Feuille 2 : nombres de Bernoulli et valeurs de ζ

1. Dans cet exercice on définit les polynômes et les nombres de Bernoulli et on établit leurs propriétés principales.
   On pose $B_0(x) = 1$ et on définit les *polynômes de Bernoulli* $B_n(x)$ par les relations
   $$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \qquad \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \qquad (n \geq 1).$$
   On définit les *nombres de Bernoulli* B_n par $B_n = B_n(0)$.
   (a) Déterminer $B_1(x)$, $B_2(x)$ et $B_3(x)$.
   (b) Montrer que $B_n(1) = B_n$ pour $n \geq 2$.
   (c) Montrer que pour $n \geq 1$
   $$B_n = -n \int_0^1 B_{n-1}(x)(1-x)dx.$$
   (Indication : utiliser $B_n(x) = B_n + n\int_0^x B_{n-1}(u)du$.) En déduire que pour $n \geq 2$
   $$B_n = n \int_0^1 B_{n-1}(x)xdx.$$
   (d) Montrer que $|B_n(x)| \leq n!$ pour $x \in [0,1]$. (Indication : utiliser récurrence par n. En supposant que $|B_{n-1}(x)| \leq (n-1)!$ pour $x \in [0,1]$, montrer que $|B_n| \leq \frac{1}{2}n!$, puis que $|B_n(x)| \leq n!$ pour $x \in [0,1]$.)
   (e) (série génératrice) Montrer que la série
   $$B(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$
   converge pour $x \in [0,1]$ et $|t| < 1$. Puis, montrer que
   $$B(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$
   (Indication : montrer que $B_x'(x,t) = tB(x,t)$ et $\int_0^1 B(x,t)dx = 1$.) En particulier,
   $$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}. \qquad (1)$$
   (f) En déduire que $|B_n| = o(n!R^{-n})$ pour tout $R < 2\pi$. (Un résultat plus précis sera obtenu dans Exercice 3.)
   (g) Déterminer les nombres B_n pour $n \leq 10$.
   (h) Montrer que $B_n = 0$ pour les impairs $n \geq 3$.

(i) Utiliser la série génératrice pour démontrer la « formule binomial » :

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k B_{n-k}(y).$$

En particulier,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$$

(j) Montrer que $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. Autrement dit, la fonction $B_n(1/2+x)$ est paire pour n pair et impaire pour n impair.

(k) Montrer que

$$1^n + 2^n + \cdots + m^n = \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}}{n+1}.$$

2. Le but de cet exercice est de démontrer le développement

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}). \tag{2}$$

(a) Montrer que la somme à droite de (2) converge vers une fonction méromorphe avec des pôles simples en $n \in \mathbb{Z}$.

Dans la suite on pose

$$f(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}, \qquad g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right), \qquad h(z) = \begin{cases} f(z) - g(z), & z \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(b) Montrer que la fonction h est holomorphe en $z = 0$.

(c) Montrer que g' est 1-périodique.

(d) En déduire que g est 1-périodique. (Indication : utiliser l'étape précédente pour montrer que $g(z+1) - g(z)$ est constante, puis déterminer $g(1/2) - g(-1/2)$.)

(e) Montrer que h et 1-périodique et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(f) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|\mathrm{Im}\, z| \geq 1$ on a $|f(z)| \leq C$.

(g) Démontrer la même propriété pour la fonction g.

(h) Montrer que la fonction h est bornée sur $\mathbb{C}$. En déduire que h est constante. Conclure.

3. Dans cet exercice on exprime les valeurs de $\zeta(2k)$ en termes de nombres de Bernoulli :

$$\zeta(2k) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{k+1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

(a) Utiliser (2) pour démontrer que

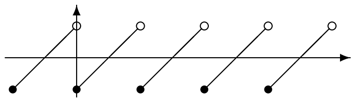
$$\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k}.$$

(b) Déterminer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

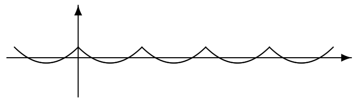
(c) En mettant $t = 2\pi i z$ dans (1), montrer que

$$\frac{\pi z}{\tan(\pi z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

En déduire (3).



la fonction $\widetilde{B}_1(x)$



la fonction $\widetilde{B}_2(x)$

(d) Montrer que, pour n pair, on a $|B_n| \sim 2n!(2\pi)^{-n}$ lorsque $n \to \infty$.

