université de BORDEAUX	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019** **EXAMEN FINAL : SESSION 1** **Parcours : M1 MSS** **Code UE : 4TMS706U** **Épreuve : Probabilités et Statistique** **Date : 17/12/18** **Heure : 14h** **Durée : 3h** **Documents :** non autorisés **Calculatrice :** non autorisée Épreuve de MM. LECLAIRE et RICHOU	**Collège Sciences et Technologies**

Corrigé

Exercice 1

1. Par définition, $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \ .$$
On peut même prendre $\varepsilon \in]0,1[$ dans cette définition. Et dans le cas où les X_n sont des variables de Bernoulli, on a pour $\varepsilon \in]0,1[$, $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$. Ainsi, $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $p_n \to 0$.
2. Dans le cours, on a vu en corollaire du lemme de Borel-Cantelli que $X_n \to X$ p.s. dès que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$$
et que la réciproque était vraie lorsque les $X_n - X$ sont indépendantes. Là, il suffit de considérer $\varepsilon \in]0,1[$. Dans le cas où les X_n sont de Bernoulli, on a donc que $X_n \to X$ p.s. si et seulement si $\sum p_n < \infty$.
3. On a
$$\mathbb{E}[|nX_n|^p] = n^p \mathbb{E}[X_n^p] = n^p \mathbb{P}(X_n = 1) = n^p p_n \ .$$
Par suite, $nX_n \to 0$ dans L^p si et seulement si $n^p p_n \to 0$.

Exercice 2

On considère un vecteur gaussien
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) .$$

1. On rappelle que si (X,Y) est un vecteur gaussien, alors X, Y sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. Or sur la matrice de covariance, on lit que $\mathrm{Cov}(X,Z) = 0$ et que $\mathrm{Cov}(X,Y) = -1$.On en déduit que X, Z sont indépendantes mais que X, Y ne le sont pas.

2. $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien d'espérance nulle et de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. La matrice Γ est inversible et un rapide calcul montre que

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, $(X, Y)^T$ admet une densité qui s'écrit

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x, y)\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

c'est-à-dire

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 2y^2)\right) .$$

4. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Par conséquent, $(U, V)^T$ est un vecteur gaussien d'espérance nulle et de covariance

$$M\Gamma M^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 - 2ab - b^2 & -a^2 + b^2 - ab \\ -a^2 + b^2 - ab & a^2 + 2b^2 + 2ab \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \frac{1}{1-p}$, on a

$$G_{X_n}(z) = \mathbb{E}[z^{X_n}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} z^k = pz \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{pz}{1 - (1-p)z} .$$

2. En dérivant terme à terme les séries entières de l'égalité précédente, on obtient pour $|z| < \frac{1}{1-p}$

$$G'_{X_n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) k z^{k-1} = \frac{p}{(1 - (1-p)z)^2} .$$

En évaluant cela en $z = 1$, on en déduit

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) k = \frac{1}{p} .$$

En dérivant une nouvelle fois au dessus, on obtient que pour $|z| < \frac{1}{1-p}$

$$G''_{X_n}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k)k(k-1)z^{k-2} = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)z)^3} \; .$$

En évaluant en $z = 1$, on en déduit

$$\mathbb{E}[X_n(X_n-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k)k(k-1) = 2\frac{1-p}{p^2} \; .$$

Par suite

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_n(X_n-1)] + \mathbb{E}[X_n] = \frac{2-p}{p^2}$$

et enfin

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2 = \frac{1-p}{p^2} \; .$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. D'abord rappelons que $\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{p}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{n\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{n\varepsilon^2}\frac{1-p}{p^2} \; .$$

Or $p \geqslant \frac{1}{2}$ et on voit rapidement que $p \mapsto \frac{1-p}{p^2}$ est décroissante sur $]0,1[$, donc on peut majorer $\frac{1-p}{p^2}$ par sa valeur en $p = \frac{1}{2}$ qui est 2. Finalement on obtient

