{n\geq 0}$ de même rayon de convergence est la série de Cauchy $[w_n z^n]_{n\geq 0}$ (où $[w_n]_{n\geq 0}$ est le produit de Cauchy des deux séries numériques $[u_n]_{n\geq 0}$ et $[v_n]_{n\geq 0}$) et le résultat établi à la proposition 1.7, on voit par exemple que si $p_1, ..., p_M$ sont M entiers, le développement en série entière dans $D(0,1)$ de

$$\prod_{j=1}^{M} \frac{1}{(1-z^{p_j})} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p_1,...,p_M}(k) z^k$$

(que l'on peut trouver en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle de droite) donne, avec $a_{p_1,...,p_M}(k)$, le nombre de façons de réaliser une somme de k euros en pièces de $p_1, ..., p_M$ euros.

Remarque 4.7. En fait, la donnée d'une fraction rationnelle de pôles $\alpha_1, ..., \alpha_M$ génère une partition du plan en couronnes (comme sur la figure 4.2 avec $M = 6$), les modules des pôles définissant les rayons des cercles concentriques impliqués dans ce découpage.

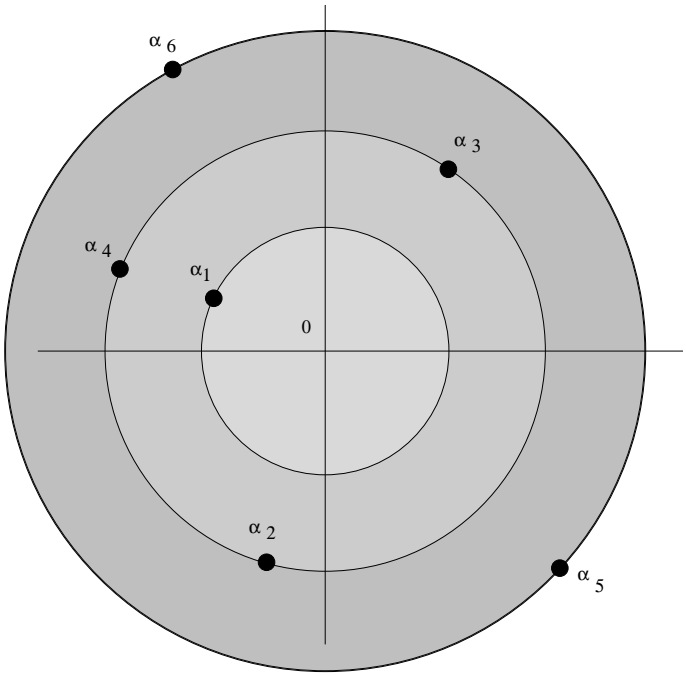

FIG. 4.2 – Partition de $\mathbb{C}$ subordonnée à une fraction rationnelle

Dans la couronne $\{R_1 < |z| < R_2\}$, on verra que la fraction rationelle se développe sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(1/z)^k ,$$

les deux séries entières $[a_n X^n]_{n\geq 0}$ et $[a_{-n} X^n]_{n\geq 1}$ ayant comme rayons de convergence respectifs R_2 et $1/R_1$ (on pourra vérifier cela en exercice en utilisant la décomposition en élément simples et le développment de $1/(1-X)$ lorsque $|X| < 1$ en série des puissances de X). De tels développements, dits de Laurent (Pierre Laurent, 1813-1854, est un ingénieur et mathématicien français contemporain de Cauchy), jouent un rôle important dans l'exploitation des fractions rationnelles *via* le concept (déjà mentionné) de *série génératrice* en informatique ou en sciences de l'ingénieur.

Mais il existe des fonctions analytiques non rationnelles ; par exemple

$$z \longmapsto \exp(z) = \exp(z_0) \times \exp(z - z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(z_0) \frac{(z-z_0)^k}{k!}$$

est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$. Les fonctions

$$\begin{aligned} z = x + iy \longmapsto \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \\ z \longmapsto \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

sont aussi des fonctions analytiques dans $\mathbb{C}$; on écrit par exemple

$$\cos z = \cos(z_0 + (z - z_0)) = \cos(z_0)\cos(z - z_0) - \sin(z_0)\sin(z - z_0)$$

et l'on utilise les développements

$$\begin{aligned} \cos(z - z_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z - z_0)^{2k} \\ \sin(z - z_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z - z_0)^{2k+1} . \end{aligned}$$

Un autre exemple majeur (coiffant tous les précédents en fait) est celui des sommes de séries entières à l'intérieur de leur disque ouvert de convergence. En effet, une formule intégrale essentielle, due (vers 1820) à l'ingénieur et surtout mathématicien français Augustin Cauchy, 1789-1857 (la motivation initiale des travaux d'Augustin Cauchy concernait des questions de mécanique des fluides) permet de prouver que la somme d'une série entière de rayon R est bien une fonction analytique dans son disque de convergence ; cette formule intégrale de Cauchy est d'ailleurs, on le verra au chapitre 5, autrement riche de conséquences car elle relie les notions d'analyticité et d'holomorphie. Si le point de vue "séries" relève plus de l'école du mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897), le point de vue "intégrale de contour" (plus proche de la physique et des travaux de l'anglais George Stokes, 1819-1903, en hydrodynamique) puise sa source, lui, dans les travaux de Cauchy.

Avant d'introduire cette formule, revenons au calcul des coefficients d'une série entière à partir de la somme de la série. Le corollaire 4.1 fournit, on l'a noté, un moyen de calculer les coefficients a_p, $p \in \mathbb{N}$, à partir de la somme S de la série entière (restreinte à l'intervalle $]-R, R[$), ce grâce aux formules de Taylor. Mais il est aussi important de remarquer que l'on peut accéder aux coefficients a_p (c'est-à-dire à la restitution de la série entière à partir de la connaissance de sa somme) non pas en dérivant cette somme restreinte à l'intervalle $]-R, R[$ (ce qui, numériquement, s'avère un procédé instable), mais en la faisant apparaître sous un symbole d'intégrale curviligne (ce qui correspond à une opération autrement plus robuste !). On a en effet la :

Proposition 4.4 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$; alors, pour tout $r \in]0, R[$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a, si S désigne la somme de la série dans le disque ouvert de convergence :*

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-ip\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta^{p+1}}\, d\zeta , \end{aligned}$$

où γ_r désigne le chemin paramétré :

$$\gamma_r \ : t \in [0,1] \longmapsto (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))\,,$$

ou encore (en repérant les points de $\mathbb{R}^2$ par leurs affixes complexes) :

$$\gamma_r \ : t \in [0,1] \longmapsto re^{2i\pi t}\,.$$

Un cas particulier important (qui correspondra à la formule intégrale de Cauchy écrite en $z = 0$ comme on le verra plus loin) est celui où $p = 0$ et où donc

$$a_0 = S(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\,.$$

Preuve. Sur le cercle $C(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = r\}$, il y a convergence normale, donc uniforme, de la série $[a_n z^n]$; la suite de polynômes trigonométriques

$$f_{r,n} \ : \ \theta \to \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\theta}$$

converge donc uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction continue

$$\theta \to S(re^{i\theta})\ ;$$

en utilisant le théorème 3.7, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})e^{-ip\theta}\, d\theta &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)\theta} d\theta \\ &= \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{\infty} a_k r^k \Big[\frac{e^{i(k-p)\theta)}}{i(k-p)}\Big]_0^{2\pi} + 2\pi\, a_p r^p = 2\pi\, a_p r^p\end{aligned}$$

puisque les fonctions $\theta \to e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales relativement à la forme sesquilinéaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues 2π périodiques sur $\mathbb{R}$,

$$(f,g) \to \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\,;$$

ici d'ailleurs, la théorie des séries entières s'articule avec celle des séries de Fourier qui fera l'objet de la seconde partie de ce chapitre.

L'expression sous forme d'intégrale curviligne repose simplement sur la définition de cette intégrale curviligne telle qu'on l'a vu dans la section 2.5.2. $\diamondsuit$

Nous pouvons maintenant formuler le résultat majeur de cette section, la formule intégrale de Cauchy, résultat étendant la formule intégrale obtenue dans la proposition 4.4 pour représenter $a_0 = S(0)$ comme une intégrale curviligne sur le cercle de rayon r, avec $r < R$, R désignant le rayon de convergence de la série $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et S sa somme dans le disque ouvert $D(0,R)$.

Théorème 4.3 (formule intégrale de Cauchy) *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et S sa somme dans le disque ouvert de rayon R. Pour tout $r \in]0, R[$, pour tout z dans le disque* <u>*ouvert*</u> *$D(0, r)$, on a*

$$S(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \tag{4.11}$$

où γ_r désigne le chemin paramétré :

$$t \in [0,1] \longmapsto (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))\,,$$

ou encore, si l'on préfère la notation complexe,

$$\gamma_r \ : t \in [0,1] \longmapsto r\, e^{2i\pi t}\,.$$

Preuve. La fonction

$$\zeta \in D(0,R) \setminus \{z\} \longmapsto \frac{S(\zeta)}{\zeta - z} \in \mathbb{C}$$

est une fonction de classe C^1 dans le disque épointé $D(0,R) \setminus \{z\}$; d'autre part, on a, d'après le corollaire 4.2,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)[S(u+iv)] = 0$$

pour tout $\zeta = u + iv$ dans $D(0,R)$. Un calcul immédiat montre également que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big[\frac{1}{u+iv-z}\Big] = 0$$

dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Il résulte donc de la règle de Leibniz que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\Big)\Big[\frac{S(u+iv)}{u+iv-z}\Big] = 0 \qquad \forall u+iv \in D(0,R) \setminus \{z\}\,. \tag{4.12}$$

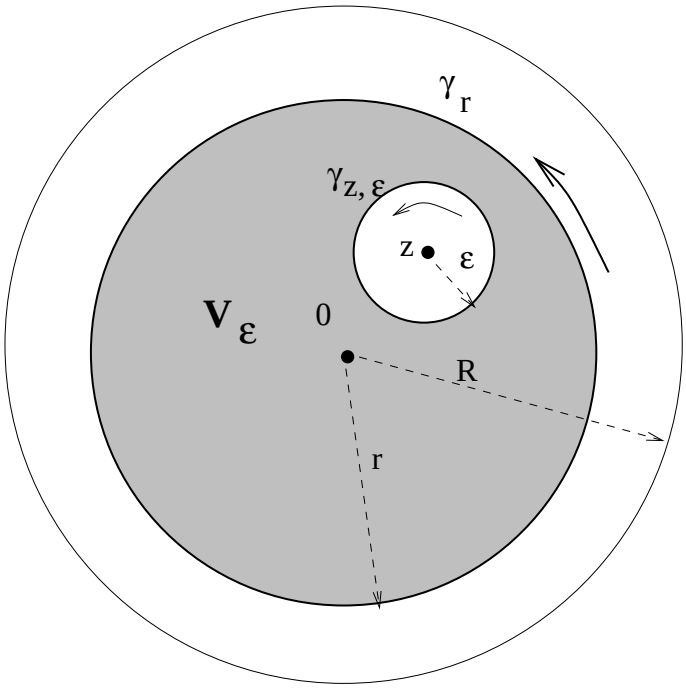

FIG. 4.3 – Formule de Cauchy

Fixons $r > 0$, $z \in D(0,r)$ et $\epsilon > 0$ (tel que $\epsilon < r - |z|$) et considérons l'ouvert borné V_ϵ défini par

$$V_\epsilon = D(0,r) \setminus \overline{D(z,\epsilon)}$$

(voir la figure 4.3), ouvert dont la frontière est constituée du support de deux lacets fermés sans points doubles. Si $\gamma_{z,\epsilon}$ désigne le chemin paramétré

$$\gamma_{z,\epsilon} \ : t \in [0,1] \longmapsto z + \epsilon e^{2i\pi t}\,,$$

on peut calculer

$$\int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

en utilisant la formule de Green-Riemann (théorème 2.1 de la section 2.5.4, chapitre 2). Le calcul nous donne (du fait de (4.12))

$$\int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \tag{4.13}$$

(c'est le second volet du théorème de Green-Riemann que l'on utilise ici d'ailleurs). En écrivant

$$S(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 (S(z) - S(z + \epsilon e^{2i\pi t}))dt\,,$$

on voit que

$$\left| S(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |S(z + \epsilon e^{2i\pi t}) - S(z)|\,,$$

d'où l'on déduit, puisque S est continue au point z,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z,\epsilon}} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = S(z)\,.$$

En passant à la limite lorsque ϵ tend vers 0 dans (4.13), on obtient la formule de Cauchy (4.11) voulue. $\diamondsuit$

Le résultat suivant résulte de la formule de Cauchy :

Théorème 4.4 *Soit $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, S sa somme, et z_0 un point du disque ouvert de convergence. Pour tout $r \in]|z_0|, R[$, pour tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r - |z_0|)$, on a*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \Big) (z - z_0)^k\,. \tag{4.14}$$

Remarque 4.8. Ce théorème nous montre bien que S se représente comme la somme d'une série entière de puissances de $(z - z_0)$ convergente dans le disque ouvert $D(z_0, r - |z_0|)$; c'est donc bien une fonction analytique dans son domaine de définition $D(0,R)$. Comme les coefficients d'une série entière s'expriment à partir de sa somme (voir le corollaire 4.1 ou la proposition 4.4), les nombres

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta\,, \qquad r \in]|z_0|, R[\,,$$

ne dépendent pas en fait de r (on les note $a_k(z_0)$, $k \in \mathbb{N}$) et la série entière $[a_n(z_0)\, X^n]_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |z_0|$. La formule

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^k$$

est donc valide pour tout z dans le disque ouvert $D(z_0, R - |z_0|)$ et l'on retrouve comme cas particulier (en prenant $z_0 = 0$) la formule

$$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(0)\, z^p\,,\ \ z \in D(0, R)\,,$$

qui correspond à la liste d'égalités

$$a_p(z_0) = a_p \qquad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Preuve du théorème 4.4. Fixons $r \in]|z_0|, R[$. Si $z \in D(z_0, r - |z_0|)$ et $\theta \in [0, 1]$, on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{1}{re^{2i\pi\theta} - z} &= \frac{1}{(re^{2i\pi\theta} - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(re^{2i\pi\theta} - z_0)}\,\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z - z_0}{re^{2i\pi\theta} - z_0}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{(re^{2i\pi\theta} - z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{re^{2i\pi\theta} - z_0}\right)^k,\end{aligned}$$

la convergence de la série ci-dessus étant normale sur $[0, 1]$ (comme série de fonctions de θ sur $[0, 1]$) puisque

$$\left|\frac{z - z_0}{re^{2i\pi\theta} - z_0}\right| \leq \frac{|z - z_0|}{\min\limits_{|\zeta|=r} |\zeta - z_0|} < 1\,, \qquad \forall \theta \in [0, 1]\,.$$

Dans l'expression

$$\int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{S(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k\right) d\zeta\,,$$

on peut donc intervertir prise d'intégrale curviligne et processus de sommation (d'après le théorème 3.7 du cours). La formule (4.14) résulte bien de la formule de Cauchy (4.11) et de cette interversion. $\diamondsuit$

Le point d'orgue de cette sous-section est le résultat essentiel suivant :

Théorème 4.5 *Les fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ sont les fonctions F à valeurs complexes, de classe C^1 dans cet ouvert, et de plus solutions de l'équation différentielle de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0$$

dans U.

Preuve.

• On a vu que la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est une fonction de classe C^1 dans le disque ouvert $D(0, R)$ qui vérifie de plus l'équation différentielle de Cauchy-Riemann (corollaire 4.2). Comme une fonction analytique dans un ouvert U est localement (au voisinage de tout point z_0 de U) la somme d'une série entière en les puissances de $z - z_0$ (par définition de l'analyticité), une telle fonction est de classe C^1 et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann au voisinage de tout point z_0 de U, donc en fait dans tout l'ouvert U (le fait d'être de classe C^1 et de vérifier l'équation de Cauchy-Riemann sont des propriétés locales). Une fonction analytique dans U est donc bien une fonction de classe C^1 solution de l'équation de Cauchy-Riemann.

