Feuille 4 : la fonction ζ

Dans cette feuille on utilise des expressions du type a^s avec a et s complexes, $a \neq 0$. On pose $a^s = e^{s \log a}$ en utilisant la branche de la fonction log vérifiant $0 \leq \operatorname{Im} \log z < 2\pi$.

Exercice 1. Dans cet exercice on obtient le prolongement analytique de la fonction ζ vers une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
(a) Utiliser la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin pour montrer que pour tout m naturel strictement positif il existe un polynôme $P_m(s)$ tel que pour $\mathrm{R}es > 1$ on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + P_m(s) + (-1)^{m-1}\binom{-s}{m}\int_1^\infty \widetilde{B}_m(x)x^{-s-m}dx,$$

où on note

$$\binom{u}{m} = \frac{u(u-1)\cdots(u-m+1)}{m!}.$$

(b) En déduire le prolongement analytique de ζ vers une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, et préciser ses pôles.

Exercice 2. Dans cet exercice on rappelle la définition et certaines propriétés de la fonction Γ d'Euler. La fonction $\Gamma(s)$ est définie pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 0$ par

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx.$$

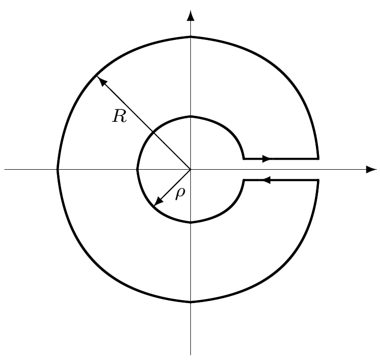
(a) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En déduire le prolongement analytique de Γ vers une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et préciser ces pôles.
(b) Montrer que pour $s, t > 0$ on a

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(1+u)^{s+t}}du = \int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv.$$

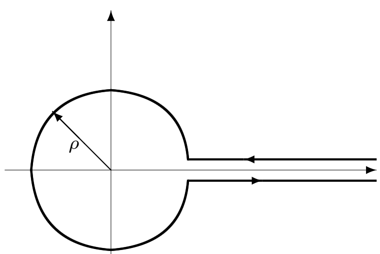
(Indication : dans l'égalité

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \int_0^\infty e^{-y}y^{t-1}dy$$

poser $y = xu$, puis changer l'ordre d'intégration.)



Dessin 1



Dessin 2 : le contour de Hankel

(c) Montrer que pour $0 < s < 1$
$$\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$
(Indication : effectuer l'intégration sur le contour indiqué sur le Dessin 1 avec $R \to \infty$ et $\rho \to 0$.)
(d) En déduire :
- une démonstration alternative du prolongement analytique de Γ ;
- la *formule des compléments*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad (z \notin \mathbb{Z}).$$

En particulier, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
(e) Démontrer la *formule de duplication*

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) \qquad (2s \notin \mathbb{Z}).$$

(Indication : dans l'identité

$$\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} = 2\int_0^{1/2} \big(v(1-v)\big)^{s-1} dt \qquad (s > 0)$$

poser $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{w}$.)

Exercice 3. Dans cet exercice on donne une démonstration alternative du prolongement analytique de ζ.
(a) Utiliser l'identité
$$\Gamma(s)n^{-s} = \int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}dx \qquad (\operatorname{Re} s > 0)$$
pour montrer que
$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \qquad (\operatorname{Re} s > 1).$$
(b) Soit $H(\rho)$ le contour de Hankel (voir Dessin 2) de rayon ρ vérifiant $0 < \rho < 2\pi$. Posons

$$I(s,\rho) = \int_{H(\rho)} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz.$$

Montrer que $I(s,\rho)$ ne dépend pas de ρ ; on le note $I(s)$ dans la suite. (Indication : la fonction $z \mapsto \frac{z^{s-1}}{e^z-1}$ est holomorphe sur la bande $|\operatorname{Im} z| < 2\pi$ privée de la demi-droite $[0, +\infty[$.) Puis, montrer que $I(s)$ est une fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$).
(c) Montrer que
$$I(s) = (e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s).$$
En déduire le prolongement analytique de ζ vers une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
(d) Montrer que
$$\zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)I(s).$$
(Indication : utiliser la formule des compléments.)
(e) Montrer que pour un entier $n \geq 0$ on a

$$I(-n) = 2\pi i \cdot \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}.$$

(f) En déduire que

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

En particulier, $\zeta(-2n) = 0$ pour $n \geq 1$.

Exercice 4. Dans cet exercice on déduit l'équation fonctionnelle pour ζ :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \qquad (s \neq 1). \tag{1}$$

(a)* Soit k un entier, $k \geq 1$. En effectuant l'intégration sur le contour du dessin 1 avec $R = \pi(2k+1)$ et $\rho < 2\pi$, montrer que

$$I(s) = -2\pi i \sum_{1 \leq |n| \leq k} (2\pi i n)^{s-1} + O(k^\sigma) + o(1)$$

avec $\sigma = \operatorname{Re} s$. (La constante impliquée par $O(\cdot)$ dépend de s, mais ne dépend pas de k, et le terme $o(1)$ tend vers 0 lorsque s est fixé et k tend vers $+\infty$.)

(b) Montrer que pour $\sigma < 0$ on a

$$I(s) = (2\pi i)^s (e^{\pi i s} - 1)\zeta(1-s).$$

En déduire (1).

(c) Posons

$$Z(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Montrer que $Z(1-s) = Z(s)$, la forme « symétrique » de l'équation fonctionnelle. (Indication : utiliser la formule de duplication.)

(d) Montrer que pour $n \geq 1$

$$\zeta(2n) = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!}.$$

(Il s'agit d'une solution alternative de l'exercice 3, feuille 2.)