CHAPITRE 3 : TEMPS D'ATTEINTE ET PROBABILITÉ D'ABSORPTION

ADRIEN RICHOU

Master MSS Bordeaux

Dans tout ce chapitre, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera une chaîne de Markov homogène de paramètres (μ, P) sur un espace d'état fini ou dénombrable E.

Définition 0.1. Soit $A \subset E$, on définit
— le **temps d'atteinte** de A par

$$T_A = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in A\}.$$

— la probabilité d'atteinte de A partant de i par

$$u_i^A = \mathbb{P}_i(T_A < \infty).$$

Si le sous-ensemble A est fermé on parle alors de **probabilité d'absorption** par A partant de i
— le **temps moyen d'atteinte** de A partant de i

$$v_i^A = \mathbb{E}_i(T_A).$$

Théorème 0.2. *Le vecteur des probabilités d'absorption $(u_i)_{i\in E}$ est la plus petite solution positive du système*

$$\begin{cases} x_i = 1 \ \textit{si}\ i \in A, \\ x_i = \displaystyle\sum_{j\in E} P_{ij} x_j \ \textit{sinon.} \end{cases}$$

Plus petite dans le sens suivant : si $(x_i)_{i\in E}$ est une autre solution positive alors pour tout i dans E on a $x_i \geq u_i$.

Remarque 0.3. Le vecteur (ou fonction) $x_i \equiv 1$ est solution du système précédent.

Démonstration.
- Montrons tout d'abord que $(u_i)_{i\in E}$ vérifie bien le système.
  — Si $X_0 = i \in A$ alors on a bien sûr $T_A = 0$ et donc $u_i = \mathbb{P}(T_A < \infty) = 1$.

— Si $X_0 = i \notin A$, alors $T_A \geq 1$. Soit j tel que $\mathbb{P}(X_1 = j) > 0$ (c'est à dire $P_{ij} > 0$) alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(T_A < \infty | X_1 = j) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_A = k | X_1 = j), \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \notin A, \ldots, X_{k-1} \notin A, X_k \in A | X_1 = j), \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_j(X_0 \notin A, X_1 \notin A, \ldots, X_{k-2} \notin A, X_{k-1} \in A) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après la propriété de Markov faible,} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_A = k-1) = \mathbb{P}_j(T_A < \infty).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
u_i = \mathbb{P}_i(T_A < \infty) &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}_i(T_A < \infty, X_1 = j), \\
&= \sum_{j \in E, i \longrightarrow j} \mathbb{P}_i(T_A < \infty | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j), \\
&= \sum_{j \in E, i \longrightarrow j} P_{ij} \mathbb{P}_j(T_A < \infty), \\
&= \sum_{j \in E, i \longrightarrow j} P_{ij} u_j, \\
&= \sum_{j \in E} P_{ij} u_j \text{ car si } i \not\longrightarrow j \text{ alors } P_{ij} = 0.
\end{aligned}$$

- Montrons maintenant la minimalité de $(u_i)_{i \in E}$. Soit $(x_i)_{i \in E}$ solution positive du système. On a immédiatement $x_i = 1 = u_i$, pour tout $i \in A$. Soit $i \notin A$, alors

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_{j\in E} P_{ij}x_j = \sum_{j\in A} P_{ij} + \sum_{j\notin A} P_{ij}x_j,\\
&= \sum_{j\in A} P_{ij} + \sum_{j\notin A} P_{ij}\left(\sum_{k\in A} P_{jk} + \sum_{k\notin A} P_{jk}x_k\right),\\
&= \sum_{j\in A} P_{ij} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\in A} P_{ij}P_{jk} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}x_k,\\
&= \mathbb{P}_i(X_1\in A) + \mathbb{P}_i(X_1\notin A, X_2\in A) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}x_k,\\
&= \mathbb{P}_i(T_A=1) + \mathbb{P}_i(T_A=2) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}x_k,\\
&= \mathbb{P}_i(T_A\le 2) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}x_k.
\end{aligned}$$

Et par récurrence sur n on obtient (Exercice : faire la récurrence proprement) que pour tout $n\ge 1$

$$x_i = \mathbb{P}_i(T_A\le n) + \sum_{j_1\notin A}\sum_{j_2\notin A}\dots\sum_{j_n\notin A} P_{ij_1}P_{j_1j_2}\dots P_{j_{n-1}j_n}x_{j_n}.$$

On a supposé que $x_i\ge 0$, pour tout i dans E donc on a $x_i\ge \mathbb{P}_i(T_A\le n)$. Ceci étant vrai pour tout n on a

$$x_i \ge \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_i(T_A\le n) = \mathbb{P}_i(T_A<\infty) = u_i.$$

On a bien le droit de passer à la limite car la suite $(\mathbb{P}_i(T_A\le n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Et on a bien obtenu que $x_i\ge u_i$ pour tout i dans E.

