Feuille de TD 3
Vecteurs aléatoires, fonctions génératrices et caractéristiques

Exercice 1. Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires réelles de densité de probabilité défini par (avec $a, b > 0$)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ab \exp(-ax - by)\mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(y).$$

1) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Donner leur loi.
2) Quelle est la probabilité que X soit supérieur à Y ?
3) Quelle est la probabilité que X soit supérieur à 1 sachant que X est supérieur à Y ?

Exercice 2. Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre O et de rayon $r > 0$. On désigne par (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{D}$ et de loi uniforme sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire donnée par une densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi r^2}\mathbf{I}_{\mathcal{D}}(x, y).$$

1) Déterminer les densités marginales de X et Y ainsi que leurs espérances.
2) On lance une fléchette sur une cible représentée par $\mathcal{D}$ et on suppose que les coordonnées du point d'impact de la fléchette est le couple de variables aléatoires (X, Y). Le score est donné par $S = r - \sqrt{X^2 + Y^2}$, quelle est la loi de S ?

Exercice 3. Loi Gamma. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ avec $a, \lambda > 0$, si sa densité de probabilité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} \exp(-\lambda x)\mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et $\mathcal{G}(b, \lambda)$ avec $a, b, \lambda > 0$. Soient U et V les variables aléatoires définies par

$$U = X + Y \qquad \text{et} \qquad V = \frac{X}{X + Y}.$$

1) Déterminer la densité de probabilité du couple (U, V).
2) Montrer que U et V sont indépendantes et trouver les lois marginales de U et V.
3) En déduire que
$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$
4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 4. La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est souvent utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit que X suit une loi de Paréto $\mathcal{P}(a, b)$ avec $a, b > 0$ si $X = b \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de X puis vérifier que sa densité de probabilité est donnée par
$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}\mathbf{I}_{[b,+\infty[}(x).$$
2) Pour $a > 2$, calculer l'espérance et la variance de X.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Paréto $\mathcal{P}(a, 1)$ et $\mathcal{P}(b, 1)$, $a \neq b$. Calculer la densité de probabilité du couple (U, V) avec $U = XY$ et $V = X/Y$.
4) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
5) A partir de X et Y, calculer la covariance entre U et V et trouver l'ensemble des couples $a, b > 0$ pour lesquels cette covariance est nulle.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$. On pose

$$Z = \frac{X}{Y}.$$

1) Montrer que Z suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.
2) Quelle est la loi de la variable aléatoire $1/Z$?

Exercice 6. Fonctions caractéristiques de lois discrètes. Déterminer la fonction caractéristique Φ_X de la variable aléatoire discrète X dans les cas suivants.
1) $X = a$ presque sûrement.
2) X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.
3) X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ avec $p = 1/2$.
4) X suit la loi Uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$ avec $n \geq 1$.
5) X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Retrouver l'espérance et la variance de X.

Exercice 7. Fonctions caractéristiques de lois continues. Déterminer la fonction caractéristique Φ_X de la variable aléatoire continue X dans les cas suivants.
1) X suit la loi Uniforme sur $[-a, a]$.
2) X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
3) X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$. On pourra réfléchir au lien avec la question précédente.
4) X suit la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pourra dériver la fonction caractéristique et montrer qu'elle vérifie une certaine équation différentielle.
5) X suit la loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Retrouver l'espérance et la variance de X.
6) X est une variable aléatoire à densité, montrer que la limite à l'infini de Φ_X est nulle. On pourra commencer à montrer le résultat lorsque la densité de X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.
1) Déterminer la loi de la somme $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
2) Pour tout réel $t \geq 0$, soit $N(t)$ la variable aléatoire $N(t) = \text{card}\{n \geq 1 \text{ tel que } S_n \leq t\}$. Calculer $\mathbb{P}(N(t) \geq k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que $N(t)$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Exercice 9. Limite de fonctions caractéristiques. Le but de cet exercice est de montrer qu'une limite simple de fonctions caractéristiques n'est pas forcément une fonction caractéristique.
1) Une fonction caractéristique est-elle nécessairement continue ? Le prouver.
2) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $[0, n]$. On note Φ_n la fonction caractéristique de X_n. Calculer Φ_n et montrer que Φ_n converge simplement vers une limite Φ à déterminer.
3) Vérifier que Φ n'est pas une fonction continue et conclure.

Exercice 10. Fonction génératrice. Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$. Soit Y une variable aléatoire discrète à support dans $\mathbb{N}$, indépendante de (Z_n). On pose $X = \sum_{k=1}^{Y} Z_k$ avec la convention que lorsque Y prend la valeur 0 alors X prend la valeur 0.

1) Déterminer la fonction génératrice, notée g, des variables aléatoires Z_n.
2) Déterminer la fonction génératrice, notée g_Y, de la variable aléatoire Y dans les deux cas suivants
   — $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n, \pi)$,
   — $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{P}(\lambda)$.
3) On note g_X la fonction génératrice de la variable aléatoire X, montrer que pour tout $s \in]-1, 1[$, $g_X(s) = g_Y \circ g(s)$.
4) Retrouver les résultats de l'exercice 7 de la feuille de TD 2.

Exercice 11. Loi binomiale négative. On effectue une succession d'épreuves indépendantes dont la probabilité de succès est p et la probabilité d'échec est $1 - p$ avec $0 < p < 1$. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à l'obtention de N succès avec $N \geq 1$. Il est aisé de vérifier que X suit la loi Binomiale négative $\mathcal{BN}(N, p)$ définie, pour tout $k \geq N$, par

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{N-1} p^N (1-p)^{k-N}.$$

On peut noter que la loi $\mathcal{BN}(1, p)$ correspond à la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1) Montrer que la fonction génératrice de X est donnée, pour tout $s \in [-1, 1]$, par

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \left(\frac{sp}{1-(1-p)s}\right)^N.$$

2) Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, déterminer la loi de $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N$.
3) Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{N}{p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{N(1-p)}{p^2}.$$