Feuille de TD 4
Convergences

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que, si

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \qquad \text{alors} \qquad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Montrer que la réciproque est vraie si de plus $X = a$ p.s. avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'elle est fausse en général.

Exercice 2. 1) Soit (X_n, X) une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Longleftrightarrow \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

2) *Approximation Binomiale-Poisson* Pour $n \geq 1$, soit X_n de loi Binomiale $Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ avec $\lambda > 0$. Montrer que la suite X_n converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ donnée par $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de P_n.
2) En déduire que (P_n) converge en loi vers P dont on précisera la loi.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Montrer que (P_n) converge presque sûrement vers 0.
2) Si $\lambda \geq 1$, vérifier que (P_n) ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{L}^1$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = p_n$. Etudier la convergence de la suite (X_n) dans $\mathbb{L}^1$, en probabilité et presque sûrement si $p_n = 1/n$ puis $p_n = 1/n^2$.

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/n)$ et soit $Y_n = X_n - [X_n]$ où $[X_n]$ désigne la partie entière de X_n.

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?
2) Montrer que (Y_n) converge en loi vers Y dont on précisera la loi.

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy $\mathcal{C}(c)$ avec $c > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de S_n.
2) En déduire que (S_n/n) converge en loi mais ne converge pas en probabilité.

Exercice 8. On interroge n personnes choisies au hasard dans la population des inscrits qui ont l'intention de voter oui ou non à un prochain référendum et qui acceptent de répondre au sondage. Pour $1 \leq k \leq n$, on note $X_k = 1$ si la k^e personne annonce qu'elle votera oui, $X_k = 0$ si elle annonce qu'elle votera non. On suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ où p est la proportion d'intention de vote "oui" dans la population des inscrits qui ont l'intention d'exprimer leur suffrage. La proportion de "oui" estimée par ce sondage est donc

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?
2) On souhaite trouver la taille n_0 pour que $\mid \overline{X}_n - p \mid < 0.01$ avec une probabilité d'au moins 0.95. Déterminer un tel n_0 en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'inégalité élémentaire $4p(1-p) \leq 1$.
3) Déterminer un tel n_0 par une méthode approchée utilisant le TLC.

Exercice 9. La loi de Paréto, encore appelée loi de puissance, est souvent utilisée pour modéliser les dépassements d'un seuil. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(a, \theta)$ avec a et $\theta > 0$ si $X = \theta \exp(Y)$ où Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, on estime la valeur θ par

$$\widehat{\theta}_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X.
2) Vérifier que $\widehat{\theta}_n$ suit la loi de Paréto $\mathcal{P}(na, \theta)$.
3) Montrer par le lemme de Borel-Cantelli que $\widehat{\theta}_n$ converge presque sûrement vers θ.
4) Montrer également que
$$n\big(\widehat{\theta}_n - \theta\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z.$$
où Z est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.

Exercice 10. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Pour tout $n \geq 1$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1) Déterminer la loi de S_n.
2) Montrer que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = \lambda \qquad \text{p.s.}$$
3) Montrer également que
$$\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$
4) En déduire, sans calcul, que
$$\lim_{n \to \infty} \exp(-n\lambda) \sum_{k=0}^{[n\lambda]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$