• Soit maintenant F une fonction de classe C^1 dans U qui vérifie de plus l'équation de Cauchy-Riemann. Soit z_0 un point de U et r un nombre strictement positif tel que le disque fermé

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| \leq r\}$$

soit inclus dans U. Si l'on examine soigneusement la preuve du théorème 4.3, on constate que celle-ci n'utilise des propriétés de S (au travers de l'utilisation de la formule de Green-Riemann) que le fait que ce soit une fonction de classe C^1 qui vérifie l'équation de Cauchy-Riemann. Il résulte de cette remarque que la preuve du théorème 4.3 appliquée cette fois à la fonction F (à la place de S) permet de montrer que pour tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r)$, on a

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,,$$

où $\gamma_{z_0,r}$ désigne le chemin paramétré :

$$\gamma_{z_0,r} \ : t \in [0,1] \longmapsto z_0 + r\, e^{2i\pi t}\,.$$

En reprenant maintenant dans la foulée la preuve du théorème 4.4, on constate que, pour tout z dans le disque ouvert $D(z_0, r)$, on peut écrire

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta \Big)\, (z - z_0)^k\,, \tag{4.15}$$

ce qui montre que F se développe en série entière de puissances de $z - z_0$ au voisinage de z_0. Notons d'ailleurs au passage que le rayon de convergence de cette série entière $[a_n(z_0)X^n]$ telle que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\, (z - z_0)^k$$

au voisinage de z_0 est <u>au moins</u> égal à la distance de z_0 au complémentaire de l'ouvert U (dans le cadre du théorème 4.4, il était égal au moins à $R - |z_0|$, distance de z_0 au cercle de convergence de la série entière dont S représentait la somme). Une fonction de classe C^1 dans U et solution de l'équation de Cauchy-Riemann dans U est donc bien analytique dans cet ouvert. Ceci achève la preuve du second volet de notre théorème, et donc la preuve du théorème. $\diamondsuit$

Nous avons obtenu en prouvant le théorème 4.5 un résultat qui mérite d'être souligné ; il nous indique que la formule intégrale de Cauchy est valable dans un contexte plus général que celui où nous l'avons établie au théorème 4.3. On a en effet le :

Théorème 4.6 (formule intégrale de Cauchy, version générale) *Soit F une fonction analytique dans un ouvert U de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U et $r > 0$ un nombre strictement inférieur à la distance de z_0 au complémentaire de U. Pour tout z tel que $|z - z_0| < r$, on a*

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,,$$

où $\gamma_{z_0,r}$ désigne le chemin paramétré

$$\gamma_{z_0,r} \ : t \in [0,1] \longmapsto z_0 + re^{2i\pi t}$$

correspondant au bord du disque de centre z_0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

4.1.6 Opérations sur les fonctions analytiques

Toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ de fonctions analytiques dans un ouvert de $\mathbb{C}$ est une fonction analytique sur cet ouvert : cela résulte du fait que si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ sont des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ et λ, μ deux nombres complexes, alors la série entière $[(\lambda a_n + \mu b_n) z^n]_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence R avec de plus $R \geq \min(R_1, R_2)$.

Le produit de deux fonctions analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est encore une fonction analytique dans cet ouvert : cela résulte du fait que si $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ et $[b_n z^n]_{n\geq 0}$ sont des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$, la série entière produit de Cauchy

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n \right]_{n\geq 0}$$

a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ (car le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, voir la proposition 1.7).

En ce qui concerne la composition des fonctions analytiques, nous avons le résultat plus délicat suivant :

Proposition 4.5 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, F une fonction analytique dans U telle que $F(U) \subset V$, G une fonction analytique dans V ; alors la fonction $G \circ F$ est une fonction analytique dans U.*

Preuve. La fonction $G \circ F$ est une fonction de classe C^1 dans U (comme composée de fonctions de classe C^1, voir le cours de calcul différentiel MAT302). De plus, si z_0 est un point de U, le fait que F soit analytique au voisinage de z_0 nous permet d'écrire, pour $h \in \mathbb{C}$ de module assez petit,

$$F(z_0 + h) = F(z_0) + hA(z_0) + h\eta(|h|)\,, \tag{4.16}$$

où $A(z_0)$ est un nombre complexe et $\lim\limits_{t\to 0} \eta(t) = 0$ (cela résulte du fait que F se développe sous la forme $F(z_0 + h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\, h^k$ au voisinage de $h = 0$, il suffit

alors de poser $A(z_0) = a_1(z_0))$; on a aussi, puisque G est analytique au voisinage de $F(z_0) \in U$, que pour $H \in \mathbb{C}$ de module assez petit,

$$G(F(z_0) + H) = G(F(z_0)) + HB(F(z_0)) + H\epsilon(|H|) \tag{4.17}$$

où $B(z_0)$ est un nombre complexe et $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$ (cela résulte du fait que G se développe sous la forme $G(F(z_0) + H) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(F(z_0))\, H^k$ au voisinage de $H = 0$ dans $\mathbb{C}$, il suffit alors de poser $B(F(z_0)) = b_1(F(z_0)))$. En combinant (4.16) et (4.17), on voit que, si $h \in \mathbb{C}$ est de module assez petit

$$\begin{aligned} G(F(z_0 + h)) &= G\Big(F(z_0) + hA(z_0) + h\eta(|h|)\Big) \\ &= G\Big(F(z_0) + h(A(z_0) + \eta(|h|))\Big) \\ &= G(F(z_0)) + h\Big(A(z_0) + \eta(|h|)\Big)B(F(z_0)) + h\tilde{\epsilon}(|h|) \\ &= G(F(z_0)) + B(F(z_0))A(z_0)h + h\check{\epsilon}(|h|)\,, \end{aligned}$$

où $\lim_{t\to 0} \tilde{\epsilon}(t) = \lim_{t\to 0} \check{\epsilon}(t) = 0$, ce qui montre que $G \circ F$ est aussi solution de l'équation de Cauchy-Riemann dans U (il suffit, comme dans la preuve du corollaire 4.2, de constater la relation liant les dérivées partielles par rapport à la partie réelle et la partie imaginaire de l'"accroissement" complexe h). Le théorème 4.5 nous assure que $G \circ F$ est bien analytique dans U. $\diamondsuit$

4.1.7 Fonctions réelles analytiques sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Nous allons maintenant revenir au cadre réel.

Définition 4.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; une fonction* <u>*réelle analytique*</u> *dans I est une fonction de classe C^∞ sur I, à valeurs complexes* [1]*, et telle que pour tout point t_0 de I, f se développe en série entière de puissances de $(t-t_0)$ au voisinage de t_0, c'est-à-dire qu'il existe $\epsilon(t_0)$ strictement inférieur à la distance de t_0 au complémentaire de I et une série entière $[a_n(t_0)X^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence au moins égal à $\epsilon(t_0)$ telle que*

$$\forall t \in]t_0 - \epsilon(t_0), t_0 + \epsilon(t_0)[\,,\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0)(t - t_0)^k\,.$$

Si l'on se réfère au corollaire 4.1, on voit que nécessairement une fonction réelle analytique sur un intervalle I est indéfiniment dérivable sur cet intervalle, que de plus

$$a_p(z_0) = \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!} \qquad \forall p \geq 0$$

et que par conséquent la condition pour qu'une fonction C^∞ sur I soit réelle analytique sur cet intervalle est qu'elle coïncide au voisinage de tout point t_0 de I avec la somme de la série de Taylor en ce point t_0. Mais **<u>Attention !</u>**, on doit avoir

$$f(t_0 + u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p}(t_0)}{p!}\, u^k$$

[1] Attention à l'équivoque induite par la terminologie ambigüe "réelle analytique" !

au voisinage de $u = 0$, ce qui est beaucoup plus fort que d'avoir un développement de Taylor à tout ordre (ce qui est le cas pour toute fonction C^∞) en ce point t_0. Par exemple, la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ si } t \leq 0 \\ f(t) &= \exp(-1/t^2) \text{ si } t > 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont nulles en $t = 0$ (faire l'exercice en montrant par récurrence que f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et que la dérivée n-ème est nulle sur $]-\infty, 0]$ et de la forme $(P_n(t)/t^{3n})\exp(-1/t^2)$, où P_n est une fonction polynomiale de t, sur $]0, +\infty[$) ; cette fonction a, pour tout entier N, un développement de Taylor à l'ordre N en $t = 0$, à savoir

$$f(u) = 0 + 0 \times u + \cdots + 0 \times u^N + \mathbf{o}(t^N) = \mathbf{o}(t^N)\,.$$

La fonction f n'est pourtant pas analytique au voisinage de $t = 0$ car elle ne peut coïncider avec la somme de sa série de Taylor (ici la fonction nulle) au voisinage de 0 (car $\exp(-1/t^2) > 0$ si $t > 0$).

Les notions de fonction analytique dans un ouvert de $\mathbb{C}$ et de fonction réelle analytique sont reliées : si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $U \cap \mathbb{R} = I$ et F une fonction analytique dans U, alors la restriction de F à I est bien sûr une fonction réelle analytique dans I. On admettra que toutes les fonctions réelles analytiques dans I se réalisent ainsi ; on a en effet la proposition suivante (que l'on admettra) :

Proposition 4.6 *Une fonction f est réelle analytique dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ tel que $I = U \cap \mathbb{R}$ et une fonction F analytique dans U telle que la restriction de F à I soit f.*

Les sommes, produits, composées de fonctions réelles analytiques sont donc encore des fonctions réelles analytiques, ce qui nous permettra de construire plein de telles fonctions à partir de l'"herbier" détaillé dans la sous-section suivante.

Les fonctions réelles analytiques sont des êtres beaucoup plus "rigides " que les objets "souples" que sont les fonctions C^∞. Par exemple, si f est une fonction réelle analytique dans I non identiquement nulle, ses zéros sont nécessairement des points isolés de I, ce qui n'est pas le cas pour une fonction C^∞ (à laquelle on peut par exemple prescrire comme ensemble de zéros un sous-intervalle comme pour la fonction f définie en (4.18) sur $\mathbb{R}$). Ceci repose sur un argument de connexité et sera évoqué dans le cours de topologie MAP402.

4.1.8 Un "herbier" de fonctions réelles analytiques

Les exemples majeurs de fonctions réelles analytiques sont :

- les fonctions polynomiales de $t \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ;
- les fonctions rationnelles (quotients de fonctions polynomiales), hors bien sûr de l'ensemble des zéros du dénominateur ;
- l'exponentielle et les fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques (sur $\mathbb{R}$) ;
- la fonction logarithme népérien (sur $]0, +\infty[$) ;

- les fonctions du type $t \to (t-a)^\alpha$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ (sur l'intervalle $]a, +\infty[$) ;
- les fonctions trigonométriques inverses (sur $]-1,1[$ pour les fonctions Arcos, Arcsin, sur $\mathbb{R}$ pour Arctg) ;
- les fonctions trigonométriques hyperboliques inverses, Argch, Argsh, Argth, Argcoth dans les ouverts où elles sont définies (ces fonctions s'expriment à l'aide du logarithme et des fonctions puissance, entre autres des prises de radicaux) ;
- les fonctions obtenues comme sommes de séries entières solutions d'équations différentielles ordinaires comme il en apparaît souvent en mécanique ou en physique, on traitera l'exemple des équations de Bessel.

Revenons sur quelques uns de ces exemples :

a. La fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques ou trigonométriques hyperboliques

On rappelle que la fonction exponentielle est définie dans $\mathbb{C}$ comme la somme de la série entière $[z^n/n!]_{n\geq 0}$; on note cette fonction $z \to e^z$ ou $z \to \exp z$; on a donc, par définition

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\ ;$$

la série entière $[z^n/n!]_{n\geq 0}$ est de rayon de convergence $R = \infty$ (ce qui justifie que l'on puisse définir $\exp z$ pour tout z) et a trois particularités :

- elle coïncide avec sa série dérivée ;
- si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, le produit de Cauchy des séries numériques $[z_1^n/n!]_{n\geq 0}$ et $[z_2^n/n!]_{n\geq 0}$ est la série numérique $[(z_1+z_2)^n/n!]_{n\geq 0}$ (comme on le vérifie à partir de la formule du binôme), ce qui implique, grâce à la proposition 1.7, la formule

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,\ \exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)\ ; \tag{4.19}$$

- elle ne s'annule jamais (car $\exp z \times \exp(-z) = \exp(0) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$).

La première de ces propriétés explique que l'on rencontre très souvent la fonction exponentielle dans l'analyse des phénom'enes d'évolution par exemple en physique ou en biologie. Les deux dernières propriétés assurent, elles, que l'application exponentielle (et c'est là son intérêt pratique majeur cette fois comme outil de calcul) réalise un homomorphisme de $\mathbb{C}$ muni de l'addition dans le groupe $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls, muni, lui, de la multiplication.

La restriction de l'exponentielle à $\mathbb{R}$ est bien une fonction réelle analytique.

C'est aussi le cas des restrictions à $\mathbb{R}$ des quatre fonctions déjà rencontrées :

$$\begin{aligned}
z &\to \cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} \\
z &\to \sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} \\
z &\to \operatorname{ch} z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, z^{2k}
\end{aligned}$$

$$z \quad \to \quad \operatorname{sh} z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Les restrictions $\theta \to \cos\theta$ et $\theta \to \sin\theta$ des fonctions cos et sin à l'axe réel constituent un vecteur $\theta \to \vec{V}(\theta)$ de fonctions réelles analytiques, donc C^∞ sur $\mathbb{R}$, solution, comme on le vérifie immédiatement à partir du corollaire 4.1, du système différentiel à coefficients constants :

$$\vec{V}'(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \vec{V}(\theta)$$

avec la condition initiale

$$\vec{V}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Mais on sait aussi qu'un autre vecteur de fonctions C^1 solution (avec la même condition initiale) du même système différentiel sur $\mathbb{R}$ est le vecteur

$$\vec{V_0}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{COS}\,(\theta) \\ \mathrm{SIN}\,(\theta) \end{pmatrix}$$

où COS et SIN sont les fonctions trigonométriques usuelles (définies sur $[0, 2\pi[$ et prolongées par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$ tout entier) ; de l'unicité de la solution du système différentiel du premier ordre avec conditions initiales imposées, on déduit

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\,, \quad \cos\theta = \mathrm{COS}\,(\theta)$$

et de même

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\,, \quad \sin\theta = \mathrm{SIN}\,(\theta)\,.$$

La formule

$$\cos^2 z + \sin^2 z \equiv 1$$

continue à être valable dans tout le plan complexe (mais attention, il faut prendre garde au fait que les inégalités bien pratiques $|\cos z| \leq 1$ ou $|\sin z| \leq 1$ ne sont vérifiées que si z est réel !) et l'application

$$z \to (\cos z, \sin z)$$

paramètre le sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini comme

$$\Gamma := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\,;\, z_1^2 + z_2^2 = 1\}\,.$$

Les formules trigonométriques usuelles restent valables et les fonctions hyperboliques sont reliées aux fonctions trigonométriques via les deux relations

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(t) &= \cos(it) \\ \operatorname{sh}(t) &= \frac{\sin(it)}{i} = -i\sin(it)\,; \end{aligned}$$

si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on a en particulier les formules

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i\,\sin x \operatorname{sh} y \\ \sin(x+iy) &= \sin x\cos(iy) + \sin(iy)\cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y\,\cos x\,. \end{aligned}$$

Pour θ réel, on retrouve d'ailleurs les formules de Moivre :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,,$$

cas particulier de la formule immédiate :

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z\,.$$

Le nombre π est défini par le fait (par exemple) que $2i\pi$ et $-2i\pi$ soient les points les plus proches de l'origine (et distincts de 0) où la fonction

$$z \to F(z) = \exp z - 1$$

s'annule ; de tels points sont automatiquement imaginaires purs, isolés sur l'axe imaginaire pur et il y en a un (en fait deux par symétrie par rapport à l'axe réel) qui est le plus proche de 0 ; c'est ainsi que 2π est défini (donc à partir de la fonction exponentielle) et tout suit en cascade, en particulier le fait que 2π soit aussi le périmètre du cercle de rayon 1, ce qui est plus familier !

b. Le logarithme.

La série entière $[z^n/n]_{n\geq 1}$ a pour rayon de convergence 1 et est la série primitive de la série $[z^n]_{n\geq 1}$; comme

$$\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1}{1-z}\,,$$

la fonction

$$t \in]-1,1[\to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$$

est la primitive s'annulant en $t = 0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1-t}$$

sur $]-1,1[$; or, on connait cette primitive car

$$\int_0^t \frac{du}{1-u} = -\log(1-t)\,;$$

on a donc la formule

$$\forall t \in]-1,1[\,,\ \log(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\,;$$

cette formule subsiste (d'après la proposition 4.1) en $t = -1$ (où la série alternée $[(-1)^k/k]_{k\geq 1}$ converge) et l'on a donc aussi

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,.$$

Comme l'on a, pour tout $t_1, t_2 > 0$,

$$\log(t_1 t_2) = \log t_1 + \log t_2\,,$$

on a, pour tout $t_0 > 0$, pour tout h tel que $|h| < t_0$,

$$\log(t_0 + h) = \log\Big(t_0(1 + h/t_0)\Big) = \log t_0 + \log(1 + h/t_0) = \log t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{t_0^k}\, h^k\,.$$

La fonction log est donc réelle analytique sur $]0, +\infty[$ et se développe en série entière au voisinage de t_0 sous la forme

$$\log t = \log t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{t_0^k}\,(t - t_0)^k\,, \tag{4.20}$$

cette formule restant valable pour tout t tel que $|t - t_0| < t_0$.

c. Les fonctions puissance $(t - a)^\alpha$.

