

**Feuille 1 : nombres premiers et théorèmes de Tchebychev**

Sauf indication contraire :

- $p$  est un nombre premier ;
- $k, \ell, m, n$  sont des entiers positifs ;
- $t, x, y$  sont des nombres réels.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de polynôme  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  tel que  $f(m)$  soit premier pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ .
2. Le but de cet exercice est de démontrer le « postulat de Bertrand » : pour tout  $x$  suffisamment grand il existe un premier  $p \in ]x, 2x]$ .

Rappelons les définitions des fonctions  $\Lambda$  de von Mangoldt et  $\psi$  de Tchebychev :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier;} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

(a) Posons

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \log n = \log([x]!).$$

Montrer que

$$T(x) = x \log x - x + O(\log x), \quad T(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

(« l'expression analytique » et « l'expression arithmétique » pour  $T(x)$ ).

- (b) Donner l'expression analytique et l'expression arithmétique de  $T(x) - 2T(x/2)$ . En déduire les inégalités

$$\psi(x) - \psi(x/2) \leq x \log 2 + O(\log x) \leq \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \leq \psi(x).$$

(c) Montrer que

$$\psi(x) - \psi(x/2) \geq \left(\frac{1}{3} \log 2\right) x + O((\log x)^2).$$

(d) Posons

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

Montrer que  $\theta(x) \leq \psi(x) \leq \theta(x) + O(\sqrt{x} \log x)$ . En déduire que

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq \left(\frac{2}{3} \log 2\right) x + O(\sqrt{x} \log x).$$

Conclure.

- (e\*) Essayer d'expliciter les constantes impliquées par les symboles  $O(\cdot)$  ci-dessus. Puis, expliciter le « suffisamment grand » de l'étape précédente. Finalement, montrer qu'il existe un premier  $p \in ]x, 2x]$  pour tout  $x \geq 1$ .

3. Dans cet exercice on cherche l'asymptotique pour  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  et  $\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

(a) Montrer qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + C + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Indication : utiliser la formule de la sommation par parties

$$\sum_{m \leq k \leq n} a_k b(k) = [A(t)b(t)]_m^n - \int_m^n A(t)b'(t)dt$$

avec

$$a_n = \begin{cases} \frac{\log n}{n}, & n \text{ premier,} \\ 0, & n \text{ composé,} \end{cases} \quad b(t) = \frac{1}{\log t}.$$

(b) En déduire qu'il existe un réel positif  $A$  tel que

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{A}{\log x}$$

lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . (On peut montrer que  $A = e^{-\gamma}$ , où

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

est la *constante d'Euler*.)

4. (a) Montrer que pour tout  $\alpha > -1$  on a

$$c_1 \frac{x^{1+\alpha}}{\log x} \leq \sum_{p \leq x} p^\alpha \leq c_2 \frac{x^{1+\alpha}}{\log x}, \quad (1)$$

où les constantes  $c_1, c_2$  sont positives et dépendent de  $\alpha$ .

(b) Démontrer que la série

$$\sum_p \frac{1}{p(\log \log p)^\alpha}$$

converge pour  $\alpha > 1$  et diverge pour  $\alpha \leq 1$ .

(c) Montrer que

$$e^{c_1 n} \leq \text{ppcm}\{1, \dots, n\} \leq e^{c_2 n}, \quad (2)$$

où les constantes  $c_1, c_2$  sont positives et absolues.

(d) Comment peut-on améliorer (1) et (2) en utilisant le théorème des nombres premiers à la place du théorème de Tchebychev?