18/04/19

(1)

DST Probabilité
Correction Succincte

Exercice 1 :

1) (X,Y) est à densité donc X et Y sont à densité.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ densité de } X.$$

$$f_X(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

$$f_X(x) = \int_0^x \theta^2 e^{-\theta x}\,dy = \theta^2 x e^{-\theta x} \quad \text{si } x \geq 0.$$

Donc $f_X(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \ , \ \forall y \in \mathbb{R} \text{ densité de } Y.$$

$$f_Y(y) = 0 \text{ si } y < 0$$

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} \theta^2 e^{-\theta x}\,dx = \theta e^{-\theta y}$$

Donc $f_Y(y) = \theta e^{-\theta y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$ $\quad$ (i.e. $Y \sim \mathcal{E}(\theta)$)

②

2) $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \theta^2 x^2 e^{-\theta x} dx$ bien définie car intégrale d'une fonction positive.

$$= \left[-\theta x^2 e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \theta x e^{-\theta x} dx \qquad (IPP)$$

$$= \frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty} \theta^2 x e^{-\theta x} dx = \frac{2}{\theta} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx}_{=1} = \frac{\cancel{1}2}{\theta}$$

3) Méthode de la fonction muette.

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée quelconque.

$$\mathbb{E}[h(X,Z)] = \mathbb{E}\left[h\left(X, Y/X\right)\right] = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(x, \frac{y}{x}\right) \theta^2 e^{-\theta x} \mathbb{1}_D(x,y) dx dy$$

(Rem : Z est bien définie car $P(X=0)=0$ car (X,Y) à densité !)

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \iint_D h\left(x, \frac{y}{x}\right) \theta^2 e^{-\theta x} dx dy.$$

On pose $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$

$$(x,y) \longmapsto \left(x, \frac{y}{x}\right) = (u,v)$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases} \quad \text{car } x \neq 0.$$

donc φ est bijective et $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+^* \times]0,1[\longrightarrow D$

$$(u,v) \longmapsto (u, uv)$$

φ, φ^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ donc φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

$$\mathrm{Jac}\, \varphi^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

Donc $\mathbb{E}[h(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1[} h(u,v)\, \theta^2 e^{-\theta u} u \, du\, dv$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\, \theta^2 e^{-\theta u} u \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \mathbb{1}_{]0,1[}(v)\, du\, dv$$

Donc (X,Z) est un vecteur aléatoire à densité, de densité

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \theta^2 e^{-\theta u} u \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \mathbb{1}_{]0,1[}(v).$$

4) et 5) $g(u,v) = g_1(u) g_2(v)$ avec $g_1(u) = \theta^2 e^{-\theta u} u \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)$

et $g_2(v) = \mathbb{1}_{]0,1[}(v)$

donc X et Z sont indépendantes.

De plus f_Z est proportionnelle à g_2.

Donc $f_Z(z) = \mathbb{1}_{]0,1[}(z)$ densité de la loi $\mathcal{U}([0,1])$.

et ainsi $f_X(x) = \theta^2 e^{-\theta x} x \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

Exercice 2 :

1) ~~$\exists$~~ $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$

$$F_X(t) = \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad (\text{cf TD, cours})$$

2) a) $\mathbb{P}(R_n > t) = \mathbb{P}\left(\min(X_1, \dots, X_n) > t\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i > t)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\alpha t}\right) = e^{-\alpha n t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

b) $\forall t \in \mathbb{R}$,
$F_{R_n}(t) = \mathbb{P}(R_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}(R_n > t)$

$$= \left(1 - e^{-\alpha n t}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \quad \text{d'après 2/a)}$$

donc F_{R_n} est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\alpha n)$ d'après 1)

donc $R_n \sim \mathcal{E}(\alpha n)$.

c) $\varepsilon > 0$ fixé quelconque

$$\mathbb{P}(|R_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(R_n > \varepsilon) \quad \text{car } R_n \geq 0 \text{ p.s.}$$

$$= e^{-\alpha n \varepsilon} \quad \text{d'après 2)1)}$$

$$= \left(e^{-\alpha\varepsilon}\right)^n \quad \text{terme général d'une série convergente car } e^{-\alpha\varepsilon} < 1$$

donc d'après le lemme de Borel-Cantelli on a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\left(\limsup_n \{|R_n - 0| > \varepsilon\}\right) = 0, \text{ i.e. } R_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \text{ p.s.}$$

d) $p \geq 0$. Si R_n converge dans L^p, R_n converge vers 0 : en effet la convergence dans L^p implique la convergence en proba or R_n converge vers 0 en proba car $R_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

$$\mathbb{E}[|R_n - 0|^p] = \int_0^{+\infty} x^p \alpha n e^{-\alpha n x} dx \quad \text{(intégrale d'une fonction positive bien définie)}$$

$$\overset{u = nx}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^p}{n^p} \alpha e^{-\alpha u} du = \frac{1}{n^p} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^p \alpha e^{-\alpha u} du}_{\text{constante finie !}}$$

donc $\mathbb{E}[|R_n - 0|^p] \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

i.e. $R_n \xrightarrow{L^p} 0$.