Si α est un nombre complexe, on a vu (dans la liste d'exemples de la section 4.1.1) que la série entière $[a_{\alpha,n}]_{n\geq 0}$, où

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

avait pour rayon de convergence $R = 1$; en calculant la série dérivée, on voit que la somme S_α de cette série vérifie dans $]-1, 1[$ l'équation différentielle du premier ordre :

$$(1 + t)S'_\alpha(t) = \alpha S_\alpha(t)\,.$$

On peut d'ailleurs prendre le problème à l'envers, c'est-à-dire chercher les séries entières $[a_n z^n]_{n\geq 0}$ de rayon de convergence R (*a priori* à déterminer) de manière à ce que, si $R > 0$, on ait, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$(1 + z)S_{\text{der}}(z) = \alpha S(z)$$

si S désigne la somme de la série et S_{der} celle de la série dérivée ; on retrouvera comme séries entières solutions les séries entières du type $[\lambda a_{\alpha,n} z^n]_{n\geq 0}$. Mais, sur $]-1, 1[$, intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$(1 + t)y' = \alpha y$$

ne pose aucun problème ; on trouve comme solutions

$$y(t) = \exp(\alpha \log(1 + t) + C) = e^C (1 + t)^\alpha\,,$$

où $C \in \mathbb{C}$ est une constante arbitraire ; comme $S_\alpha(0) = a_{\alpha,0} = 1$, on a

$$\forall t \in]-1, 1[\,,\ S_\alpha(t) = (1 + t)^\alpha\,.$$

Si maintenant a est un nombre réel et si $t_0 > a$, on peut remarquer que, pour tout h tel que $|h| < t_0 - a$, on a

$$(t_0 + h - a)^\alpha = (t_0 - a)^\alpha \Big(1 + \frac{h}{t_0 - a}\Big)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha,k}}{(t_0 - a)^{k-\alpha}}\, h^k\,;$$

ceci prouve que la fonction

$$t \to (t - a)^\alpha$$

est réelle analytique sur $]a, +\infty[$; mieux, pour tout $t_0 > a$, elle s'écrit dans l'intervalle $]a, 2t_0 - a[$ sous la forme

$$(t-a)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\alpha,k}}{(t_0-a)^{k-\alpha}} (t-t_0)^k$$

avec

$$a_{\alpha,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n \geq 1 \end{cases},$$

le rayon de convergence de la série $\left[a_{\alpha,n}/(t_0-a)^{n-\alpha}\right]_{n\geq 0}$ valant exactement $t_0 - a$.

d. Les fonctions trigonométriques inverses

La fonction $t \in [-1,1] \to \operatorname{Arcos} t$ est définie par l'équivalence

$$\Big((t \in [-1,1]) \text{ et } (y = \operatorname{Arcos} t)\Big) \Longleftrightarrow \Big((y \in [0,\pi]) \text{ et } (t = \cos y)\Big).$$

Compte tenu du fait que la fonction $t \in]-1,1[\longmapsto \operatorname{Arcos} t$ est la primitive valant $\pi/2$ en $t = 0$ de la fonction

$$t \in]-1,1[\to -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

(calcul de la dérivée d'une fonction inverse), on a, en prenant la série primitive de la série

$$[-a_{-1/2,n} z^{2n}]_{n\geq 0}$$

l'expression de $\operatorname{Arcos} t$ sur $]-1,1[$ (d'ailleurs avec le fait que cette fonction est bien réelle analytique sur cet intervalle) ; la formule est

$$\begin{aligned} \forall t \in]-1,1[,\ \operatorname{Arcos} t &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{-1/2,k} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - t - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

De même, la fonction $t \in]-1,1[\to \operatorname{Arcsin} t$, qui est liée à la précédente via la formule

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arcos} t + \operatorname{Arcsin} t = \frac{\pi}{2}$$

est aussi réelle analytique sur $]-1,1[$, avec

$$\forall t \in]-1,1[,\ \operatorname{Arcsin} t = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Enfin, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \operatorname{Arctg} t$$

est, on le sait, la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en $t = 0$ de la fonction

$$t \to \frac{1}{1+t^2};$$

en prenant la série primitive de la série entière $[(-1)^n z^{2n}]_{n\geq 0}$ (le rayon de convergence est 1), on déduit du corollaire 4.1 la formule

$$\forall t \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,;$$

cette formule reste d'ailleurs, du fait de la proposition 4.1, valable en $t = 1$.

En écrivant, pour tout $t_0, h \in \mathbb{R}$, la relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctg}(t_0+h) - \operatorname{Arctg} t_0 &= \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^h \frac{du}{(1+i(t_0+u))(1-i(t_0+u))} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^h \left(\frac{1}{1+it_0+iu} + \frac{1}{1-it_0-iu}\right) du \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1+it_0)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1-it_0)^{k+1}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k \frac{h^{k+1}}{(k+1)(1+it_0)^{k+1}}\right],
\end{aligned}$$

on voit que la fonction

$$t \to \operatorname{Arctg} t$$

est réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et telle que, si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{Arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0)(t-t_0)^k$$

pour $|t - t_0| < 1$, le rayon de convergence de la série $[a_n(t_0)z^n]$ étant toujours égal à 1 quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

e. Les fonctions hyperboliques inverses.

Comme on le sait, la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \operatorname{Argsh} t = \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \in \mathbb{R}$$

(inverse de la fonction $t \in \mathbb{R} \to \operatorname{sh} t = (e^t - e^{-t})/2 \in \mathbb{R}$) est la primitive (s'annulant en $t = 0$) de la fonction

$$t \to \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,;$$

on déduit ainsi (toujours du corollaire 4.1) que

$$\begin{aligned}
\forall t \in]-1,1[\,,\ \operatorname{Argsh} t &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{-1/2,k} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \\
&= t + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2k-1)}{2^k k!}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,.
\end{aligned}$$

Comme la fonction $t \to \operatorname{Arctg} t$, la fonction $t \to \operatorname{Argsh} t$ est une fonction réelle analytique sur $\mathbb{R}$ et telle que, si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{Argsh} t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0)(t-t_0)^k \tag{4.21}$$

pour $|t-t_0|<1$, le rayon de convergence de la série $[a_n(t_0)z^n]$ étant toujours égal à 1 quelque soit $t_0\in\mathbb{R}$; en effet, on écrit pour voir cela :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsh}(t_0+h)-\operatorname{Argsh}t_0 &= \int_{t_0}^{t_0+h}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\int_0^h\frac{du}{\sqrt{1+t_0^2+u^2+2t_0u}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}}\int_0^h\frac{1}{\left(1+\frac{u^2+2t_0u}{1+t_0^2}\right)^{1/2}}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}}\int_0^h\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\times3\times\cdots\times(2k-1)}{2^kk!}\left(\frac{u^2+2t_0u}{1+t_0^2}\right)^k\right)du\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+t_0^2}}\left(h+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1\times3\times\cdots\times(2k-1)}{2^kk!(1+t_0^2)^k}\int_0^h(u+2t_0)^ku^k\,dt\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne le développement voulu (4.21) au voisinage de $t_0\in\mathbb{R}$.

La fonction

$$t\in]1,+\infty[\to\operatorname{Argch}t\in]0,+\infty[$$

(inverse de la fonction ch : $t\in]0,+\infty[\to\operatorname{ch}(t)\in]1,+\infty[$) est définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\forall t\in]1,+\infty[\,,\ \operatorname{Argch}t=\int_1^t\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\log(t+\sqrt{t^2-1})$$

(on prolonge en $t=1$ en posant $\operatorname{Argch}1=0$) c'est encore une fonction réelle analytique sur $]1,+\infty[$; de même pour la fonction

$$t\in]-1,1[\to\operatorname{Argth}\,t=\int_0^t\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$$

qui admet sur $]-1,1[$ le développement :

$$\forall t\in]-1,1[\,,\ \operatorname{Argth}t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\,;$$

il s'agit encore ici d'une fonction réelle analytique sur l'intervalle $]-1,1[$ où elle est définie.

f. Recherche de sommes de séries entières solutions d'une EDO [2] ; l'exemple de Bessel

L'astronome et mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846 (que nous retrouverons dans la section suivante consacrée aux séries de Fourier) a donné son nom à famille d'équations différentielles ordinaires, dites de Bessel, du second ordre :

$$t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-\nu^2)y(t)=0\,. \qquad (*)$$

On les rencontre par exemple dans les problèmes de conduction de la chaleur (en thermodynamique) ou dans des problèmes classiques de mécanique.

Tentons ici un procédé standard, consistant à chercher (au moins formellement) une série entière $[a_nz^n]_{n\geq0}$ de rayon de convergence inconnu R (supposé *a priori*

[2] Équation Différentielle Ordinaire

strictement positif) et telle que sur $]-R,R[$, la somme S satisfasse l'équation (*). C'est le procédé que nous avons utilisé pour identifier dans l'exemple **c** la fonction $t \longmapsto S_\alpha(t) = (1+t)^\alpha$ avec son développement en série entière. Si

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\,,\ t \in]-R,R[\,,$$

on a, pour tout $t \in]-R,R[$, en utilisant le théorème 4.1,

$$\begin{aligned}
t^2 S''(t) &= t^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^k \\
tS'(t) &= t \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^k \\
t^2 S(t) &= t^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^k \\
-\nu^2 S(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\nu^2 a_k) t^k\,.
\end{aligned}$$

En reportant dans l'équation (*), on trouve que dire que S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation (*) revient à dire :

$$\forall t \in]-R,R[, \qquad -\nu^2 a_0 + a_1(1-\nu^2)t + \sum_{k=2}^{\infty} \Big[(k^2-\nu^2)a_k + a_{k-2}\Big] t^k = 0\,. \qquad (**)$$

On a affaire à deux types de situation :

1. Si ν n'est pas un entier relatif (donc $k^2 - \nu^2 \neq 0$ pour tout $k \geq 0$), on voit tout de suite que ces conditions impliquent (de proche en proche en commençant par $a_0 = a_1 = 0$) que tous les nombres a_p sont nuls, ce qui fait que la seule série entière solution de notre problème est la série identiquement nulle, ce qui n'est pas très intéressant (ceci peut toutefois être corrigé, voir la remarque 4.9 ci-dessous).

2. En revanche, les choses sont plus intéressantes si ν est un entier positif. Supposons que $\nu = p \in \mathbb{N}$. On voit dans ce cas que les nombres a_k sont tous nuls pour $k < p$; si l'on pose $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$, $a_p = 1$ et, pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
a_{p+2k+1} &= 0 \\
a_{p+2(k+1)} &= -\frac{a_{p+2k}}{(p+2(k+1))^2 - p^2} = -\frac{a_{p+2k}}{4(k+1)(p+(k+1))}\,,
\end{aligned}$$

on constate que tous les coefficients des diverses puissances de t dans l'expression formelle

$$-\nu^2 a_0 + a_1(1-\nu^2)t + \sum_{k=2}^{\infty} \Big[(k^2-p^2)a_k + a_{k-2}\Big] t^k = 0$$

sont nuls. D'autre part, comme

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{p+2(k+1)}|}{|a_{p+2k}|} = 0\,,$$

la règle de D'Alembert (voir la proposition 1.4 du chapitre 1, avec l'application qui l'illustre) assure que la série entière $[a_{p+2n}X^n]_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence $+\infty$; c'est donc aussi le cas de la série entière $[a_{p+2n}z^{2n}]_{n\geq 0}$. Sa somme vérifie :

$$S(t\,;p) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \left(1 - \frac{1}{1\times(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\times 2\times(p+1)(p+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \cdots\right), \quad \forall t\in\mathbb{R}\,,$$

soit $S(t\,;p) = p!\,J_p(t)$, où

$$J_p(t) := \left(\frac{t}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \qquad \forall t\in\mathbb{R}\,,$$

est la *fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier* p. Cette fonction est réelle analytique sur $\mathbb{R}$. En effet la fonction

$$z\in\mathbb{C} \longmapsto \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

est analytique sur $\mathbb{C}$ (somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$).

Remarque 4.9. En fait, l'approche dans le cas **1** peut être corrigée de manière à fournir une solution intéressante de (*) (autre que la solution identiquement nulle). Si ν est un nombre réel positif, on voit par le même procédé que celui développé ci-dessus (en la cherchant sous la forme $(t/2)^\nu S(t)$, où S est la somme d'une série entière de rayon de convergence supposé *a priori* positif) qu'une solution de l'équation $(*)$ sur $]0,+\infty[$ est donnée par

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \qquad \forall t\in]0,+\infty[$$

où

$$\Gamma\ : x>0 \longmapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

est la fonction interpolant la prise de factorielle sur $]0,+\infty[$ ($\Gamma(p) = (p-1)!$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x>0$) introduite dans l'exemple 2.6 (section 2.4 du chapitre 2). La fonction J_ν (définie aisi sur $]0,+\infty[$) est la *fonction de Bessel de première espèce d'ordre* ν. On la retrouve très fréquemment en physique (en thermodynamique par exemple) ou en mécanique car elle est solution sur l'intervalle ouvert des temps strictement positifs de l'équation de Bessel (*). On peut d'ailleurs aussi prendre pour ν un nombre complexe de partie réelle positive et tout marche de la même manière. La fonction J_ν ainsi construite est réelle analytique sur $]0,+\infty[$.

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Le spectre d'une fonction T-périodique

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on suppose deux choses sur cette fonction :

– elle est périodique de période T, ce qui signifie

$$\forall t\in\mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)$$

(la fonction f correspond par exemple à un signal temporel périodique) ;

– f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[0,T]$, donc par périodicité sur tout segment $[t_0, t_0+T]$, donc en fait sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}_T$ constitué de telles fonctions peut être équipé d'une forme hermitienne positive (se reporter au cours de MAT301 pour la définition de cette notion, le point nouveau ici étant que $\mathcal{F}_T$, espace de fonctions, n'est pas de dimension finie)

$$f \to \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt\,, \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

(par changement de variable et T-périodicité) ; cette forme hermitienne, de forme polarisée la forme sesquilinéaire :

$$(f,g) \to \langle f\,,\, g\rangle_T := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\overline{g(t)}dt \tag{4.22}$$

correspond du point de vue de la physique à la quantification de l'énergie ; ce n'est pas une forme définie car il est possible que

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$$

sans que f soit nulle en tout point (par exemple f peut fort bien être nulle partout sur $[0,T]$, sauf en un nombre fini de points de $[0,T]$). Cependant, si l'on restreint cette forme quadratique au sous-espace des fonctions continues T-périodiques, la restriction de cette forme est bien une forme définie positive sur ce nouvel espace vectoriel.

Le système des fonctions T-périodiques

$$t \to e_{T,n}(t) := \exp(\frac{2i\pi nt}{T})\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

dites aussi <u>*harmoniques fondamentales complexes de période T*</u>, est un système orthonormé pour la forme hermitienne (4.22) car

$$\forall k,l \in \mathbb{Z}\,,\ \int_0^T \exp(\frac{2i\pi(k-l)t}{T})dt = \begin{cases} T \text{ si } k=l \\ \frac{T}{2i\pi(k-l)}\left[\exp\left(\frac{2i\pi(k-l)}{T}\right)\right]_0^T = 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

Le défaut cependant du système orthonormé $(e_{T,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est qu'il s'agit d'un système de fonctions T-périodiques à valeurs complexes, ce qui peut compliquer inutilement les choses lorsque l'on envisage la décomposition suivant un tel système des fonctions réelles (parmi celles de $\mathcal{F}_T$, ces fonctions forment un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{F}_T^{\mathbb{R}}$) ; on préfère utiliser alors un autre système orthonormé (toujours pour la même forme hermitienne (4.22) notée $\langle\,,\,\rangle_T$), celui constitué des fonctions T-périodiques suivantes :

$$e_{T,0} \equiv 1\,, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,, \begin{cases} f_{T,n} := \sqrt{2}\,\cos\frac{2\pi nt}{T} \\ g_{T,n} := \sqrt{2}\,\sin\frac{2\pi nt}{T}\,; \end{cases}$$

le système constitué de $e_{T,0}$ et des $f_{T,n}$, $g_{T,n}$ pour $n \geq 1$ est dit système des <u>*harmoniques fondamentales réelles de période T*</u>.

On définit ainsi les notions de <u>*spectre réel*</u> et <u>*spectre complexe*</u> d'un élément de l'espace $\mathcal{F}_T$.