□

Théorème 0.4. *Le vecteur des temps moyen d'atteinte $(v_i)_{i\in E}$ est la plus petite solution positive du système*

$$\begin{cases} y_i = 0 \text{ si } i\in A,\\ y_i = 1 + \displaystyle\sum_{j\notin A} P_{ij}y_j \text{ sinon.}\end{cases}$$

Démonstration.

- Montrons tout d'abord que $(v_i)_{i\in E}$ est solution du système.
  — Si $X_0 = i\in A$ alors on a bien sûr $T_A=0$ et donc $v_i=\mathbb{E}(T_A)=0$
  — Si $X_0=i\notin A$ alors on a

$$v_i = \mathbb{E}_i(T_A) = \sum_{j\in E}\mathbb{E}_i(T_A\mathbf{1}_{X_1=j}) = \sum_{j\in E, i\longrightarrow j}\mathbb{E}_i(T_A\mathbf{1}_{X_1=j})$$

et pour tout $j \in E$ tel que $i \longrightarrow j$ on a, car $\mathbb{P}_i(X_1 = j) > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i(T_A \mathbf{1}_{X_1=j}) &= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}_i(T_A = k, X_1 = j)\right) + \infty.\mathbb{P}_i(T_A = \infty, X_1 = j),\\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}_i(T_A = k|X_1 = j)\mathbb{P}_i(X_1 = j)\right) + \infty.\mathbb{P}_i(T_A = \infty|X_1 = j)\mathbb{P}_i(X_1 = j),\\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}_j(T_A = k-1)P_{ij}\right) + \infty.\mathbb{P}_j(T_A = \infty)P_{ij}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{par la propriété de Markov faible,}\\
&= P_{ij}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\mathbb{P}_j(T_A = k-1) + \infty.\mathbb{P}_j(T_A = \infty)\right),\\
&= P_{ij}\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}_j(T_A = k) + \infty.\mathbb{P}_j(T_A = \infty)\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_j(T_A = k) + \mathbb{P}_j(T_A = \infty)\right)\right),\\
&= P_{ij}(\mathbb{E}_j(T_A) + 1).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}_i(T_A) = \sum_{j\in E, i\longrightarrow j} P_{ij} + \sum_{j\in E, i\longrightarrow j} P_{ij}\mathbb{E}_j(T_A) = \sum_{j\in E} P_{ij} + \sum_{j\in E} P_{ij}\mathbb{E}_j(T_A),$$

$$v_i = 1 + \sum_{j\in E} P_{ij}v_j = 1 + \sum_{j\notin A} P_{ij}v_j$$

- Montrons maintenant la minimalité de $(v_i)_{i\in E}$. Soit $(y_i)_{i\in E}$ solution du système. Alors si $i \in A$ on a immédiatement $y_i = 0 = u_i$. Et si $i \notin A$ on a

$$\begin{aligned}
y_i &= 1 + \sum_{j\notin A} P_{ij}y_j,\\
&= 1 + \sum_{j\notin A} P_{ij}\left(1 + \sum_{k\notin A} P_{jk}y_k\right),\\
&= 1 + \sum_{j\notin A} P_{ij} + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}y_k,\\
&= \mathbb{P}_i(T_A \geq 1) + \mathbb{P}_i(T_A \geq 2) + \sum_{j\notin A}\sum_{k\notin A} P_{ij}P_{jk}y_k.
\end{aligned}$$

Et par récurrence sur n on obtient (Exercice : faire la récurrence proprement) que pour tout $n \geq 1$

$$y_i = \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq p) + \sum_{j_1 \notin A} \sum_{j_2 \notin A} \dots \sum_{j_n \notin A} P_{ij_1} P_{j_1 j_2} \dots P_{j_{n-1} j_n} y_{j_n}.$$

On a de plus supposé que $y_i \geq 0$ pour tout i dans E d'où

$$y_i \geq \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq p).$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, on a

$$y_i \geq \sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_A \geq p),$$

et le passage à la limite est autorisé car la suite $\left(\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}_i(T_A \geq p)\right)_{n \geq 1}$ est croissante.

De plus

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_A \geq p) = \sum_{p=1}^{\infty} p \mathbb{P}(T_A = p) + \infty . \mathbb{P}_i(T_A = \infty) = \mathbb{E}_i(T_A).$$

D'où $y_i \geq \mathbb{E}_i(T_A) = v_i$. $\square$