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{2}{n\varepsilon^2}.$$

4. En prenant $\frac{1}{n\varepsilon^2} = 0.01$ i.e. $\varepsilon = \frac{10}{\sqrt{n}}$, on en déduit que $\frac{1}{p} \pm \frac{10}{\sqrt{n}}$ est un intervalle de confiance de niveau 0.98 sur $\frac{1}{p}$. Par suite, un intervalle de confiance de niveau 0.98 sur p est donné par

$$\left] \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{10}{\sqrt{n}}}, \frac{1}{\frac{1}{p} - \frac{10}{\sqrt{n}}} \right[\; .$$

Problème

Partie A

1. On a
$$\mathbb{E}_\theta[X^\alpha] = \int_1^{+\infty} x^\alpha \frac{\theta}{x^{\theta+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\theta}{x^{\theta+1-\alpha}} dx$$
donc $\mathbb{E}_\theta[X^\alpha] < \infty$ si et seulement si $\theta > \alpha$ et dans ce cas
$$\mathbb{E}_\theta[X^\alpha] = \frac{\theta}{\theta-\alpha}\left[\frac{-1}{x^{\theta-\alpha}}\right] = \frac{\theta}{\theta-\alpha} \ .$$

2. En renversant l'égalité précédente, on obtient que
$$\theta = \alpha \frac{\mathbb{E}_\theta[X^\alpha]}{\mathbb{E}_\theta[X^\alpha]-1} \ .$$
La méthode des moments revient à remplacer dans cette expression $\mathbb{E}_\theta[X^\alpha]$ par sa moyenne empirique
$$\overline{X_n^\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^\alpha \ .$$
Elle nous conduit donc à l'estimateur
$$\hat{\theta}_n = \alpha \ \frac{\overline{X_n^\alpha}}{\overline{X_n^\alpha}-1} \ .$$

3. Lorsque $\alpha < \theta$, les v.a. X_i^α sont i.i.d. intégrables donc la loi forte des grands nombres assure que $\overline{X_n^\alpha}$ converge p.s. vers $\mathbb{E}_\theta[X^\alpha] = \frac{\theta}{\theta-\alpha}$, et par suite $\hat{\theta}_n$ converge p.s. vers θ. Donc $\hat{\theta}_n$ est fortement consistant à partir du moment où l'on sait que $\alpha < \theta$. À noter tout de même qu'en pratique on ne connaît pas la valeur de θ et donc on ne peut pas vérifier la condition $\alpha < \theta$.
4. Ce qui précède montre que $\mathbb{E}_\theta[\overline{X_n}] = \frac{\theta}{\theta-1}$ ce qui prouve que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de $\frac{\theta}{\theta-1}$. Son risque quadratique est donc égal à sa variance, qui vaut
$$\mathrm{Var}_\theta(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\theta(X) \ .$$
Or
$$\mathrm{Var}_\theta(X) = \mathbb{E}_\theta[X^2] - \mathbb{E}_\theta[X]^2 = \frac{\theta}{\theta-2} - \frac{\theta^2}{(\theta-1)^2} = \frac{\theta}{(\theta-2)(\theta-1)^2} \ .$$
Finalement le risque quadratique de cet estimateur vaut
$$R_\theta(\overline{X}_n) = \frac{\theta}{n(\theta-2)(\theta-1)^2} \ .$$

5. Puisque $\theta > 2$, la question 1 assure que la variance de X est finie. Ainsi, les X_i sont des v.a. i.i.d. de carré intégrable. On peut donc appliquer le théorème central-limite qui assure que
$$Z_n = \sqrt{n}\Big(\overline{X}_n - \frac{\theta}{\theta-1}\Big)$$
converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ où $\sigma^2 = \mathrm{Var}_\theta(X)$.