Définition 4.6 *Le* <u>*spectre complexe*</u> *d'un élément $f \in \mathcal{F}_T$ est la collection (indexée par $\mathbb{Z}$) des nombres $c_{T,n}[f]$ (*<u>*coefficients de Fourier complexes*</u> *de f) définis par*

$$c_{T,n}[f] := \langle f \, , \, e_{T,n} \rangle_T \, , \quad n \in \mathbb{Z} \, ;$$

le spectre réel du même élément f est, lui, la double collection (indexée par $\mathbb{N}$) des nombres $\alpha_{T,0}[f]$ et $\alpha_{T,n}[f], \beta_{T,n}[f]$ pour $n \geq 1$ (<u>*coefficients de Fourier réels*</u> *de f) définis par*

$$\alpha_{T,0}[f] = c_{T,0}[f] \, , \quad \alpha_{T,n} := \langle f \, , \, f_{T,n} \rangle_T \, , \quad \beta_{T,n} := \langle f \, , \, g_{T,n} \rangle_T \quad \forall \, n \geq 1 \, .$$

Remarque 4.10. Si f est à valeurs réelles , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{T,-n} = \overline{c_{T,n}} \, ;$$

pour une telle fonction ; les coefficients de Fourier réels sont (comme on pourrait s'y attendre car là réside la motivation pour l'utilisation des T-harmoniques fondamentales réelles au lieu de complexes) naturellement réels.

La transformation d'une fonction (le physicien préfèrera dire un signal) en son spectre est une opération certes mathématique, mais en fait réalisable physiquement via le mécanisme optique de diffraction. Comme toute transformation physique, on s'attend donc à ce que le passage d'une fonction à son spectre se réalise sans apport externe d'énergie (on verra même à la section 4.2.3 qu'il y a fait conservation de l'énergie). Nous pouvons d'ores et déjà énoncer le résultat suivant (allant précisément dans le sens de cette interprétation physique).

Théorème 4.7 [inégalité de Bessel] *Soit f un élément de $\mathcal{F}_T$ et n un entier naturel strictement positif ; on a*

$$\sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 = |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{n} \Big(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2 \Big) \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \, . \tag{4.23}$$

Preuve. On voit immédiatement que la fonction continue T périodique $S_n[T; f]$ définie

$$\begin{aligned} S_n[T; f](t) &:= \sum_{k=-n}^{k=n} c_{T,k}[f] \, e_{T,k}(t) \\ &= \alpha_{T,0}[f] \, e_{T,0}(t) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_{T,k}[f] \, f_{T,k}(t) + \beta_{T,k}[f] \, g_{T,k}(t) \Big) \end{aligned}$$

est telle que $S_n[T; f]$ et $f - S_n[T; f]$ soient orthogonales relativement à la forme hermitienne positive (et vérifiant la symétrie hermitienne) (4.22) ; d'après le théorème de Pythagore, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt &= \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T; f](t)|^2 \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T; f](t) - f(t)|^2 \, dt \\ &\geq \frac{1}{T} \int_0^T |S_n[T; f](t)|^2 \, dt \, ; \end{aligned}$$

or le fait que les T-harmoniques fondamentales (tant réelles que complexes) forment un système orthonormé relativement à la forme (4.22) assure :

$$\begin{aligned}\int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\,dt &= \sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 \\ &= |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{n}\Big(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2\Big)\,.\end{aligned}$$

L'inégalité de Bessel est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

Remarque 4.11. Une conséquence de l'inégalité de Bessel est que

$$\lim_{|n|\to\infty} |c_{T,n}[f]| = \lim_{n\to\infty} |\alpha_{T,n}[f]| = \lim_{n\to\infty} |\beta_{T,n}[f]| = 0\,,$$

ce qui signifie que le spectre d'une fonction f de $\mathcal{F}_T$, tant réel que complexe, "s'estompe" à l'infini ; c'est ce que l'on appelle la *propriété de Riemann-Lebesgue*.

4.2.2 Série de Fourier d'une fonction f

Si f est un élément de $\mathcal{F}_T$, c'est-à-dire une fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[0,T]$ (donc sur tout segment de $\mathbb{R}$) on appelle la suite de fonctions

$$(S_n[T;f])_{n\geq 0}$$

(toutes ces fonctions sont définies, T périodiques et continues sur $\mathbb{R}$, ce sont d'ailleurs des *polynômes trigonométriques*) suite des *sommes partielles de Fourier* de f. Comme les $S_n[T;f]$ apparaissent comme le résultat d'un processus de capitalisation, on note aussi cette suite de fonctions $[S_n[T;f]]_{n\geq 0}$ et on l'appelle *série de Fourier de f*.

L'idée de base du mathématicien français Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830 (sur laquelle repose l'étude des phénomènes physiques oscillants) est qu'en un sens à préciser, une fonction T-périodique est "somme" de sa série de Fourier, ce qui signifie heuristiquement que tout phénomène physique 1-dimensionel T-périodique se réalise comme un empilement de T-harmoniques fondamentales complexes (resp. réelles), affectées de coefficients correspondant précisément aux coefficients de Fourier complexes (resp. réels). C'est cette idée heuristique que nous allons préciser de manière mathématiquement rigoureuse dans cette sous-section.

Pour simplifier ce que l'on fera par la suite, on supposera $T = 2\pi$ (cas auquel on peut toujours se ramener lorsque $f \in \mathcal{F}_T$ en remplacant f par $t \to f(Tt/2\pi)$) ; on notera alors $S_n[2\pi;f]$ simplement $S_n[f]$ (pour $n \in \mathbb{N}$).

Exemple 4.6. Soit f la fonction 2π-périodique (dont le graphe se présente comme une succession de "dents de scie", voir la figure 4.4 ci-dessous) définie par

$$f(t) = t - E(\frac{t}{2\pi})$$

où $E(u)$ désigne, si $u \in \mathbb{R}$, la partie entière de u, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à u ($E(.9999) = 0$, $E(1.0001) = 1$) ;

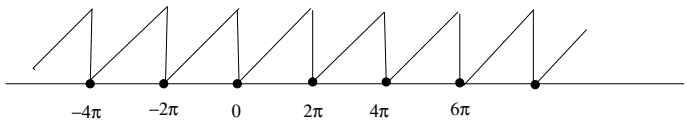

Fig. 4.4 – La fonction "en dents de scie"

les coefficients de Fourier complexes de f se calculent immédiatement ; on a :

$$c_0[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

et, en utilisant une intégration par parties

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*\,,\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}dt = \left[t\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \frac{i}{n}\,;$$

on a donc pour cet exemple :

$$\begin{aligned} S_N[f](t) &= \pi + \sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{k=n} \frac{i}{k}e^{ikt} \\ &= \pi + \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}(e^{ikt} - e^{-ikt}) \\ &= \pi - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}\,. \end{aligned}$$

Notons que la convergence (simple) de la suite des sommes partielles de Fourier se trouve de fait assurée par le critère d'Abel. Nous verrons dans cet section que nous avons un résultat général sur le comportement asymptotique de la série de Fourier d'une fonction T-périodique. C'est précisément le théorème de Dirichlet ci-dessous qui précise cela.

Un calcul très simple, basé sur l'utilisation de l'identité

$$(1 + X + \cdots + X^n)(1 - X) = 1 - X^{n+1}$$

et sur les formules classiques de trigonométrie, conduit à

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad S_n[f](t) &= \sum_{k=-n}^{k=n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}du\right)e^{ikt} \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik(t-u)}\right]du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik(t-u)}\right) - 1\right)\right]du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{i(n+1)(t-u)}}{1-e^{i(t-u)}}\right] - 1\right)\right]du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left[e^{-i\frac{n(t-u)}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)(t-u)}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}}\right] - 1\right)\right]du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\cos\frac{n(t-u)}{2}\sin\frac{(n+1)(t-u)}{2}}{\sin\frac{t-u}{2}} - 1\right)\right]du \\ &= \int_0^{2\pi} f(u)D_n(t-u)\,du\,, \end{aligned}$$

où D_n est la fonction continue 2π-périodique continue définie par

$$D_n(t) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \neq 0 \text{ mod. } 2\pi \\ \frac{2n+1}{2\pi} & \text{si } t = 0 \text{ mod. } 2\pi\,. \end{cases}$$

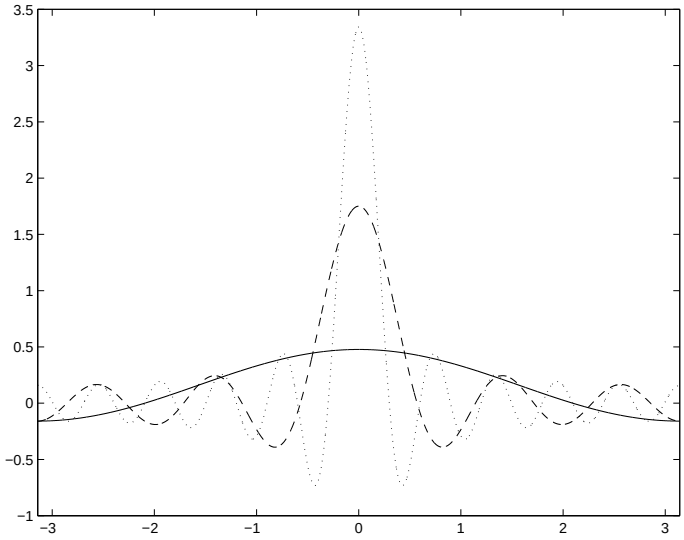

FIG. 4.5 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de D_n, $n = 1, 5, 10$

Cette fonction D_n, dont nous avons représenté le graphe pour diverses valeurs de n ($n = 1, 5, 10$) sur la figure 4.5, est appelée <u>*noyau de Dirichlet*</u> (d'ordre n), la terminologie faisant référence à l'analyste et théoricien des nombres allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, qui l'introduisit et le manipula en 1828 ; le graphe sur $[-\pi, \pi]$ présente un lobe central et des lobes latéraux ; on remarque que l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction D_n vaut 1, mais que cette fonction n'est pas positive, ce qui représentera, on le verra un peu plus loin, un handicap sérieux pour le comportement de la suite de fonctions $(S_n[f])_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers l'infini. Étant donnée une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$, la question se pose naturellement de savoir si la suite de fonctions $(S_n[f])_{n\geq 0}$ converge (et comment) vers la fonction f ; il s'agit là d'une question pratique importante car l'on peut voir la fonction $S_n[f]$ comme une fonction ayant même coefficients de Fourier complexes que f en deçà du seuil n, et ayant des coefficients de Fourier complexes nuls au dela, ce qui signifie concrètement que $S_n[f]$ est obtenue à partir de f en "tuant" les composantes "hautes-fréquences" présentes dans f. Si par exemple, f est le signal audio consistant en la lecture d'un vieil enregistrement, on connait bien cette opération pratique (le "repiquage" de vieux disques) qui consiste à gommer artificiellement le bruit correspondant précisément aux composantes hautes-fréquences.

Prenons pour f la fonction 2π-périodique f_0 valant 1 sur $[-\pi, 0[$ et 0 sur $[0, \pi[$; comme on le voit sur la figure 4.6, la suite $(S_n[f])_{n\geq 0}$ semble converger (mais seulement simplement, comme on le voit en regardant les graphes de $S_n[f]$ sur $[-\pi, \pi]$ pour $n = 10, 20$) vers la fonction 2π-périodique définie par

$$g(t) = \begin{cases} 1/2 \text{ si } t = -\pi \text{ et } t = 0 \\ 1 \text{ si } t \in]-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } t \in]0, \pi[\, . \end{cases}$$

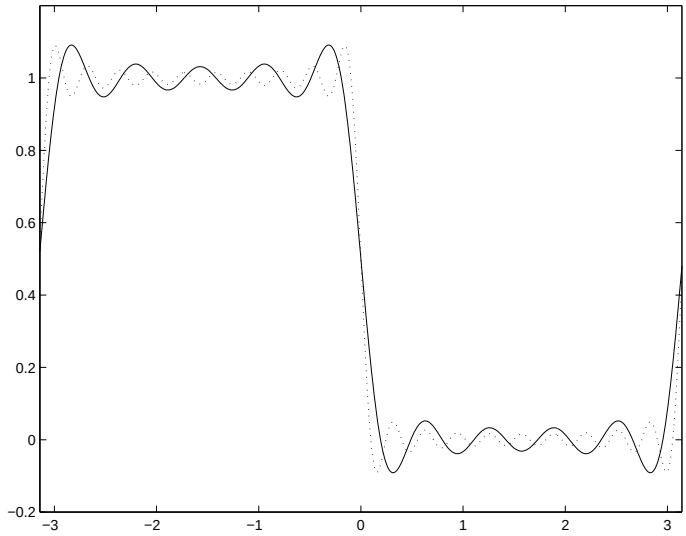

FIG. 4.6 – Phénomène de Gibbs pour la fonction f_0

Le fait qu'il n'y ait que simple convergence est un handicap pratique important : ce phénomène, dit *phénomène de Gibbs*, se traduit par un "rehaussement" de f au niveau de ses discontinuités lorsque l'on en "coupe" les composantes "hautes-fréquences" ; on parle en électronique d'*aliasing* et c'est un phénomène que l'on corrige grâce à l'effet Döppler.

Le résultat de convergence mis malgré tout en évidence ci-dessus (même si la convergence n'est pas uniforme comme le montre l'exemple utilisé sur la figure 4.6) est un cas particulier d'un résultat plus général, traduisant le comportement ponctuel de la suite $(S_n[f])_{n\geq 0}$; c'est le *théorème de Dirichlet* :

Théorème 4.8 [théorème de Dirichlet] *Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}_T$ et $(S_n([T;f]))_{n\geq 0}$ la suite de ses sommes partielles de Fourier ; soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que f ait une dérivée à droite et une dérivée à gauche en t_0 ; alors*

$$\lim_{n\to\infty} S_n[T;f](t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$$

où $f(t_0^-)$ (resp. $f(t_0^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f en t_0. La suite $(S_n[T,f])_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction

$$t \to \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

sur l'ensemble des nombres réels t en lesquels f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Preuve. On suppose pour simplifier les choses que $T = 2\pi$. Comme

$$\int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} D_n(u)du = 1$$

et que D_n est paire, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& S_n[f](t_0) - \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} \\
= & \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(t_0+u) - \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} \right) D_n(u)\, du \\
= & \int_0^{\pi} \Big((f(t_0+u) - f(t_0^+) + f(t_0-u) - f(t_0^-)) \Big) D_n(u)\, du \\
= & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \Big((f(t_0+u) - f(t_0^+) + f(t_0-u) - f(t_0^-)) \Big) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\, du\,.
\end{aligned}$$

Mais la fonction g définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$u \to g(u) = \begin{cases} \dfrac{f(t_0+u) - f(t_0^+) + f(t_0-u) - f(t_0^-)}{\sin\frac{u}{2}} \text{ si } u \in]0, \pi[\\ 2(f'_d(t_0) - f'_g(t_0)) \text{ si } t = 0 \\ 0 \text{ si } u \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

se prolonge par 2π-périodicité en un élément de $\mathcal{F}_{2\pi}$; d'après la propriété de Riemann-Lebesgue (remarque 4.11), la suite de nombres

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right] du$$

tend vers 0 (comme la suite des coefficients de Fourier complexes ou les suites de coefficients de Fourier réels de la fonction g) et le théorème de Dirichlet en résulte donc. $\diamondsuit$

Exemple 4.7. Reprenons l'exemple de la fonction "en dents de scie" définie par $t \longmapsto f(t) = t - E(\frac{t}{2\pi})$ introduit dans l'exemple 4.6. Cette fonction 2π-périodique (continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$) admet une dérivée à gauche et à droite en tout point $t \in \mathbb{R}$. En appliquant le théorème de Dirichlet. on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}\,,\ t - E(t/2\pi) = \pi + i \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{k} = \pi - 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k}\ ;$$

pour $t \equiv 0$ (modulo 2π), le théorème de Dirichlet se retrouve bien car le second membre de l'identité ci-dessus vaut π, soit $(f(t^+) + f(t^-))/2$.