3) a) $\forall t \in \mathbb{R}$, ~~R_n~~

$$F_{Z_n}(t) = \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \mathbb{P}(\alpha T_n - \ln(n) \leq t)$$

$$F_{Z_n}(t) = P\left(M_n \leq \frac{t+\ln(n)}{\alpha}\right) = F_{M_n}\left(\frac{t+\ln n}{\alpha}\right)$$

Or $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$F_{M_n}(u) = P(\max\{X_1, \dots X_n\} \leq u) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq u\}\right) \quad \left(\begin{array}{c}\text{indépendance}\\ \text{des } X_i\end{array}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(u) = \left(1 - e^{-\alpha u}\right)^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u).$$

Donc $F_{Z_n}(t) = \left(1 - e^{-t-\ln n}\right)^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{t+\ln n}{\alpha}\right)$

$$= \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\left(\frac{t+\ln n}{\alpha}\right)$$

b) F_{Z_n} est C^0 sur $\mathbb{R}$. En effet, le seul saut éventuel est en $t = -\ln n$

or $F_{Z_n}((-\ln n)^-) = 0$

et $F_{Z_n}((-\ln n)^+) = \left(1 - \frac{e^{\ln n}}{n}\right)^n = 0$.

de plus F_{Z_n} est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-\ln n\}$.

Donc Z_n est à densité (et $f_{Z_n}(t) = F'_{Z_n}(t) \ \forall t \neq -\ln n$)

c) $t \in \mathbb{R}$ fixé. $\frac{t+\ln n}{\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\frac{t+\ln n}{\alpha} > 0$ pour n assez grand

et alors $F_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n = e^{n \log\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)}$

$$n \ln\left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{e^{-t}}{n} = -e^{-t}$$

donc $F_{Z_n}(t) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-e^{-t}}$ fonction continue.

Donc Z_n converge en loi vers une v.a. de fonction de répartition

$$g(t) = e^{-e^{-t}}.$$

(Rmq : g est bien une fonction de répartition car $\mathcal{C}^0$ càdlàg, croissante, $g(t) \xrightarrow{-\infty} 0$, $g(t) \xrightarrow{+\infty} 1$!)

Exercice 3 :

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \int_0^1 e^{itx}\,dx$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{it}-1}{it} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

cf page 8 pour la fin de la question.

2) $Y_n = X_n + X_{n+1}$. Comme X_n et X_{n+1} sont indépendantes on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t)\varphi_{X_{n+1}}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{it}-1}{it}\right)^2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

3) $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_{n+1}] = 1/2 + 1/2 = 1$ linéarité de l'espérance

$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(X_{n+1}) = 1/12 + 1/12 = 1/6$ car X_n, X_{n+1} indépendantes

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i]}{n} = 1$$

Les $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas a priori indépendants donc on ne peut pas faire le calcul de variance directement.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = X_1 + X_{n+1} + 2\sum_{i=2}^{n} X_i$$

donc $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_{n+1}) + 4\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 4(n-1)\frac{1}{12} = \frac{1}{12}(4n-2) = \frac{1}{6}(2n-1)$$

Ainsi $\mathrm{Var}(T_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{(2n-1)}{6n^2}$

<u>fin question 1)</u>

$$\forall t \neq 1, \quad \varphi_{X_n}(t) = \frac{e^{it}-1}{it} = \frac{1}{it}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(it)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(it)^k}{(k+1)!}$$

~~Don~~ La formule reste vraie pour $t=1$!

Donc si ~~φ_{X_n}~~ pour calculer $\varphi'_{X_n}(0)$ et $\varphi''_{X_n}(0)$ il suffit d'identifier le deuxième et le troisième terme dans le développement en série entière de φ_{X_n}.

$$\varphi'_{X_n}(0) = \frac{(i)^1}{2!} = \frac{i}{2} = i\,\mathbb{E}[X_n] \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] = 1/2$$

$$\frac{\varphi''_{X_n}(0)}{2!} = \frac{(i)^2}{3!} = \frac{-1}{3!} \Rightarrow \mathbb{E}[X_n^2] = -\varphi''_{X_n}(0) = \frac{1}{3}$$

Donc $Var(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$

4) Les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne sont pas indépendantes

en effet $Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$

$$= Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3)$$

$$= 0 + 0 + Var(X_2) + 0 = 1/12 \neq 0.$$

5) $\forall \varepsilon > 0,$

$$P(|T_n - 1| > \varepsilon) \leq \frac{Var(T_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{(Bienaymé-Tchebychev)}$$

$$\leq \frac{2n-1}{6n^2\varepsilon^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Donc $T_n \xrightarrow{P} 1$

(Rem : Avec le calcul précédent on ne peut pas conclure sur la convergence presque-sûre.)