6. a) Remarquons que pour toute fonction mesurable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, on a
$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(\ln(X))] = \int_1^{+\infty} \frac{\theta\ \varphi(\ln(x))}{x^{\theta+1}} dx \ .$$
Le changement de variable $y = \ln(x)$ donne que
$$\mathbb{E}_\theta[\varphi(\ln(X))] = \int_0^{+\infty} \varphi(y)\theta e^{-\theta y} dy \ .$$
Ceci prouve que $Y = \ln(X)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$. Par conséquent
$$\mathbb{E}_\theta[\ln(X)] = \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}_\theta(\ln(X)) = \frac{1}{\theta^2} \ .$$
b) On a ici un modèle régulier sur $]0,\infty[$ dont la densité s'écrit
$$f_\theta(x) = p(x;\theta)dx \quad \text{avec} \quad p(x;\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \ .$$
Donc
$$\ln\, p(x;\theta) = \ln(\theta) - (\theta+1)\ln(x) \ .$$
En dérivant par rapport à θ on obtient
$$\partial_\theta \ln\, p(x;\theta) = \frac{1}{\theta} - \ln(x) \ .$$
Puisque le modèle est régulier, l'information de Fisher est donc donnée par
$$I(\theta) = \mathrm{Var}_\theta\big(\partial_\theta \ln\, p(x;\theta)\big) = \mathrm{Var}_\theta(\ln(X)) = \frac{1}{\theta^2} \ .$$
c) Comme le modèle est régulier, $I_n(\theta) = nI(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$.

7. La borne de Cramer-Rao pour l'estimation de $g(\theta) = \frac{\theta}{\theta-1}$ est $\frac{g'(\theta)^2}{I_n(\theta)}$. Or
$$g'(\theta) = \frac{-1}{(\theta-1)^2} \ .$$
Donc la borne de Cramer-Rao s'écrit $\frac{\theta^2}{n(\theta-1)^4}$. Or le calcul de la question 4 montre que le risque quadratique de $\overline{X_n}$ est strictement supérieur à cette borne (car $(\theta-1)^2 > \theta(\theta-2)$). Donc $\overline{X_n}$ n'est pas un estimateur efficace.

Partie B

1. On observe ici d'une observation $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi à densité g_θ donc la vraisemblance s'écrit

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2} \mathbf{1}_{x_i \geqslant \theta} = \theta^n \mathbf{1}_{\theta \leqslant \min(x_i)} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} .$$

Il est clair que cette fonction est croissante en θ jusqu'à $\min(x_i)$ et elle vaut 0 ensuite. On en déduit une estimation du maximum de vraisemblance $\min(x_i)$ et par suite l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ s'écrit

$$\hat{\theta}_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i .$$

2. D'abord, remarquons que $\hat{\theta}_n$ est à valeurs > 0, donc il suffit de calculer la fonction de répartition sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n > t) = \prod \mathbb{P}_\theta(X_i > t) = \left(\frac{\theta}{t}\right)^n$$

d'où la fonction de répartition

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n \leqslant t) = 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^n .$$

3. On va utiliser la caractérisation de la convergence en loi à l'aide de la fonction de répartition. Là encore T_n est à valeurs > 0. De plus pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n \leqslant \theta + \frac{\theta t}{n}\right) &= 1 - \left(\frac{\theta}{\theta + \frac{\theta t}{n}}\right)^n \\
&= 1 - \exp\left(n \ln\Big(\frac{1}{1 + \frac{t}{\theta n}}\Big)\right) \\
&= 1 - \exp\left(n \ln\Big(1 - \frac{t}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\Big)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-t + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \longrightarrow 1 - e^{-t} .
\end{aligned}$$

On reconnaît à la limite la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$. Cela prouve que T_n converge en loi vers $\mathcal{E}(1)$.

4. On a vu que pour tout $t > 0$

$$\mathbb{P}(0 \leqslant T_n \leqslant t) \longrightarrow 1 - e^{-t} .$$

En prenant $t = -\ln(\alpha)$, on pourra en déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$. Or l'inégalité $0 \leqslant T_n \leqslant t$ équivaut à

$$\frac{\hat{\theta}_n}{1+\frac{t}{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n \ .$$

Finalement on obtient qu'un intervalle de confiance sur θ est donné par

$$\left[\frac{\hat{\theta}_n}{1-\frac{\ln(\alpha)}{n}}, \hat{\theta}_n\right] \ .$$