On pourrait penser à juste titre que la raison du mauvais comportement de la suite des sommes partielles de Fourier (le fait que ce comportement se trouve par exemple entaché du désagréable phénomène de Gibbs) puisse être lié au fait que l'on coupe trop "brutalement" les T-harmoniques de f ayant une fréquence dépassant $2\pi n/T$; un moyen de couper plus "en douceur" est de considérer (pour $n \geq 1$) la suite de polynômes trigonométriques $(T_n[T; f])_{n\geq 1}$, où :

$$t \to T_n[T; f](t) := \sum_{k=-n-1}^{k=n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_{T,k}[f]\, e^{2i\pi kt/T} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k[f; T](t)\,.$$

On appelle $T_n[T; f]$ la n-ème <u>*somme de Féjer*</u> de f (somme introduite en 1900 par le mathématicien hongrois Lipót Féjer, 1880-1959) ; cette somme de Féjer se calcule

comme se calculait la n-ème somme partielle de Fourier $S_n[T;f]$; pour simplifier les choses, on se contentera de faire le calcul dans le cas $T = 2\pi$ (on note alors $T_n[f] = T_n[2\pi; f]$. On a

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}\,, \qquad T_n[f](t) &= \sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1} \frac{n-|k|}{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}du\right)e^{ikt} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n-1}^{k=n-1}(n-|k|)e^{ik(t-u)}\right]du \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(u)\left[\frac{1}{2\pi}\left(2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{ik(t-u)}\right)-n\right)\right]du\,.
\end{aligned}$$

Or, pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{ik\theta}\right) - n = n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{d}{d\theta}[\Psi_{n-1}(\theta)]$$

avec

$$\Phi_{n-1}(\theta) := 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right] - 1 = \frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(voir le calcul du noyau de Dirichlet D_{n-1} fait précédemment) et

$$\begin{aligned}
\Psi_{n-1}(\theta) := 2\,\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right] &= 2\,\mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right] \\
&= 2\,\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}}\,\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) \\
&= \frac{2\sin\frac{(n-1)\theta}{2}\,\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= -\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right]-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}\,.
\end{aligned}$$

On a donc, toujours pour θ réel et non congru à 0 (modulo 2π)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}[\Psi_{n-1}(\theta)] &= n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\
&\qquad - \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right]\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= n\Phi_{n-1}(\theta) + \frac{\cos(n\theta)-1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= n\Phi_{n-1}(\theta) - \frac{\sin^2\frac{n\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,.
\end{aligned}$$

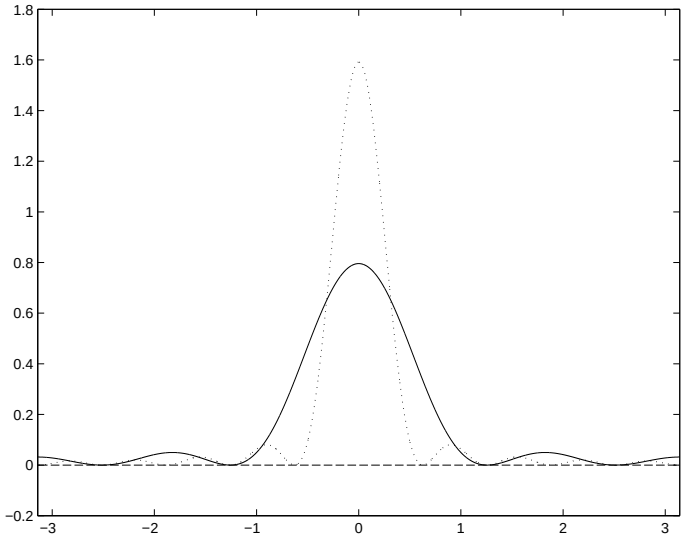

FIG. 4.7 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de K_n, $n = 5, 10$

Finalement, tous calculs faits, on trouve

$$T_n[f](t) = \int_0^{2\pi} f(u) K_n(t-u)\, du$$

avec

$$K_n(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{k=n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{int} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\, n} \left(\dfrac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right)^2 \text{ si } t \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ \frac{n}{2\pi} \text{ si } t \equiv 0 \pmod{2\pi}\,. \end{cases} \tag{4.24}$$

Ce nouveau noyau K_n, dit aussi <u>*noyau de Féjer*</u> est toujours d'intégrale 1 sur $[0, 2\pi]$, mais a cette particularité essentielle qui le différencie du noyau de Dirichlet qui est le fait que K_n est un noyau positif. Pour les valeurs de $n = 5, 10$, on a représenté sur la figure 4.7 les graphes des fonctions K_n ; on remarque que, à valeurs de n égales, le lobe central est plus "enflé" qu'il ne l'est pour le noyau D_n de Dirichlet. Mais encore une fois, le phénomène le plus frappant est la positivité du noyau K_n. Si l'on utilise la suite $(T_n[f])_{n\geq 1}$ pour approcher une fonction 2π-périodique continue par morceaux f, on voit cette fois que l'approximation, même si elle est plus lente, n'est plus cette fois entachée du phénomène de Gibbs ; c'est ce que l'on voit par exemple sur la figure 4.8, où nous avons approché par la suite $(T_n[f])_{n\geq 1}$ la fonction 2π périodique f_0 valant 1 sur $[-\pi, 0[$ et 0 sur $[0, \pi[$.

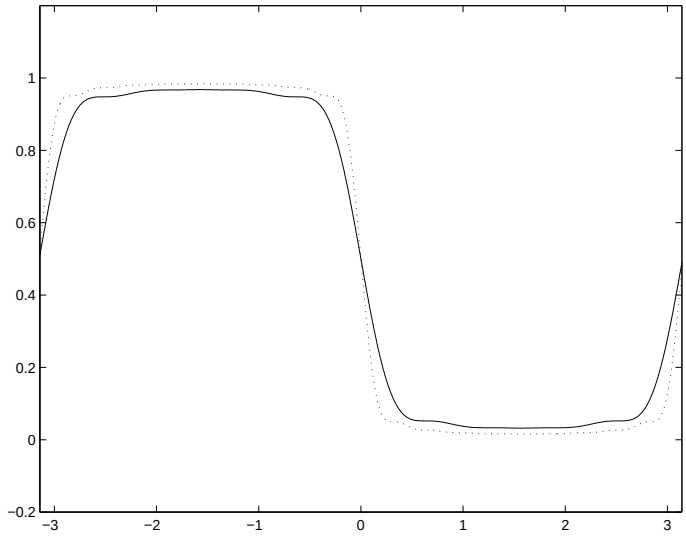

FIG. 4.8 – Graphes sur $[-\pi, \pi]$ de $T_n[f_0]$, $n = 5, 10$

De fait, on a dans ce cadre un résultat plus satisfaisant que le théorème de Dirichlet, à savoit le <u>*théorème de Féjer*</u> :

Théorème 4.9 *Soit f un élément de $\mathcal{F}_T$; la suite de fonctions*

$$(T_n[T; f])_{n\geq 1}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ g(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))\,,$$

où $f(t^-)$ (resp. $f(t^+)$) désigne la limite à gauche (resp. à droite) de f en t. De plus, si f est continue et T-périodique, la suite de fonctions $(T_n[T; f])_{n\geq 1}$ (dite suite des <u>sommes de Féjer</u> de f) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On raisonne pour simplifier avec $T = 2\pi$; si l'on forme la différence entre $g(t)$ et $T_n[f](t)$, on remarque que, comme K_n est d'intégrale 1 sur $[-\pi, \pi]$ et est une fonction paire, cette différence s'écrit :

$$T_n[f](t) - g(t) = \int_0^\pi K_n(u)(f(t+u) + f(t-u) - 2g(t))\, du\,.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\epsilon, t) > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, \eta(\epsilon, t)]$, on ait

$$|f(t+u) + f(t-u) - 2g(t)| \leq \epsilon\,;$$

On écrit donc

$$\begin{aligned} T_n[f](t) - g(t) &= \int_0^{\eta(\epsilon,t)} K_n(u)(f(t+u) + f(t-u) - 2g(t))\, dt \\ &\quad + \int_{\eta(\epsilon,t)}^{\pi} K_n(u)(f(t+u) - f(t-u) - 2g(t))\, dt\,. \end{aligned}$$

Comme la fonction f est, sur $[t-\pi, t+\pi]$, limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, la fonction f est bornée en module par une constante M sur $[t-\pi, t+\pi]$; comme K_n est positive et d'intégrale 1 sur $[t-\pi, t+\pi]$, on a donc, vu l'expression explicite (4.24) de K_n,

$$\begin{aligned} |T_n[f](t) - g(t)| &\leq \epsilon + \frac{4M}{2\pi\, n} \int_{\eta(t,\epsilon)}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{u}{2}}\, du \\ &\leq \epsilon + \frac{4M}{2\pi\, n} \frac{\pi}{\sin^2 \frac{\eta(t)}{2}} \,; \end{aligned}$$

si n est assez grand, cette quantité est majorée par 2ϵ et peut donc être rendue arbitrairement petite, ce qui prouve bien que la suite $(T_n[f](t))_{n\geq 1}$ converge bien vers $g(t)$; on infirme ainsi la première partie du théorème de Féjer.

En ce qui concerne la seconde partie, on remarque que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $g = f$ et de plus, puisque f est uniformément continue sur le segment fermé borné $[-2\pi, 2\pi]$, il existe, étant donné $\epsilon > 0$, un réel $\eta = \eta_\epsilon \in]0, \pi]$ tel que

$$\forall\, t \in [-\pi, \pi]\,,\ \forall\, u \in [0, \eta_\epsilon]\,,\ |f(t+u) + f(t-u) - 2f(t)| \leq \epsilon\,;$$

en reprenant les majorations ci-dessus, on voit que si n est choisi assez grand, alors

$$\forall\, t \in [-\pi, \pi]\,,\ |T_n[f](t) - f(t)| \leq 2\epsilon\,,$$

ce qui montre bien la convergence uniforme de $T_n[f]$ vers f sur $[-\pi, \pi]$, donc sur $\mathbb{R}$ (par périodicité). Ceci prouve le second volet du théorème de Féjer. $\diamondsuit$

On vient de voir que la l'approximation d'une fonction continue T périodique par ses sommes de Féjer $T_n[T; f]$ se faisait uniformément sur $\mathbb{R}$; mais on sait aussi (de par le théorème de Dirichlet) que si f admet de plus en tout point une dérivée à gauche et à droite, alors, il y a convergence simple de la suite des sommes de Fourier $(S_n[T; f])_{n\geq 0}$ vers la fonction $t \to (f(t^-) + f(t^+))/2$ qui dans ce cas (f continue) coïncide avec la fonction f. Les deux résultats se combinent en l'intéressant (et souvent bien utile) proposition suivante :

Proposition 4.7 *Soit f une fonction continue et T-périodique telle qu'il existe une subdivision*

$$a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_N = T$$

avec f de classe C^1 sur $[a_j, a_{j+1}]$ pour tout $j = 0, ..., N-1$ (on dit qu'une telle fonction est une fonction T-périodique <u>continue et C^1 par morceaux</u>) ; alors la série trigonométrique

$$[u_{T,n}(t)]_{n\geq 0}$$

où

$$u_{T,k}(t) := \begin{cases} \alpha_{T,0}[f] \text{ si } k = 0 \\ \sqrt{2}\Big(\alpha_{T,k}[f] \cos \frac{2\pi k t}{T} + \beta_{T,k}[f] \sin \frac{2\pi k t}{T}\Big) \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$$

(les sommes partielles de cette série sont les sommes de Fourier $t \to S_n[T; f](t)$) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et de somme la fonction f ; on peut dans ce

cas écrire par conséquent sans aucune ambigüité les formules qu'attendait Fourier, à savoir :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{T,k}[f]\, e^{2i\pi kt/T} \\ &= \alpha_{T,0}[f] + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_{T,k}[f]\,\cos\frac{2\pi kt}{T} + \beta_{T,k}[f]\,\sin\frac{2\pi kt}{T}\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Preuve. On prend $T = 2\pi$ pour simplifier et l'on note dans ce cas $c_k[f]$ (resp. $\alpha_k[f]$ et $\beta_k[f]$) les coefficients de Fourier complexes (resp. réels). Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on obtient en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}c_k[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\Big[f(t)\frac{e^{-ikt}}{(-ik)}\Big]_{a_k}^{a_{k+1}} - \frac{i}{k}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\,e^{-ikt}\,dt\Big) \\ &= -\frac{i}{k}\,c_k[f'] + \frac{i}{k}(f(2\pi) - f(0)) \\ &= -\frac{i}{k}\,c_k[f']\end{aligned}$$

où l'on note encore f' une fonction 2π-périodique continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ définie par $g(t) = f'(t)$ hors des points de subdivision $a_0, ..., a_N$ (la valeur en ces points n'affecte pas la définition par une intégrale des coefficients de Fourier $c_k[f']$). D'après l'inégalité de Bessel (théorème 4.7), on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k[f]|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt\,;$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle, *i.e*

$$a_1b_1 + \cdots + a_Nb_N \le \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_N^2}\,\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_N^2}$$

si les a_k et les b_k sont des nombres réels positifs, on a, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p \ge 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{p\le|k|\le q} |c_k[f]| &= \sum_{p\le|k|\le q}\frac{|c_k[f']|}{|k|} \le \Big(\sum_{p\le|k|\le q}|c_k[f']|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{p\le|k|\le q}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\sum_{p\le|k|\le q}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\,;\end{aligned}$$

il résulte de la convergence de la série de Riemann $[1/k^2]_{k\ge1}$ que si p est assez grand, alors, pour tout $q > p$, on a

$$\sum_{p\le|k|\le q} |c_k[f]| \le \epsilon\,,$$

où ϵ est arbitraire ; ceci prouve la convergence de la suite à termes positifs

$$\left(\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k[f]|\right)_{n\geq 0}$$

(car le critère de Cauchy pour les suites numériques est satisfait) et, par voie de conséquence, la convergence absolue des séries $[\alpha_k[f]]_{k\geq 0}$ et $[\beta_k[f]]_{k\geq 1}$: en effet, on a, pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\alpha_k[f] := \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_k[f] + c_{-k}[f]) \\
\beta_k[f] := \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt &= \frac{i}{\sqrt{2}}(c_k[f] - c_{-k}[f])\,,
\end{aligned}$$

d'où les majorations :

$$\forall\, k \geq 1\,,\ \max(|\alpha_k[f]|, |\beta_k[f]|) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(|c_k[f]| + |c_{-k}[f]|)\,.$$

La série trigonométrique $[u_{2\pi,n}(t)]_{n\geq 0}$, dont la n-ème somme partielle est

$$S_n[f]\ : t \to \alpha_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k[f]\cos(kt) + \beta_k[f]\sin(kt))\,,$$

est donc bien normalement convergente sur $\mathbb{R}$; on sait que la somme vaut f d'après le théorème de Dirichlet. La proposition est ainsi démontrée. $\diamondsuit$

4.2.3 Conservation de l'énergie et théorème de Plancherel

La transformation de Fourier (transformant une fonction T-périodique en son spectre) correspond aussi à une transformation physique : c'est l'opération de diffraction au travers d'une lentille qui la matérialise en optique ; il est donc tout à fait naturel que cette transformation préserve l'énergie. Ce principe (de conservation d'énergie) se traduit mathématiquement par le théorème suivant, dont la seconde assertion est connue comme *formule de Plancherel* (du nom du mathématicien suisse Michaël Plancherel, 1885-1967)

Théorème 4.10 [Plancherel] *Soit $f \in \mathcal{F}_T$ et $(c_{T,n}[f])_{n\in\mathbb{Z}}$ son spectre complexe et $(S_n[T;f])_{n\geq 0}$ la suite de ses sommes de Fourier ; on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_n[T;f](t)|^2\,dt = 0\,; \tag{4.26}$$

de plus, on a la formule de Plancherel

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |c_{T,k}[f]|^2 &= |\alpha_{T,0}[f]|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|\alpha_{T,k}[f]|^2 + |\beta_{T,k}[f]|^2) \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt\,,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

formule qui se polarise en la <u>*formule de Parseval*</u> *: si f et g sont deux fonctions T-périodiques continues par morceaux sur $[0,T]$,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_{T,k}[f]\,\overline{c_{T,k}[g]} &= \alpha_{T,0}[f]\,\overline{\alpha_{T,0}[g]} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{T,k}[f]\,\overline{\alpha_{T,k}[g]} + \beta_{T,k}[f]\,\overline{\beta_{T,k}[g]})\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt\,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Remarque 4.12. C'est au mathématicien français Marc Antoine Parseval des Chênes, 1755-1836, dont d'ailleurs on connait très peu de la vie, que revient en 1799 l'intuition de la formule qui porte son nom ; la formule de Plancherel concerne plutôt, elle, la théorie relative à la transformation intégrale de Fourier (point de vue continu), et non comme ici celle relative aux séries de Fourier (point de vue discret) ; on mélange souvent les deux noms, auxquels il convient d'ajouter bien sûr celui du mathématicien allemand Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846, associé à l'inégalité que nous avons déjà mentionné (théorème 4.7).