Exercice 4 :

1) $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ vecteur gaussien donc X, Y et Z sont des gaussiennes.

on lit l'espérance et la variance de ces trois v.a. dans le vecteur espérance et la diagonale de la matrice de covariance du vecteur :

$X \sim \mathcal{N}(1,1)$ $\quad$ $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ $\quad$ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

les v.a. ne sont pas indépendantes car la matrice de covariance n'est pas diagonale.

2) $\det T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$ (Sarrus) (10)

donc $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur à densité.

3) $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X+Z-Y \\ Z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ est un <u>vecteur gaussien</u> de moyenne $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et de matrice de covariance $ATA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc U, V et W sont indépendantes (matrice de covariance diagonale)

et $U \sim \mathcal{N}(1,1)$ $\quad V \sim \mathcal{N}(1,0)$ i.e. $V = 1$ p.s.

$W \sim \mathcal{N}(0,1)$

<u>Exercice 5</u>

1) D'après la loi forte des grands nombres ($(X_i)_{i\geq 1}$ iid, d'espérance finie)

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

2) la convergence p.s. implique la convergence en proba.

On $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geq a\right) \leq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right| \geq a\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ car $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{\lambda}$.

(11)

3) $\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geq a\right) \Leftrightarrow S_n \geq n\left(a+\frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow tS_n \geq tn\left(a+\frac{1}{\lambda}\right)$

pour $\underline{t > 0}$

$\Leftrightarrow e^{tS_n} \geq e^{tn(a+1/\lambda)}$

Si $t=0$ on a qu'une implication (coquille dans le sujet).

Donc $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda} \geq a\right) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{tn(a+1/\lambda)}\right)$

(majoration si $t=0$)

4) $\mathbb{E}[e^{tS_n}]$ existe bien car e^{tS_n} v.a. positive.

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] = \mathbb{E}[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}] = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}[e^{tX_i}] = \left(\mathbb{E}[e^{tX_1}]\right)^n$$

car v.a. i.i.d.

Rem: l'égalité précédente est vraie même si les espérances sont infinies !)

$$\mathbb{E}[e^{tX_1}] = \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda-t)x}\,dx$$

La fonction n'est pas intégrable si $\lambda - t \leq 0 \Leftrightarrow t \geq \lambda$

Donc $\mathbb{E}[e^{tX_1}] = \begin{cases} +\infty & \text{si } t \geq \lambda \\ \int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda-t)x}\,dx = \left[\frac{-\lambda}{\lambda-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-t} & \text{si } \underline{t<\lambda} \end{cases}$

et $\mathbb{E}[e^{tS_n}] = \begin{cases} +\infty \text{ si } t \geq \lambda \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \text{ si } t<\lambda \end{cases}$

5) $$P\left(e^{tS_n} \geq e^{\left(\frac{1}{\lambda}+a\right)nt}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right]}{e^{\left(\frac{1}{\lambda}+a\right)nt}}$$ D'après l'inégalité de Markov.

$$\leq \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\, e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+a\right)t}\right)^n \quad \forall t \in [0,\lambda[$$ D'après 4).

6) D'après 3) et 5),

$$P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{\lambda} \geq a\right) \leq \Bigg(\underbrace{\frac{\lambda}{\lambda-t}\, e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+a\right)t}}_{f(t)}\Bigg)^n \quad \forall t \in [0,\lambda[$$ (trivial pour $\underline{\underline{t=0}}$)

$$f(t) = e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+a\right)t - \log\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)} = e^{g(t)}$$

g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\lambda[$

$$g'(t) = \frac{1}{\lambda-t} - \left(\frac{1}{\lambda}+a\right)$$

$$g''(t) = \frac{1}{(\lambda-t)^2} > 0$$

Donc on a

t	0		t^*		λ
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
g'	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g''			$+$		

et $g(t^*) < 0$, donc $P\left(\frac{S_n}{n}-\frac{1}{\lambda} \geq a\right) \leq \left(e^{g(t^*)}\right)^n = \rho^n$

avec $\rho = e^{g(t^*)} < 1$!