FICHE D'EXERCICES N°2

Exercice 1.
A) Montrer que dans la définition d'un temps d'arrêt, on peut remplacer la condition (b) $\forall n \geq 0$, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ par la condition : (b') $\forall n \geq 0$, on a $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

B) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une variable aléatoire réelle, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que toute variable aléatoire constante presque sûrement est un temps d'arrêt adapté à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Soient T et S deux temps d'arrêt adaptés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $T \wedge S$, $T \vee S$ et $T + S$ sont aussi des temps d'arrêt adaptés à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$ est un temps d'arrêt adapté à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
4. Soit (X_n) une chaîne de Markov et N un entier strictement positif fixé. On définit la variable aléatoire T par
$$T = \min\left\{n \geq 0, X_n = \max_{0\leq i\leq N} X_i\right\}$$
Est-ce que T est un temps d'arrêt adapté à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 2. Soit P une matrice stochastique sur une espace d'états E. Montrer que, pour tout i, j dans E on a
$$i \to j \Leftrightarrow \big(\exists n \in \mathbb{N}, \exists k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in E, P_{ik_1}P_{k_1k_2}\ldots P_{k_{n-2}k_{n-1}}P_{k_{n-1}j} > 0\big)$$

Exercice 3. Sur tous les exemples de chaînes de Markov (d'espaces d'états finis) vues en cours et dans la première feuille de TD, précisez les classes communiquantes et leur récurrence ou transience.

Exercice 4.
Un parieur possède 4 euros et désire obtenir 20 euros le plus vite possible. Il peut jouer au jeu suivant : une pièce équilibrée est lancée ; s'il parie sur le bon côté il gagne une somme égale à sa mise, sinon il perd sa mise. La parieur décide d'une stratégie assez simpliste dans laquelle il mise de la façon suivante :
- s'il a a 10 euros ou moins, il mise tout son argent ;
- s'il a strictement plus de 10 euros, il mise juste assez pour obtenir 20 euros.
Soit X_n son capital après n lancers.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov sur un espace d'état de cardinal 6, donner sa matrice de transition et les classes communicantes.

2. En étudiant toutes les trajectoires possibles, montrer que le parieur obtiendra ses 20 euros avec probabilité $\frac{1}{5}$

   Soit T la durée du jeu avant que le parieur ne perde tout ou ne parte avec 20 euros.
3. Montrer que T est un temps d'arrêt.
4. Calculer la loi de T et en déduire la durée moyenne du jeu.

EXERCICE 5. Deux joueurs, A et B, s'affrontent dans un jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. A chaque lancer A donne 1 euro à B si la pièce donne pile et reçoit 1 euro de B si la pièce donne face. Au début de la partie A a a euros et B a b euros. Le jeu s'arrête dès qu'un des deux joueurs n'a plus d'argent.

1. Modéliser les cagnottes de A et B par des chaînes de Markov X_n et Y_n.
2. Quelle est la relation entre X_n et Y_n ?
3. A quelle condition sur X_n est-ce que le jeu s'arrête ?
4. Le jeu s'arrête-t-il presque sûrement ?
5. Quelle est la probabilité que ce soit A qui gagne ?
6. Quelle est la durée moyenne du jeu ?

EXERCICE 6. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. telle que $\mathbb{P}(U_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(U_n = -1)$ on définit la suite aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + U_n$. Donner la classification des états suivant la valeur de p.

EXERCICE 7. On peut modéliser la taille d'une population par une chaîne de Markov (X_n) à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition P définie par

$$P(k, k+1) = p_k, P(k, k-1) = q_k,\ p_k + q_k = 1, k \geq 1$$

et $P(0, 0) = 1$.

Donner les classes communiquantes de la chaîne ansi que leur état récurrent ou transient.

On s'intéresse maintenant à la probabilité d'extinction partant de k individus. On pose $h(k) = \mathbb{P}_x(\exists n \geq 0, X_n = 0)$. Montrer que

$$h(k) - h(k+1) = \frac{q_k}{p_k}(h(k-1) - h(k)) = \gamma_k(1 - h(1))$$

avec $\gamma_k = \frac{q_k \dots q_1}{p_k \dots p_1}$. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \gamma_k = +\infty$, $h(k) = 1$. Montrer que si $\sum_{k\geq 0} \gamma_k = +\infty$, $h(k) = \frac{\sum_{l\geq k} \gamma_l}{\sum_{l\geq 0} \gamma_l} < 1$. Dans ce second cas, la population survit avec une probabilité positive. Que peut-on alors dire ?

EXERCICE 8. Soit p_n une suite de nombres strictements positifs tels que $\sum_{n\geq 0} p_n = 1$. On considère (X_n) la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de tranistion P définie par

$$P(k, k-1) = 1, k \geq 1 \text{ et } P(0, j) = p_j, j \in N.$$

Donner les classes communiquantes. Montrer que 0 est un état récurrent.