Preuve. On remarque tout d'abord que la première assertion implique les deux autres (en fait la seconde, car la troisième assertion qui est la formule de Parseval s'obtient en identifiant les deux formes sesquilinéaires correspondant à deux formes hermitiennes égales d'après la formule de Plancherel (4.27)). En effet, d'après le théorème de Pythagore (cette idée a déjà été exploitée dans la preuve de l'inégalité de Bessel, théorème 4.7), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T |S_n[T;f](t)|^2\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T |f - S_n[T;f](t)|^2\,dt\\ &= \sum_{k=-n}^{k=n} |c_{T,k}[f]|^2 + \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_n[T;f](t)|^2\,dt\,;\end{aligned}$$

il en résulte que (4.26) implique bien (4.27), et donc (4.28).

On remarque ensuite que si f est une fonction T-périodique continue, alors (4.27) est vrai : ceci résulte du théorème de Féjer et du principe des moindres carrés ; en effet, d'après le principe des moindres carrés (voir le cours d'algèbre relatif au théorème de Pythagore), on a, puisque $T_n[T;f]$ appartient au $\mathbb{C}$-sous espace des fonctions continues T-périodiques engendré par les $t \to e^{ikt}$, $-(n-1) \le k \le n-1$ et que $f - S_{n-1}[T;f]$ est orthogonal à ce sous-espace pour le produit scalaire $\langle\,,\,\rangle_T$, l'inégalité (inspirée du principe géométrique des obliques inégales) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_{n-1}[T;f](t)|^2\,dt &\le \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - T_n[T;f](t)|^2 dt\\ &\le \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - T_n[T;f](t)|^2\,;\end{aligned}$$

or le théorème de Féjer, assurant la convergence uniforme de la suite $(T_n[T;f])_{n\ge1}$ vers f sur $\mathbb{R}$, nous permet donc d'infirmer dans ce cas l'assertion (4.26).

Pour conclure en général, on raisonne comme suit : si f est une fonction T-périodique continue par morceaux sur $[0,T]$, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction continue T-périodique f_ϵ telle que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - f_\epsilon(t)|^2\,dt \le \epsilon^2\,.$$

Admettons ce résultat et notons $\| \ \|_T$ la racine carrée de $\| \ \|_T^2$. Toujours à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée avec cette fois le produit scalaire $\langle \, , \, \rangle_T$), on a

$$\begin{aligned}
\|f - S_n[T;f]\|_T &\leq \|f - f_\epsilon\|_T + \|f_\epsilon - S_n[T;f]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T,f_\epsilon]\|_T + \|S_n[T,f_\epsilon] - S_n[T;f]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T,f_\epsilon]\|_T + \|S_n[T,f_\epsilon - S_n]\|_T \\
&\leq \epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T;f_\epsilon\|_T + \|f - f_\epsilon\|_T \\
&\leq 2\epsilon + \|f_\epsilon - S_n[T;f_\epsilon]\|_T
\end{aligned}$$

(pour passer de la ligne 3 à la ligne 4, on a utilisé l'inégalité de Bessel du théorème 4.7). Si maintenant on choisit n assez grand, on sait, puisque f_ϵ est T-périodique continue, que l'on réalise

$$\|f_\epsilon - S_n[T;f_\epsilon]\|_T \leq \epsilon \, ;$$

au bilan final, pour un tel choix de n ($n \geq N(\epsilon)$), on réalise

$$\|f - S_n[T;f]\|_T \leq 3\epsilon \, ,$$

ce qui prouve bien pour f l'assertion (2.31).

Il reste enfin à montrer que, si $f \in \mathcal{F}_T$, et si $\epsilon > 0$, il existe bien une fonction continue T-périodique f_ϵ telle que $\|f - f_\epsilon\|_T \leq \epsilon$; comme f est limite uniforme sur $[0,T]$ d'une suite de fonctions en escalier, il est clair qu'il suffit de montrer le résultat si f est en escalier, et, plus simplement, si f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $[0,T]$ (c'est-à-dire la fonction valant 1 sur l'intervalle et 0 ailleurs). Sur la figure 4.9, nous avons indiqué comment procéder (on approche de l'intérieur par une suite de "fonctions trapèze" sur $[0,T]$ une telle fonction, puis on prolonge par T-périodicité).

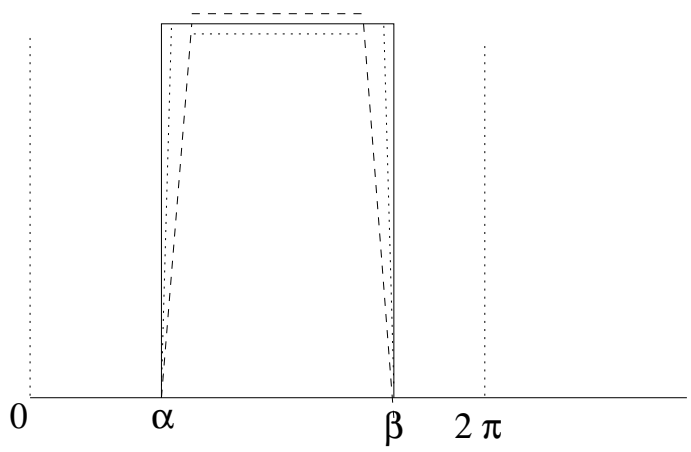

FIG. 4.9 – Approximations d'une fonction indicatrice

Le résultat est ainsi démontré, ce qui achève la preuve du théorème. ♢

Exemple 4.8. Reprenons l'exemple de la fonction 2π-périodique f traitée dans l'exemple 4.6. En appliquant la formule de Plancherel, on trouve

$$\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4\pi^2}{3} \, ;$$

il en résulte donc la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

Il est possible d'obtenir ainsi des formules explicites pour les valeurs de la fonction zeta de Riemann

$$x > 1 \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

aux points $x = 2, 4, ...$, mais malheureusement pas aux points $x = 3, 5, ...$

Chapitre 5

Initiation à l'analyse complexe

5.1 Fonctions holomorphes et méromorphes dans un ouvert de $\mathbb{C}$

Le qualificatif "holomorphe" (mot inventé de toutes pièces probablement par C. Briot et J.C. Bouquet dans leurs travaux en géométrie analytique vers le milieu du XIX-ème siècle) provient ethymologiquement de la concaténation du grec *morphos* (la "forme") et du préfixe *holo* ("entière"). C'est par ce qualificatif que l'on désigne les fonctions d'une variable complexe qui s'écrivent localement au voisinage de tout point z_0 de l'ouvert où elles sont définies sous la forme de la somme d'une série de puissances (à exposants entiers, c'est sur ceci, probablement, que met l'accent le qualificatif *holo*) ; on a déjà rencontré cette classe de fonctions, sous la dénomination de *fonctions analytiques complexes* (section 4.1.5).

Définition 5.1 *Une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ est par définition une fonction analytique complexe dans U.*

Les fonctions holomorphes dans U sont donc, d'après le théorème 4.5, les fonctions F de U dans $\mathbb{C}$, de classe C^1 (comme fonctions de deux variables réelles), solutions de plus de l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial F(x+iy)}{\partial x} + i\frac{\partial F(x+iy)}{\partial y} \equiv 0$$

L'application différentielle d'une fonction holomorphe F en un point z_0 de l'ouvert où elle est définie est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ très particulière ; c'est en effet une similitude directe (composée d'une homothétie de centre l'origine et d'une rotation autour de l'origine, ces deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ commutant entre elles) ; les similitudes directes ont la propriété géométrique très importante suivante : elles préservent les angles orientés des figures. Les applications holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ sont donc les applications de classe C^1 de U dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ qui, au niveau infinitésimal, préservent les angles orientés des figures au voisinage de tout point où leur différentielle ne s'annule pas. C'est là une des raisons majeures pour lesquelles la nature (au travers du principe de moindre action) se plie à des mécanismes régis par de telles fonctions (par exemple en électromagnétisme en en mécanique des fluides).

Les fonctions holomorphes constituent une classe de fonctions très rigide ; on ne peut construire de fonction holomorphe qui fasse n'importe quoi. Ce qui se passe avec la conservation des angles orientés des figures est un premier exemple de contrainte. Voici une seconde propriété de rigidité importante inhérente à l'holomorphie :

Proposition 5.1 *Soit F une fonction holomorphe dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, non identiquement nulle dans cet ouvert ; alors, les points de l'ensemble $\{F = 0\}$ sont des points isolés dans U ; mieux : si $F(z_0) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ tel que la fonction*

$$z \in U \setminus \{z_0\} \longmapsto \frac{F(z)}{(z - z_0)^m}$$

se prolonge en une fonction G holomorphe dans U et telle que $G(z_0) \neq 0$. L'entier m est appelé multiplicité du zéro z_0 de F ; si $m = 1$, on dit que z_0 est un zéro simple de F.

Preuve. La première affirmation est une jolie application de la connexité (se reporter au cours de MAP402 pour cette notion : un sous-ensemble $A \subset R^2$ est connexe s'il ne peut s'écrire comme union de deux ouverts non vides disjoints, ou encore, ce qui est équivalent dans $\mathbb{R}^2$, si deux points de A peuvent être reliés par le support d'un chemin paramétré C^1 par morceaux). Notons

$$E := \{z \in U \,;\, F \equiv 0 \text{ au voisinage de } z\}\,.$$

L'ensemble E est (par construction même) un sous-ensemble ouvert de U (il est voisinage de chacun de ses points). Mais c'est aussi un sous-ensemble fermé de U : en effet, si $z_0 \in \overline{E}$, il existe une suite $(u_n)_n$ de points de E convergeant vers z_0. On peut sans restriction aucune supposer $z_0 = 0$ (on s'y ramène en translatant le problème par $z \mapsto z - z_0$) ; la fonction F est donc dans le disque de centre 0 et de rayon R la somme S d'une série entière $[a_k z^k]_{k \geq 0}$. Si F est identiquement nulle au voisinage de u_n, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S^{(p)}(u_n) = 0$, $S^{(p)}$ désignant la somme de la série dérivée p fois. Comme toutes les fonctions $S^{(p)}$ sont continues dans le disque de convergence $D(0, R)$, on a $S^{(p)}(0) = \lim\limits_{n \to +\infty} S^{(p)}(u_n) = 0$, d'où il en résulte que la série de Taylor de S en 0 est la série nulle, ce qui implique que $S = F$ est bien identiquement nulle au voisinage de l'origine, donc que l'origine (ici z_0), qui est limite de points de E, est encore un point de E. L'ensemble E contient tous ses points adhérents dans U, il est donc fermé dans U. Comme E est ouvert et fermé et que U est connexe, on a l'alternative suivante : soit $E = U$ et alors $F \equiv 0$ dans U, soit $E = \emptyset$ et alors tous les zéros de F sont isolés. La première partie de la proposition est démontrée.

Supposons que l'on soit dans la seconde alternative (les zéros de F dans U sont tous isolés) et soit z_0 un tel zéro. Au voisinage de z_0, l'analyticité de F nous permet d'affirmer que F se développe sous la forme

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^k\,.$$

Il est impossible que tous les nombres complexes $a_k(z_0)$ soient nuls car z_0 est un zéro supposé isolé. Comme toute partie de $\mathbb{N}$ a toujours un plus petit élément, il existe

un plus petit entier m tel que $a_m(z_0) \neq 0$. On peut alors écrire

$$F(z) = (z - z_0)^m \Big(a_m(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}(z_0)(z - z_0)^k \Big) ;$$

le rayon de convergence de la série entière $[a_{m+k}(z_0)X^k]_{k\geq 0}$ étant le même que celui de la série entière $[a_k(z_0)X^k]_{k\geq 0}$, la fonction

$$z \longmapsto G(z) = a_m(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}(z_0)(z - z_0)^k$$

est bien une fonction analytique au voisinage de z_0. Mais cette fonction coïncide dans un voisinage épointé de z_0 avec la fonction

$$z \in U \setminus \{z_0\} \longmapsto \frac{F(z)}{(z - z_0)^m}$$

qui est, elle, une fonction holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$ comme quotient de deux fonctions holomorphes (elle est C^1 et vérifie le système de Cauchy-Riemann du fait de la règle de Leibniz relative à l'expression des dérivées d'un quotient). La fonction G se raccorde à cette fonction au voisinage de z_0 et le second volet de la proposition est ainsi démontré. $\diamondsuit$.

La proposition ci-dessus nous conduit à introduire la notion de *fonction méromorphe* dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Proposition 5.2 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$; on appelle* <u>*fonction méromorphe*</u> *dans U toute fonction de la forme*

$$z \in U \longmapsto \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions holomorphes dans U, F_2 n'étant pas la fonction identiquement nulle dans U.

En fait, le qualificatif de *fonction* est ici ambigü car F_1/F_2 n'est pas définie en tous les points de U ; il faut retirer les zéros (nécessairement isolés du fait de la proposition 5.1 puisque F_2 n'est pas identiquement nulle) de la fonction F_2. Un tel point est dit <u>point singulier</u> de la fonction méromorphe F_1/F_2.

Exemple 5.1. Une fraction rationnelle N/D, où N et D sont des polynômes à coefficients complexes, définit une fonction méromorphe dans un ouvert de $\mathbb{C}$. Les points singuliers de cette fonction méromorphe sont les zéros du dénominateur D. Leur nombre est majoré par le degré du polynôme D.

Supposons que z_0 soit un point singulier de la fonction méromorphe F_1/F_2 ; on peut écrire, du fait de la proposition 5.1 :

$$F_2(z) = (z - z_0)^m G(z) ,$$

où $m \geq 1$ désigne la multiplicité de z_0 comme zéro de F_2. La fonction G reste non nulle dans un disque ouvert $D(z_0, r)$ inclus dans U (puisque G est continue et que $G(z_0) \neq 0$) et la fonction

$$z \in D(z_0, r) \longmapsto \frac{1}{G(z)}$$

est une fonction analytique (quotient de deux fonctions analytiques, le dénominateur ne s'annulant pas) dans $D(z_0, r)$. La fonction $z \longmapsto F_1(z)/G(z)$ se développe en série de puissances de $z - z_0$ au voisinage de z_0 comme :

$$\frac{F_1(z)}{G(z_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^k\,.$$

Le rayon de convergence de la série entière $[a_k(z_0)X^k]$ est au moins égal à r (voir la preuve du théorème 4.5 et en particulier les remarques suivant la formule (4.15)) et l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}\,, \qquad \frac{F_1(z)}{F_2(z)} &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)\,(z - z_0)^{k-m} \\
&= \sum_{k=-m}^{+\infty} a_{k+m}(z_0)\,(z - z_0)^k\,.
\end{aligned}$$

Du point de vue pratique, le développement en série F_1/G (*i.e* le calcul des nombres complexes $a_k(z_0)$, $k \geq 0$) se fait en divisant <u>suivant les puissances croissantes</u> le développement

$$F_1(z_0 + X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k}(z_0)\,X^k$$

au voisinage de $X = 0$ par le développement :

$$G(z_0 + X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k+m}(z_0)\,X^k$$

déduit du développement de F_2

$$F_2(z_0 + X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k}(z_0)\,X^k$$

au voisinage de $X = 0$. Le procédé algébrique de division suivant les puissances croissantes (qui intervenait aussi lors de la recherche du développement limité d'un quotient à un ordre précisé) joue donc ici un rôle pratique essentiel.

Rappel : la division suivant les puissances croissantes. Rappelons ici le principe de la division suivant les puissances croissantes de

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$$

par

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots$$

lorsque $b_0 \neq 0$. On forme :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots - \frac{a_0}{b_0}(b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots) = \Big(a_1 - \frac{a_0b_1}{b_0}\Big)X + \Big(a_2 - \frac{a_0b_2}{b_0}\Big)X^2 + \cdots$$

On a donc

$$\begin{aligned} a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots &= \frac{a_0}{b_0}(b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots) \\ &\quad + X\left(\left(a_1 - \frac{a_0b_1}{b_0}\right) + \left(a_2 - \frac{a_0b_2}{b_0}\right)X - \cdots\right); \end{aligned}$$

on recommence ensuite en divisant le quotient

$$\begin{aligned} \left(a_1 - \frac{a_0b_1}{b_0}\right) + \left(a_2 - \frac{a_0b_2}{b_0}\right)X + \cdots &= \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2}\left(b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots\right) \\ + X\left(\frac{a_2b_0^2 - a_0b_0b_2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2}{b_0^2} + (\cdot)X + \cdots\right) \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi le développement

$$\frac{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots}{b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2}X + \frac{a_2b_0^2 - a_0b_0b_2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2}{b_0^3}X^2 + \cdots,$$

ce qui donne le développement suivant les puissances croissantes de X du quotient.