4. Le but de cet exercice est d'établir la *formule sommatoire d'Euler-MacLaurin*. On définit la n-ième *fonction de Bernoulli* $\widetilde{B}_n(x)$ comme la fonction 1-périodique vérifiant $\widetilde{B}_n(x) = B_n(x)$ pour $x \in [0,1[$. Autrement dit, $\widetilde{B}_n(x) = B_n\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$.

   (a) Montrer que, pour $n \geq 3$, la fonction $\widetilde{B}_n(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\widetilde{B}'_n(x) = n\widetilde{B}_{n-1}(x)$. Montrer que $\widetilde{B}_2(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que $\widetilde{B}'_2(x) = 2\widetilde{B}_1(x)$ pour $x \notin \mathbb{Z}$.

   (b) Soient a et b des nombres réels, $a \leq b$. Montrer que pour $f \in C^1[a,b]$ on a
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \big[\lfloor x \rfloor f(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\lfloor x \rfloor dx. \tag{4}$$
   (Dans le cadre de la théorie des distributions on peut exprimer la somme $\sum_{a<n\leq b} f(n)$ comme l'intégral $\int_a^b f(x)d\lfloor x \rfloor$, et (4) peut être interprété comme l'intégration par parties.)

   (c) Soit $f \in C^1[a,b]$. Montrer que
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx - \big[\widetilde{B}_1(x)f(x)\big]_a^b + \int_a^b \widetilde{B}_1(x)f'(x)dx.$$
   En particulier, si $a, b \in \mathbb{Z}$, on a
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx - B_1 \cdot \big[f(x)\big]_a^b + \int_a^b \widetilde{B}_1(x)f'(x)dx.$$
   Dans la suite, on suppose que $a, b \in \mathbb{Z}$.

   (d) Montrer que pour $f \in C^2[a,b]$ on a
$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx - B_1 \cdot \big[f(x)\big]_a^b + \frac{B_2}{2} \cdot \big[f'(x)\big]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \widetilde{B}_2(x)f''(x)dx.$$

   (e) Démontrer la **formule sommatoire d'Euler-MacLaurin** : pour $f \in C^m[a,b]$ et $m \geq 1$ on a
$$\begin{aligned}\sum_{a<n\leq b} f(n) = & \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k B_k}{k!} \cdot \big[f^{(k-1)}(x)\big]_a^b + \\ & + \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_a^b \widetilde{B}_m(x) f^{(m)}(x)dx.\end{aligned}$$

5. Dans cet exercice on utilise la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin pour étudier les sommes partielles de la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

   (a) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in]0,1[$ (la *constante d'Euler*) telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\theta}{6n^2},$$
   où $0 \leq \theta \leq 1$.

(b) Obtenir le développement semblable avec le terme d'erreur du type $O(n^{-4})$.

(c) Calculer γ avec précision 10^{-4}.

6. Dans cet exercice on utilise la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin pour déduire la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/6n}$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) Montrer qu'il existe une constante A telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \log k = n \log \frac{n}{e} + \frac{1}{2} \log n + A + \frac{\theta}{6n} \qquad (0 \leq \theta \leq 1).$$

(b) Montrer, en utilisant l'intégration par parties que la suite

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$$

des *intégrales de Wallis* satisfait la relation de récurrence

$$nW_n = (n-1)W_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

(c) En déduire que, lorsque $n \to \infty$, on a $W_{2n} \sim \pi e^{-A}(2n)^{-1/2}$ et $W_{2n+1} \sim e^A(8n)^{-1/2}$.

(d) Prouver que $W_n \sim W_{n-1}$ (lorsque $n \to \infty$) et montrer que $A = \log \sqrt{2\pi}$.