LA MARCHE DES COOKIES

La marche des cookies, également appelée marche excitée, est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On imagine qu'en tout point de $\mathbb{Z}$ se trouve une pile de M cookies notés $c_1, ...c_M$ du haut au bas de la pile et qu'à chaque cookie c_i de la pile est associé un paramètre p_i. Notons que M et $p_1, ..., p_M$ sont indépendant du point de $\mathbb{Z}$ considéré. On introduit également un paramètre p_0 et on note $\mathbf{p} = (p_0, ..., p_M)$. On note S_n notre position (sur $\mathbb{Z}$) à l'instant $n \in \mathbb{N}$. À l'instant 0, on se trouve à l'origine : $S_0 = 0$.

Lorsque l'on se trouve à l'instant n en un point $k \in \mathbb{Z}$, on regarde la pile de cookies restant au point k :

- S'il reste au moins un cookie c_j sur le haut de la pile, on le mange. Puis on se déplace à droite avec probabilité p_j et à gauche avec probabilité $1 - p_j$.
- S'il n'y a plus de cookies, on se déplace à droite avec probabilité p_0 et à gauche avec probabilité $1 - p_0$.

On peut écrire cela de façon mathématique :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = 1 | S_0, S_1, ..., S_n) = \begin{cases} p_j & \text{si } \#\{i; S_i = S_n\} = j \leqslant M \\ p_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = -1 | S_0, S_1, ..., S_n) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = 1 | S_0, S_1, ..., S_n).$$

Le comportement asymptotique de la marche des cookies est lié à la quantité

$$\delta_{M,\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{M} (2p_i - 1).$$

Le cas symétrique $p_0 = 1/2$ est celui qui a été le plus étudié. On peut montrer notamment que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = c_{M,\mathbf{p}} \qquad \text{p.s.}$$

avec $c_{M,\mathbf{p}} > 0$ si $\delta_{M,\mathbf{p}} > 2$, $c_{M,\mathbf{p}} = 0$ si $|\delta_{M,\mathbf{p}}| \leqslant 2$ et $c_{M,\mathbf{p}} < 0$ sinon. Attention, $c_{M,\mathbf{p}}$ n'est pas une fonction de $\delta_{M,\mathbf{p}}$.

De plus, si $\delta_{M,\mathbf{p}} \in [0, 1[$ alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y.$$

avec Y une variable aléatoire ne dépendant que de $\delta_{M,\mathbf{p}}$.

Le cas asymétrique $p_0 \neq 1/2$ est bien moins étudié. On peut montrer que si $M = 1$, que $p_0 \in]1/2, 1[$ et que $p_1 \in]0, 1[$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2p_0 - 1}{2p_0 - 1 + 2(1 - p_1)} \qquad \text{p.s.}$$

Créer un code Scilab permettant de simuler la marche des cookies et de visualiser les convergences p.s. et normalités asymptotiques dans les différentes situations décrites ci-dessus. Que se passe-t-il si $M = 2$ dans le cas asymétrique ?