Proposition 5.3 *Soit F_1/F_2 une fonction méromorphe dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et z_0 un zéro de multiplicité m de F_2 ; si r est assez petit (en tout cas tel que $D(z_0, r) \subset U$ et que z_0 soit le seul point singulier de F_1/F_2 dans $D(z_0, r)$), la fonction F_1/F_2 se développe dans $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ sous la forme*

$$\frac{F_1(z)}{F_2(z)} = \sum_{k=-m}^{+\infty} \alpha_k(z_0)\,(z - z_0)^k\,.$$

Les nombres $\alpha_k(z_0)$, $k \geq -m$, tels que

$$\frac{F_1(z_0 + X)}{F_2(z_0 + X)} = \sum_{k=-m}^{+\infty} \alpha_k(z_0)\,X^k$$

pour X dans un disque épointé de rayon assez petit et de centre $X = 0$ sont appelés <u>coefficients de Laurent</u> de F_1/F_2 au point z_0 (Pierre Laurent, $1813 - 1854$, est un ingénieur et mathématicien français contemporain d'Auguste Cauchy [1]). Le coefficient $\alpha_{-1}(z_0)$, appelé à jouer un rôle capital dans la section suivante est appelé <u>résidu en z_0</u> de la forme $(F_1(\zeta)/F_2(\zeta))\,d\zeta$.

Si l'un des coefficients de Laurent $\alpha_k(z_0)$ avec $-m \leq k < 0$ est non nul, on dit que z_0 est un <u>*pôle*</u> de la fonction méromorphe F_1/F_2 ; dans ce cas, le plus petit entier relatif $k \geq -m$ tel que $\alpha_k(z_0)$ nous fournit, si l'on en prend la valeur absolue, l'<u>*ordre*</u> de ce pôle. Le pôle est dit <u>*simple*</u> si $m = 1$ et $\alpha_{-1}(z_0) \neq 0$.

Exemple 5.2. La fonction

$$z \longmapsto \frac{1}{e^z - 1}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$, dont les points singuliers sont tous des pôles simples ; ces pôles sont les points $z_k = 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le résidu en chacun de ces pôles simples de la forme

$$\frac{d\zeta}{e^\zeta - 1}$$

[1] Signalons par ailleurs qu'on lui doit aussi l'aménagement du port du Havre !

est égal à 1. Les coefficients de Laurent $b_1, b_2, ...$, donnés par le développement :

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} = \frac{1}{z} + b_1 + b_2 z + \cdots$$

sont appelés *nombres de Bernouilli*. On calculera les premiers en utilisant le processus de division suivant les puissances croissantes (faire l'exercice). On trouve au début :

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + \cdots .$$

Le résidu de la forme $(F_1/F_2)\, d\zeta$ en un pôle simple z_0 est particulièrement facile à calculer ; ce résidu vaut

$$\mathrm{Res}\,[(F_1/F_2)d\zeta\ ; z_0] = \frac{F_1(z_0)}{F_2'(z_0)}\,,$$

où

$$F_2'(z_0) := \lim_{h \to 0} \Big(\frac{F_2(z_0 + h) - F_2(z_0)}{h} \Big)\,.$$

5.2 Le théorème des résidus

Soit F_1/F_2 une fonction méromorphe dans un ouvert connexe U du plan complexe et z_0 un point singulier de F_1/F_2. D'après la proposition 5.3, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, que z_0 soit le seul point singulier de F_1/F_2 dans $D(z_0, r)$, et que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$,

$$\frac{F_1(z)}{F_2(z)} = \sum_{k=-m}^{+\infty} \alpha_k(z_0)\,(z - z_0)^k\,.$$

Si $\rho < r$, on remarque que, si $\gamma_{z_0,\rho}$ désigne le chemin paramétré

$$t \in [0, 1] \longmapsto z_0 + \rho e^{2i\pi t}\,,$$

on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} \frac{F_1(\zeta)}{F_2(\zeta)}\, d\zeta &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} \Big(\sum_{k=-m}^{+\infty} \alpha_k(z_0)\,(\zeta - z_0)^k \Big)\, d\zeta \\
&= \sum_{k=-m}^{+\infty} \frac{\alpha_k(z_0)}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} (\zeta - z_0)^k\, d\zeta \\
&= \sum_{k=-m}^{+\infty} \alpha_k(z_0) \rho^{k+1} \int_0^1 e^{2i\pi(k+1)\theta}\, d\theta \\
&= \alpha_{-1}(z_0) = \mathrm{Res}\,(F_1/F_2\, d\zeta\ ;\ z_0)
\end{aligned}$$

(le passage de la première à la seconde ligne est justifié par la convergence normale sur le cercle de rayon ρ de la série entière $[\alpha_k(z_0) X^k]_{k \geq 0}$).

Considérons maintenant, comme sur la figure 5.1, un lacet simple γ de classe C^1 par morceaux de support inclus dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. On suppose ce lacet orienté de manière à être parcouru dans le sens trigonométrique. Considérons aussi

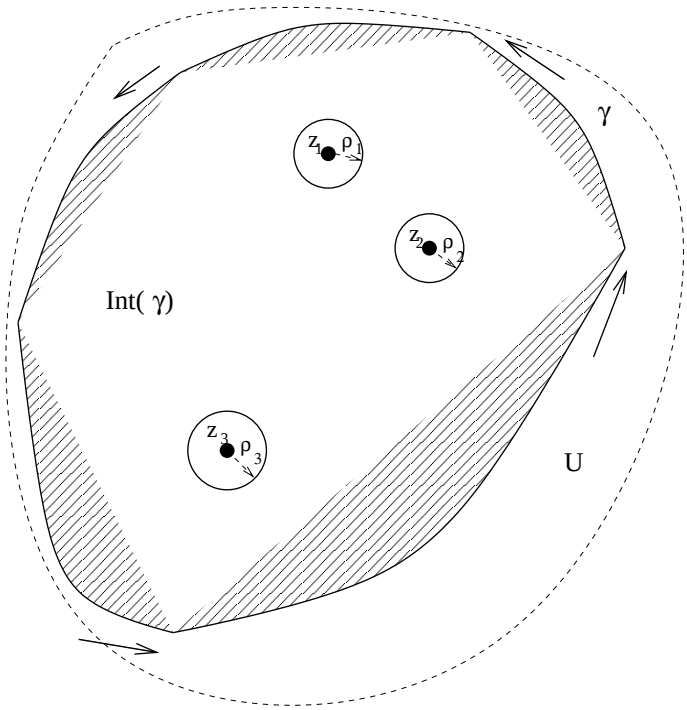

FIG. 5.1 – Le théorème des résidus

une fonction méromorphe F_1/F_2 dans U, telle que le support de γ ne passe par aucun point singulier de cette fonction. On admettra que le complémentaire du support de γ dans $\mathbb{R}^2$ est union de deux ouverts connexes, l'intérieur du lacet (hachuré sur la figure) et l'extérieur du lacet (c'est là un résultat de topologie nullement évident du au mathématicien français, à la fois topologue, analyste et géomètre, Camille Jordan, 1838-1922). L'intérieur du lacet est le domaine qui reste à notre gauche si l'on parcourt le support du lacet en suivant l'orientation imposée ; l'extérieur est, lui, à notre droite. On suppose de plus que le domaine enserré par le lacet est entièrement dans U (ce qui revient de fait à dire que le support du lacet peut être "écrasé" continument en un point de U, et ce en restant dans U). On a le théorème majeur suivant :

Théorème 5.1 (théorème des résidus) *Soit U, γ et F_1/F_2 comme ci-dessus. La fonction F_1/F_2 admet un nombre fini de points singuliers à l'intérieur du support du lacet γ (c'est-à-dire que le lacet γ entoure une fois), $z_1, ..., z_N$. De plus*

$$\int_\gamma \frac{F_1(\zeta)}{F_2(\zeta)}\, d\zeta = 2i\pi \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\,(F_1/F_2\, d\zeta\,;\, z_k)\,. \tag{5.1}$$

Preuve. L'intérieur $\mathrm{Int}(\gamma)$ de γ est un sous-ensemble ouvert de U dont l'adhérence $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)}$ est compacte. Comme les points singuliers de F_1/F_2 sont des points isolés, l'ensemble E des points singuliers de F_1/F_2 appartenant à $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)}$ (ils sont tous dans $\mathrm{Int}\,(\gamma)$ car le support de γ ne passe par aucun point singulier de F_1/F_2) ne peut avoir de point d'accumulation (ceci résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass [tout sous-ensemble infini borné du plan admet un point d'accumulation] et du fait que U n'a aucun "trou" dans l'intérieur du lacet sur le bord duquel seraient susceptibles de

s'accumuler des points singuliers de F_1/F_2 dans U). Cet ensemble E est donc au plus fini et l'on a $E = \{z_1, ..., z_N\}$.
Pour chaque $j = 1, ..., N$, choisissons ρ_j assez petit pour que le disque fermé $\overline{D(z_j, \rho_j)}$ soit inclus dans U, que z_j soit le seul point singulier de F_1/F_2 dans ce disque et que, comme c'est possible d'après ce que l'on a remarqué en début de cette section,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_j,\rho_j}} \frac{F_1(\zeta)}{F_2(\zeta)}\, d\zeta = \mathrm{Res}\,(F_1/F_2\, d\zeta\,;\, z_j)\,. \tag{5.2}$$

On note

$$V = \mathrm{Int}\,(\gamma) \setminus \bigcup_{k=1}^{N} \overline{D(z_j, \rho_j)}\,.$$

La fonction F_1/F_2 étant holomorphe (donc analytique, c'est pareil) au voisinage de $\overline{V}$, elle est de classe C^1 au voisinage de $\overline{V}$ et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann au voisinage de $\overline{V}$. C'est la formule de Green-Riemann dans V (théorème 2.1 de la section 2.5.4, seul le second volet de ce théorème sert ici) que l'on utilise pour conclure à la formule :

$$\int_{\gamma} \frac{F_1(\zeta)}{F_2(\zeta)}\, d\zeta - \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_{z_k,\rho_k}} \frac{F_1(\zeta)}{F_2(\zeta)}\, d\zeta = 0\,. \tag{5.3}$$

La formule des résidus (5.1) résulte alors de cette dernière formule (5.3), couplée avec les relations (5.2). $\diamondsuit$

5.3 Calcul d'intégrales *via* la formule des résidus

La formule des résidus permet (lorsqu'on les reconnaît au membre de gauche de (5.1) comme des intégrales curvilignes) de calculer des intégrales sur des intervalles précisés $[a, b]$, ou des intégrales convergentes ou semi-convergentes sur des intervalles précisés $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$. Il s'agit, c'est important de le souligner, de calcul d'intégrales <u>entre des bornes précisées et non de calcul de primitives</u>. On verra par exemple comment calculer des intégrales telles que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt\,, \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt\,, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt\,, ...$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}\, dt \qquad P, Q \in \mathbb{C}[X]\,, ...$$

sans disposer de primitives pour les fonctions figurant sous les intégrales !

5.3.1 Intégrales sur $[0, 2\pi]$ d'expressions rationnelles en les lignes trigonométriques

Soient P et Q deux polynômes en deux variables X et Y et à coefficients complexes, tels que

$$\theta \longmapsto Q(\cos\theta, \sin\theta)$$

ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta \qquad (*)$$

s'exprime comme une intégrale curviligne sur le chemin paramétré

$$\gamma \ : \theta \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{i\theta}\,.$$

En effet, si $\zeta = e^{i\theta}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, on a (d'après les formules d'Euler)

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\Big(\zeta + \frac{1}{\zeta}\Big) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\Big(\zeta - \frac{1}{\zeta}\Big) \\ d\theta &= \frac{d\zeta}{i\zeta}\,, \end{aligned}$$

ce qui fait que l'on peut écrire :

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{P\Big(\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1}), \frac{1}{2i}(\zeta-\zeta^{-1})\Big)}{Q\Big(\frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1}), \frac{1}{2i}(\zeta-\zeta^{-1})\Big)}\, \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$R(X) := \frac{P\Big(\frac{1}{2}(X+X^{-1}), \frac{1}{2i}(X-X^{-1})\Big)}{Q\Big(\frac{1}{2}(X+X^{-1}), \frac{1}{2i}(X-X^{-1})\Big)} \times \frac{1}{X}$$

nous permet de lister les pôles $z_1, ..., z_N$ de cette fraction rationnelle qui sont à l'intérieur du disque unité $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ (il n'y en a aucun sur le cercle unité) et de calculer, pour chacun de ces pôles, le résidu :

$$\mathrm{Res}\,(R(\zeta)\, d\zeta\ ; z_j)\,.$$

La formule des résidus nous assure

$$\int_{\gamma_r} R(\zeta)\, d\zeta = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\,(R(\zeta)\, d\zeta\ ; z_j)\,,$$

d'où l'on déduit donc :

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\theta, \sin\theta)}{Q(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta = 2\pi \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\,(R(\zeta)\, d\zeta\ ; z_j)\,.$$

Modulo la connaissance de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles et la formule des résidus, le calcul explicite des intégrales d'expressions rationnelles en les lignes trigonométriques du type (*) s'avère donc possible.

5.3.2 Une application importante : le théorème fondamental de l'algèbre

Nous nous proposons ici de démontrer par l'absurde le célèbre théorème de d'Alembert-Gauss, attribué à l'encyclopédiste Jean Lerond d'Alembert (1717-1783) mais formalisé par le génie mathématique allemand C. F. Gauss (1777-1855). Bien que ce résultat soit considéré comme le théorème fondamental de l'algèbre, il n'est pas anodin de souligner qu'il n'en existe aucune preuve n'utilisant pas à un instant ou à un autre le recours à un argument d'obédience analytique.

Théorème 5.2 (théorème fondamental de l'algèbre) *Tout polynôme de degré strictement positif à coefficients complexes admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Preuve. Soit P un tel polynôme, que l'on suppose sans racine complexe. La fonction

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{1}{P(z)}$$

est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier, que l'on peut donc considérer comme une fonction méromorphe ne présentant aucun pôle. D'après le théorème des résidus (théorème 5.1), on a donc, pour tout $R > 0$, si γ_R désigne le chemin $\theta \in [0, 2\pi] \longmapsto Re^{i\theta}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta P(\zeta)} = \mathrm{Res}_0\Big(\frac{d\zeta}{\zeta P(\zeta)}\Big) = \frac{1}{P(0)} \neq 0\,.$$

Mais, si

$$P(z) = a_N z^N + \cdots + a_0\,,$$

on a, pour R suffisamment grand, pour tout ζ appartenant au support de γ_R,

$$\begin{aligned} |P(\zeta)| &\geq |a_N||\zeta|^N - |a_{N-1}\zeta^{N-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_N|\, R^N - \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|\, R^k \\ &\geq |a_N| R^N/2\,. \end{aligned}$$

On a donc, lorsque N est très grand, la majoration

$$\Big| \int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta P(\zeta)} \Big| \leq 2\pi R \times \frac{1}{\min_{|\zeta|=R} |\zeta P(\zeta)|} \leq \frac{4\pi}{|a_N| R^N}\,;$$

Si l'on fait tendre R vers l'infini, on voit que l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_R} \frac{d\zeta}{\zeta P(\zeta)}$$

(qui devrait être constante et non nulle) tend vers zéro, ce qui est absurde. L'hypothèse selon laquelle P ne s'annule pas conduit donc à une contradiction et le théorème de d'Alembert-Gauss est ainsi démontré. $\diamondsuit$

Remarque 5.1. On aurait pu en fait se dispenser du théorème des résidus et utiliser le fait suivant : si P ne s'annule pas, alors $1/P$ est une fonction analytique bornée dans le plan complexe ; d'après la preuve du théorème 4.5, cette fonction se développe en série de Taylor au voisinage de l'origine, le rayon de convergence de cette série étant infini :

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,.$$

Si l'on utilise la proposition 4.4 et que l'on fasse tendre r vers $+\infty$, on voit que $a_n = 0$ si $n > 0$, ce qui prouve que P est une fonction constante et conduit à une contradiction. Remarquons que l'on a ici établi un résultat du au mathématicien français Joseph Liouville (1809-1882), l'un des pionniers, avec Augustin Cauchy, de l'analyse complexe et plus généralement de l'analyse "moderne", assurant que toute fonction analytique complexe dans $\mathbb{C}$ tout entier et de module borné est automatiquement constante.

