université de BORDEAUX **DISVE** Pôle Licence	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020/2021** **PARTIEL** **PARCOURS**: L3 Mathématiques fondamentales, L3 Ingénierie Mathématique et CMI **Épreuve : Probabilités** **Date : 05/03/2020** **Heure : 8h30-10h00** **Durée : 1h30** *Responsable de l'épreuve*: A. Richou *Documents*: Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Département DL Licence

Questions de cours.

1. Donner la définition d'une variable aléatoire réelle.
2. Donner la définition d'une mesure de probabilité.

Exercice 1. On considère un ensemble de 3 romans, 6 livres de mathématiques et 2 livres de physique. On suppose que tous les titres sont différents. On dépose tous ces livres sur une étagère dans un ordre aléatoire.

1. Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants (on ne demande pas de faire l'application numérique mais on justifiera proprement les résultats) :
   (a) Les livres sont rangés dans l'ordre alphabétique des titres.
   (b) Les livres de mathématiques sont rangés en premier puis les romans puis les livres de physique.
   (c) Les livres sont regroupés par thème (les thèmes sont "roman", "mathématiques" et "physique").
   (d) Il y a au moins un livre de mathématiques avant le premier roman.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p > 0$ deux paramètres fixés. On considère une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans $\{0, ..., n\}$ et telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = cp^k, \quad \forall k \in \{0, ..., n\}$$

avec c une constante. On note $\mathcal{L}(n, p)$ cette loi.

On pourra remarquer que le paramètre p peut prendre la valeur 1.

1. Calculer c.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. (a) Montrer que pour tout $x \neq 1$ on a :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$.
4. montrer que $n - X$ suit une loi $\mathcal{L}(n', p')$ avec n' et p' deux paramètres à déterminer.

On considère maintenant une deuxième variable aléatoire Y de même loi que X et indépendante de X.

4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

5. Donner la loi de $X + Y$ et calculer son espérance.

Exercice 3. On considère deux pièces indicernables dans un tiroir. La première pièce est équilibrée tandis que la seconde pièce à une probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir un pile. On choisit une des pièce au hasard et on note X le résultat du lancer (i.e. X vaut 1 lorsque l'on obtient un pile et 0 lorsque l'on obtient un face).

1. Calculer la loi de X.

On lance maintenant n fois cette même pièce, les lancers étant indépendants. On note Y le nombre total de piles.

3. Si l'on sait que l'on a dans les mains la seconde pièce, calculer la probabilité de l'évènement $\{Y = k\}$ pour $k \in \{0, ..., n\}$.
4. Calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{0, ..., n\}$.
5. Sachant que l'on a observé k tirages sur les n lancers, calculer la probabilité d'avoir dans les mains la première pièce.

Enfin, on suppose maintenant que, entre chaque lancer, on replace la pièce dans le tiroir puis on retire aléatoirement une pièce. Cette fois on note Z le nombre total de piles obtenus après n lancers.

6. Quelle est la loi de Z ?