5.3.3 Calcul des intégrales de Fresnel

Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$$

et

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$$

sont des intégrales semi-convergentes, ce qui n'est nullement évident. On les retrouve en optique géométrique et elles ont été introduites par l'opticien et mathématicien français Augustin Fresnel (1788-1827). Pour montrer leur convergence et les calculer, on introduit la fonction holomorphe :

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \exp(-z^2)$$

et, pour $R > 0$, le chemin γ_R correspondant au bord du secteur conique représenté sur la figure 5.2 et parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

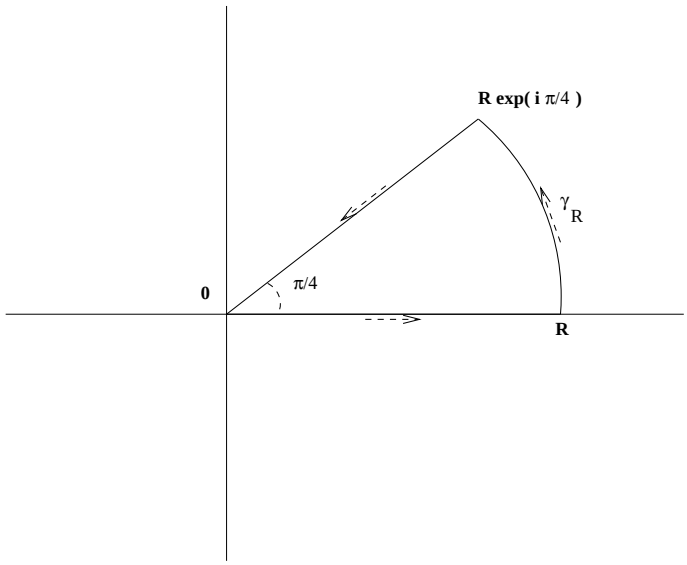

FIG. 5.2 – Un contour pour calculer les intégrales de Fresnel

D'après le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_R} \exp(-\zeta^2)\, d\zeta = 0$$

car la fonction $z \longmapsto \exp(-z^2)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et n'a donc aucun point singulier où la forme $\exp(-\zeta^2)\, d\zeta$ serait susceptible de présenter un résidu. On sait

que

$$\lim_{R\longrightarrow}\int_0^R e^{-t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\,.$$

Comme

$$\iint_{[0,+\infty[^2}e^{-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,du=\frac{\pi}{4}$$

(on exprime l'intégrale en utilisant des coordonnées polaires), on a, du fait du théorème (admis ici) de Fubini

$$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

D'autre part

$$\int_{[0,Re^{i\pi/4}]}\exp(-\zeta^2)\,d\zeta=e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-it^2}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\int_0^R e^{-it^2}\,dt\,.$$

Sur l'arc de cercle joignant R à $Re^{i\pi/4}$ (voir la figure 5.2), on peut majorer

$$|\exp(-\zeta^2)|=\exp(-\mathrm{Re}\,\zeta^2)=\exp(-R^2\cos(2\arg\zeta))$$

et donc l'intégrale curviligne correspondant à l'intégration sur cet arc de cercle par

$$R\times\int_0^{\pi/4}e^{-R^2\cos(2\theta)}\,d\theta=\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-R^2\sin\theta}\,d\theta\leq\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-2R^2\theta/\pi}\,d\theta$$

(on a utilisé ici le fait que sur $[0,\pi/2]$, le graphe de la fonction concave $t\longmapsto\sin t$ est au dessus de la "corde" $t\longmapsto 2t/\pi$ qui le soutend) ; la quantité

$$\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-2R^2\theta/\pi}\,d\theta=\frac{R}{2}\Big[-\frac{\pi}{2R^2}e^{-2R^2u/\pi}\Big]_0^{\pi/2}\leq\frac{\pi}{4R}$$

tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$, donc la contribution à l'intégrale curviligne de l'intégrale sur le quart de cercle aussi. La nullité, pour tout R, de l'intégrale de $e^{-\zeta^2}\,d\zeta$ sur γ_R implique donc, lorsque R tend vers $+\infty$,

$$\lim_{R\to}\int_0^R e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\lim_{R\to+\infty}\int_0^R(\cos(t^2)-i\sin(t^2))\,dt\,.$$

La semi convergence des intégrales de Fresnel en résulte et l'on a donc (en comparant les parties réelle et imaginaire des deux membres) :

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt=\int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

5.3.4 Calcul de l'intégrale de sinuscardinal

On a déjà entrevu (exemple 2.5, section 2.3 du chapitre 2) pourquoi la fonction

$$t\in[0,+\infty[\longmapsto\frac{\sin t}{t}$$

avait une intégrale semi-convergente sur $[0, +\infty[$, avec même

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Nous allons retrouver ici ce résultat (que nous avions intialement "démontré" en trichant un peu) cette fois rigoureusement grâce au théorème des résidus.

Pour cela, nous introduisons le chemin paramétré $\gamma_{\epsilon,R}$ ($\epsilon > 0$ aura vocation à tendre vers 0, $R > 0$ à tendre vers $+\infty$) représenté sur la figure 5.3 ci-dessous.

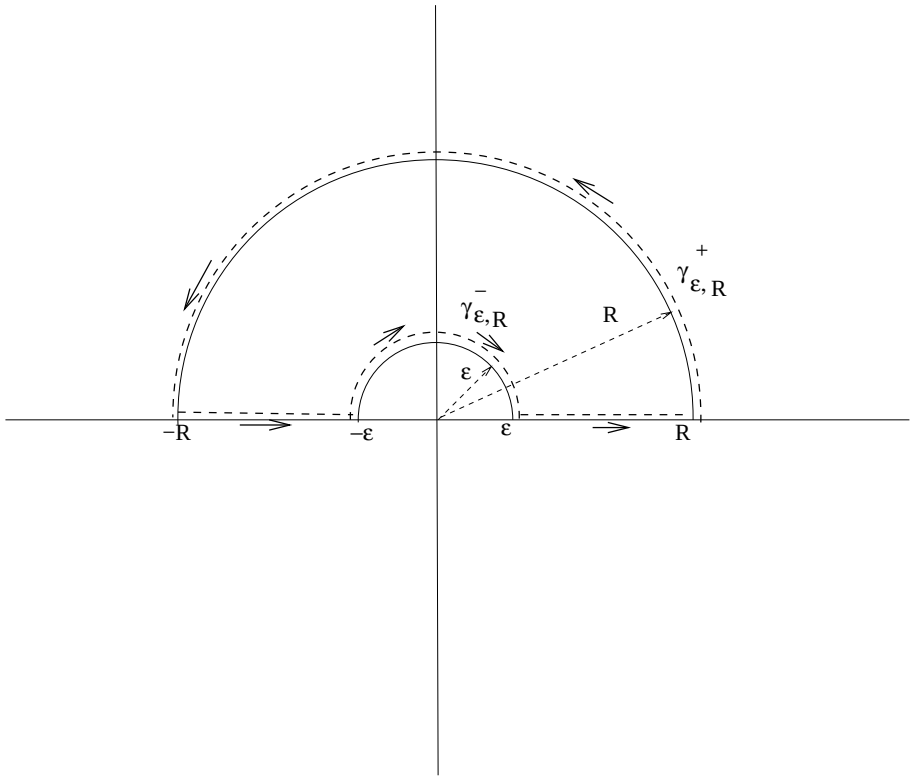

FIG. 5.3 – Un contour pour calculer l'intégrale de sinuscardinal

Comme la fonction

$$z \longmapsto \frac{e^{iz}}{z}$$

est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et de seul pôle $z = 0$ (avec résidu égal à 1), on a, d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = 0\,. \tag{†}$$

La contribution à cette intégrale curviligne des parcours "horizontaux" est exactement :

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{it}}{t}\, dt + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{it}}{t}\, dt = 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt\,.$$

La contribution à l'intégrale curviligne $\gamma_{\epsilon,R}$ de l'intégrale sur le grand demi-cercle supérieur $\gamma^+_{\epsilon,R}$ (orienté dans le sens trigonométrique) vaut

$$i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}\, d\theta$$

et cette contribution est majorée en module par

$$\left| i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}}\, d\theta \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\, d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\, d\theta \ ;$$

elle tend donc vers 0 lorsque R tend vers l'infini (on a encore utilisé ici le fait que sur $[0, \pi/2]$, le graphe de la fonction concave $t \longmapsto \sin t$ est au dessus de la "corde" $t \longmapsto 2t/\pi$ qui le soutend).

La contribution à l'intégrale curviligne sur $\gamma_{\epsilon,R}$ de l'intégrale sur le petit demi- cercle $\gamma^-_{\epsilon,R}$ (orienté, lui, dans le sens des aiguilles d'une montre) vaut, elle,

$$-i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}}\, d\theta$$

et tend vers $-i\pi$ lorsque ϵ tend vers 0.

Finalement, en faisant tendre dans (†) ϵ vers 0 (dans un premier temps), puis R vers l'infini dans un second temps, on trouve

$$2i \lim_{R\to+\infty} \left(\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt \right) - i\pi = 0\,,$$

ce qui nous permet bien de conclure à la semi-convergence de l'intégrale de la fonction sinuscardinal sur $[0, +\infty[$, avec de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

5.3.5 Le spectre des fractions rationnelles

Soit P/Q une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbb{R}$, avec

$$\deg Q \geq \deg P + 2\,.$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

est une intégrale impropre convergente (car $|e^{-i\omega t}| = 1$ et que P/Q est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ grâce à la règle des équivalents puisque $\deg P - \deg Q \leq -2$) ; la fonction

$$\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-i\omega t}\, dt$$

joue un rôle majeur en physique et s'appelle le *spectre* de la fonction rationnelle P/Q. La formule des résidus permet de calculer de telles intégrales.

Traitons comme exemple celui de la fraction rationnelle

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{1}{1+X^2}\,.$$

La fonction méromorphe

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}$$

a deux points singuliers dans $\mathbb{C}$, les points i et $-i$, les résidus en ces points de la forme $e^{-i\omega\zeta}d\zeta/(1+\zeta^2)$ valant respectivement $e^{\omega}/(2i)$ et $-e^{-\omega}/(2i)$.

Supposons dans un premier temps $\omega > 0$ et introduisons, pour $R > 0$ (appelé à tendre ultérieurement vers $+\infty$) le chemin paramétré γ_R représenté sur la figure 5.4.

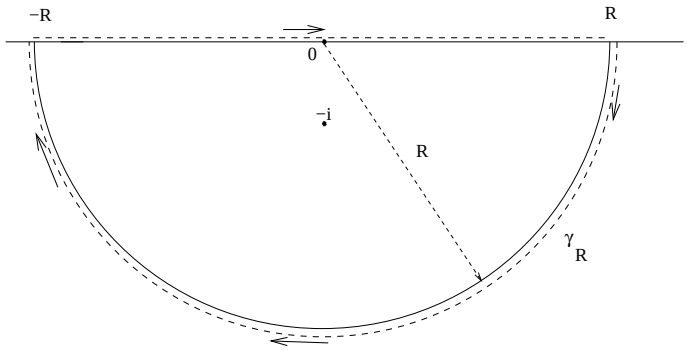

FIG. 5.4 – Un contour pour calculer le spectre d'une fonction rationnelle

La formule des résidus permet d'affirmer que pour tout $R > 0$,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{-i\omega\zeta}}{1+\zeta^2}\, d\zeta = -2i\pi \times \operatorname{Res}\left((\cdot); -i\right) = \pi e^{-\omega/2} \tag{††}$$

(le sens du parcours est celui des aiguilles d'une montre, ce qui explique le signe moins). Comme $|e^{-i\omega z}| = e^{\omega \operatorname{Im} z} \leq 1$ si $\operatorname{Im} z \leq 0$, on voit que le maximum du module de la fonction

$$z \longmapsto \frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}$$

sur le demi-cercle inférieur est majoré par $1/(R^2-1)$ (si $R > 1$) ; comme le périmètre de ce demi-cercle vaur πR, la contribution à l'intégrale curviligne de l'intégrale sur ce demi-cercle inférieur est majorée par

$$\frac{\pi R}{R^2-1}$$

et tend donc vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. En faisant tendre R vers $+\infty$ dans (††), on voit donc que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-\omega/2}\,.$$

Pour $\omega < 0$, on raisonnerait avec le chemin paramétré dont le support est symétrique de celui de γ_R par rapport à l'axe des x. On obtient ainsi la formule de Poisson :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}\, dt = \pi e^{-|\omega|/2}\,, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Cette méthode s'avère être une méthode générale pour calculer le spectre des fonctions rationnelles.

5.3.6 D'autres exemples potentiels...

La fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ par

$$z \longmapsto \log|z| + i\mathrm{Arg}_{]0,2\pi[}(z)$$

est (on pourra le vérifier en écrivant l'équation de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires) une fonction holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Des contours comme celui proposé sur la figure 5.5 permettent le calcul d'intégrales du type

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} (\log t)^k \, dt \,,$$

où P/Q est une fonction rationnelle sans pôle sur $[0, +\infty[$ (avec encore $\deg Q \geq \deg P + 2$) et k un entier positif ou nul.

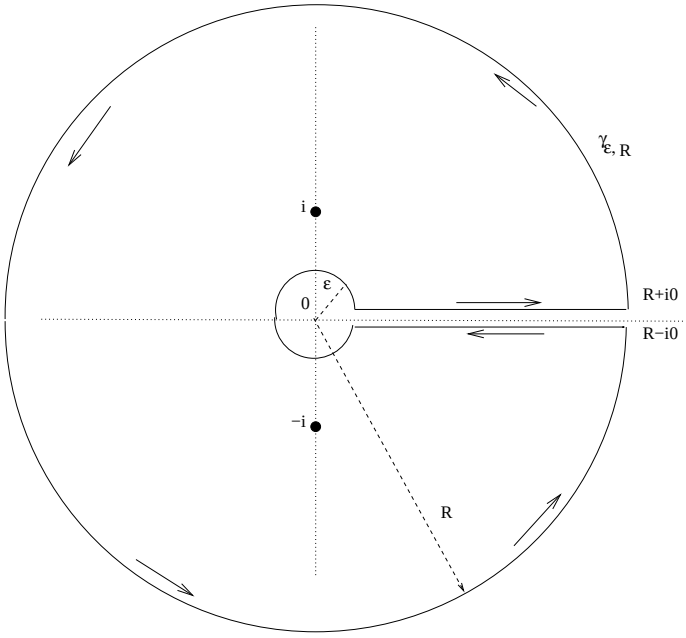

FIG. 5.5 – Un contour "type" en relation avec la fonction logarithme

On laisse de tels exemples en exercice ; on cherchera en particulier à calculer (en utilisant un contour comme sur la figure 5.5) les intégrales :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\log t)^k}{1+t^2} \, dt, \;\; k = 0, 1, 2, ...$$

en se souvenant que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Indication et résultats. Pour calculer une telle intégrale I_k, on supposera connu le résultat pour $0, ..., k-1$ et l'on intégrera la forme

$$\frac{\left(\log|\zeta| + i\mathrm{Arg}_{]0,2\pi[}(\zeta)\right)^{k+1}}{1+\zeta^2} \, d\zeta$$

sur le chemin paramétré représenté sur la figure 5.5 en écrivant que l'intégrale curviligne obtenue est la somme des deux résidus aux points $z = i$ et $z = -i$. On trouve par exemple :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}\,,\ I_1 = 0\,,\ I_2 = \frac{\pi^3}{8},\ I_3 = 0,\ I_4 = \frac{5\pi^5}{32}\,,\ I_5 = 0\,,\ I_6 = \frac{61\pi^7}{128}\,, \ldots$$

Faire les calculs de proche en proche comme indiqué ; il est très facile de vérifier que $I_{2p+1} = 0$ pour tout entier p en découpant l'intégrale en une intégrale sur $[0, 1]$ et une intégrale sur $[1, +\infty[$ qui se détruisent *via* le changement de variables $t \longmapsto 1/t$.

Le calcul d'intégrales par la formule des résidus s'avère ainsi un champ d'investigations très large que nous n'avons fait qu'effleurer en occultant de fait l'aspect géométrique pourtant fondamental. Il faut aussi se souvenir qu'une intégrale curviligne (d'une forme $f(\zeta)d\zeta$ avec f méromorphe) est pour le physicien le calcul d'un travail et que la possibilité de "déformer" le contour sans changer le bilan global de ce travail (tant que l'on n'entoure pas de nouveau pôle, c'est ce que dit le théorème des résidus) s'avère intéressant du point de vue pratique, par exemple pour répartir l'effort différemment : aller d'un point à un autre en restant à flanc de coteau en montagne n'est certes pas la même chose que d'y aller en plongeant dans les vallées et en les suivant le plus longtemps possible avant de remonter au dernier moment et le plus rapidement possible à l'altitude d'où l'on avait décroché ! La transposition en mathématiques de cette idée naïve (au travers précisément du théorème des résidus) engendre une méthode clef très puissante (tant en physique mathématique, en analyse appliquée, qu'en théorie analytique des nombres), la *méthode "du col"* (la terminologie est aisée à relier à l'idée intuitive que nous venons d'évoquer).

Ici se termine notre brève initiation à l'analyse complexe. C'est par cette incursion dans ce domaine très riche des mathématiques, aux confins de l'analyse, de la géométrie et de la physique, que nous conclurons le cours de MAT401.

FIN DU COURS